

# Ανάλυση

## Φυλλάδιο ασκήσεων 6

Καλή επιτυχία!

1. Δείξτε ότι αν η  $g$  είναι αύξουσα συνάρτηση τότε  $L(f, g, P) \leq L(f, g, P')$  για οποιαδήποτε διαμέριση  $P \subset P'$ .
2. Δείξτε ότι αν η  $g$  είναι αύξουσα συνάρτηση τότε  $U(f, g, P) \geq U(f, g, P')$  για οποιαδήποτε διαμέριση  $P \subset P'$ .
3. Δώστε ένα παράδειγμα μια συνάρτησης η οποία δεν αναμένετε να είναι ολοκληρώσιμη κατα Stieltjes στο  $[0, 1]$  ως προς κάποια μονότονη συνάρτηση ολοκληρώτη  $g$ .
4. Δείξτε ότι  $\int_a^b f dg \leq \overline{\int_a^b f dg}$ .
5. Δείξτε ότι  $\int_a^b 1 dg = g(b) - g(a)$ .
6. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 x^2 dg(x)$  για την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 2 & \text{για } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

7. Δείξτε ότι αν  $g$  αύξουσα και  $f_1 \leq f_2$  τότε  $\int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg$  (εφόσον τα ολοκληρώματα υπάρχουν).
8. Δείξτε ότι αν  $g$  αύξουσα και  $f$  ολοκληρώσιμη, τότε και η  $|f|$  είναι ολοκληρώσιμη και  $|\int_a^b f dg| \leq \int_a^b |f| dg$ .
9. Δείξτε ότι αν  $g$  αύξουσα τότε  $|\int_a^b f dg| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|(g(b) - g(a))$
10. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{10} f(x) dg(x)$  για  $f(x) = x$  και  $g(x) = x + [x]$  χρησιμοποιώντας την κατάλληλη διαμέριση.
11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{10} f(x) dg(x)$  για  $f(x) = x$  και  $g(x) = x + [x]$  χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση κατά παράγοντες
12. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 0 \\ 3 - 4x & 0 < x < 1 \\ -1 & x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_{-3}^3 f(x) dg(x)$ .

13. Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = 2\mathbf{1}_{[0,2)} + 5\mathbf{1}_{[2,3)} + 6\mathbf{1}_{[3,\infty)}$ . Υπολογίστε το  $\int_{-5}^{10} e^{-3x} dg(x)$ .
14. Χρησιμοποιείστε την αναπαράσταση των ροπών μέσω του ολοκληρώματος Stieltjes για τον υπολογισμό των δύο πρώτων ροπών της τυχαίας μεταβλητής  $X \sim Ber(p)$ .