Θνησιμότητα

1. Συνάρτηση Επιβίωσης

- X : η τυχαία μεταβλητή της διάρκειας ζωής ενός προσώπου ηλικίας 0

i) $F(x)$: Συνάρτηση της αθροιστικής κατανομής

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ii) $f(x)$. Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f(x) = F'(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^{\infty} f(t)\, d(t)$$

iii) $S(x) = 1 - F(x)$: Συνάρτηση επιβίωσης

Αποδίδει την πιθανότητα νεογέννητο να επιβιώσει μετά από x έτη.

$P(X > x)$

1. Συνάρτηση Επιβίωσης

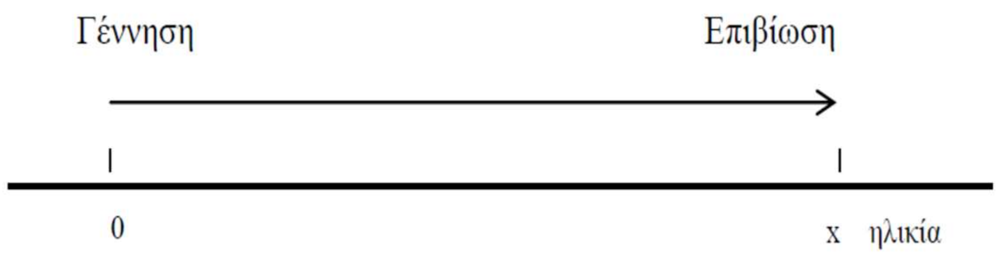
$$P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = S(x_1) - S(x_2)$$

$$P(x_1 < x < x_2 \mid > x_1) = \frac{P(x_1 < x < x_2)}{P(x > x_1)} = \frac{S(x_1) - S(x_2)}{S(x_1)}$$

1. Συνάρτηση Επιβίωσης

Η συνάρτηση επιβίωσης s(x) αντιπροσωπεύει την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας ακριβώς μηδέν (0) να επιβιώσει μέχρι την ηλικία ακριβώς x δηλ.

s(x)=Pr (άτομο ηλικίας ακριβώς 0 να επιβιώσει μέχρι την ηλικία ακριβώς x)



Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

1. Συνάρτηση Επιβίωσης

<u>Χαρακτηριστικές ιδιότητες της s(x):</u>

1. $S(0)=1$ και $S(\omega)=0$,

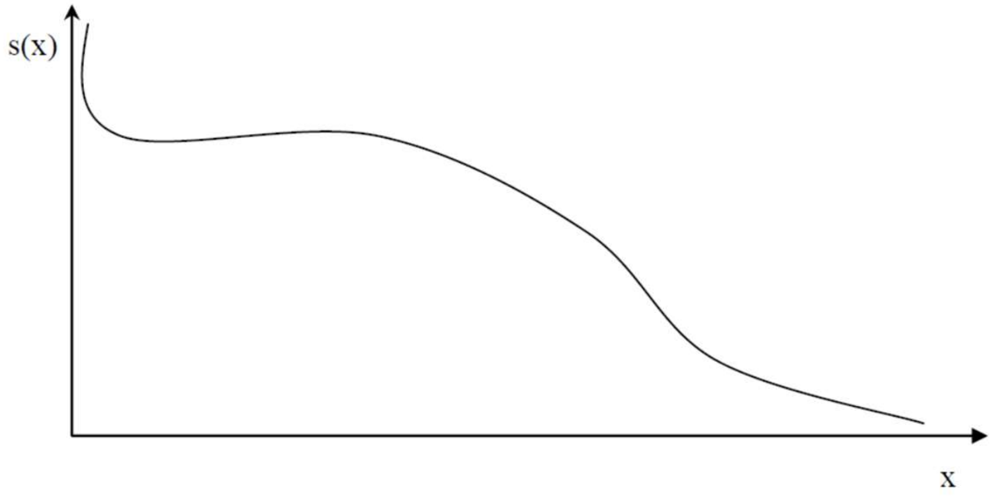
όπου ω είναι η καταληκτική ηλικία του πίνακα συνήθως κοντά στο 100

2. Η $s(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και γνησίως φθίνουσα

Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες μπορεί να χαρακτηριστεί ως συνάρτηση επιβίωσης.

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

1. Συνάρτηση Επιβίωσης



Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

2. Πίνακας Θνησιμότητας

Για την τιμολόγηση των ασφαλιστικών προϊόντων και την διασφάλιση της επάρκειας των τεχνικών προβλέψεων για την πληρωμή των υποχρεώσεων που καλείται να καταβάλει η ασφαλιστική επιχείρηση ασφαλίσεων ζωής, οι αναλογιστές χρησιμοποιούν τους πίνακες θνησιμότητας για να προβάλουν τον αριθμό και τη χρονική στιγμή των μελλοντικών θανάτων των ασφαλισμένων. Οι αναλογιστές μελετούν τη συχνότητα των θανάτων του πρόσφατου παρελθόντος και κάνουν εκτιμήσεις για την μελλοντική εξέλιξη αυτών, το χρόνο και τον αριθμό των θανάτων που θα συμβούν στο μέλλον.

2. Πίνακας θνησιμότητας

Ο πίνακας θνησιμότητας είναι μια τυποποιημένη διάταξη αριθμών που αντιπροσωπεύει ένα διακριτό πρότυπο περιγραφής της κατανομής που συνδέεται με τον κίνδυνο της απώλειας της ζωής ενός ατόμου. Μια τυπική τέτοια διάταξη φαίνεται παρακάτω

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

2. Πίνακας Θνησιμότητας

<u>Πίνακας Θνησιμότητας</u>

Ηλικία x	Πλήθος Ατόμων l_x	Πλήθος Θανάτων d_x
0	100.000	2.500
1	97.500	2.300
2	94.200	……………
……………	……………	……………
……………	……………	……………
……………	……………	……………
ω- 1	5	5
ω	0	

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

2. Πίνακας Θνησιμότητας

l_x: πλήθος ατόμων που φθάνουν στα x-οστά γενέθλια δηλαδή, ακριβώς στην ηλικία x

d_x: πλήθος θανάτων ατόμων ηλικίας x

και ισχύει ο μαθηματικός τύπος

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Το l_0 είναι ένας μεγάλος στρογγυλός αριθμός συνήθως 100.000 ή 1.000.000 και έχει σχέση με τις γεννήσεις που λαμβάνουν χώρα κατά την διάρκεια ενός ημερολογιακού έτους. Το l_0 επιλέγεται αυθαίρετα από τους κατασκευαστές του πίνακα.

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

2. Πίνακας θνησιμότητας

Ρ.Μ. 1960/64, ΜΚΗ

x	lx	dx	qx	px
0	1.000.000	24.280	0,02428	0,97572
1	975.720	2.220	0,00228	0,99772
2	973.500	1.100	0,00113	0,99887
3	972.400	750	0,00077	0,99923
4	971.650	610	0,00063	0,99937
5	971.040	530	0,00055	0,99945
6	970.510	470	0,00048	0,99952
7	970.040	440	0,00045	0,99955
8	969.600	410	0,00042	0,99958
9	969.190	390	0,00040	0,99960
10	968.800	380	0,00039	0,99961
	…			
50	870.347	7.783	0,00894	0,99106
51	862.564	8.398	0,00974	0,99026
52	854.166	9.057	0,01060	0,98940
53	845.109	9.761	0,01155	0,98845
54	835.348	10.512	0,01258	0,98742
55	824.836	11.310	0,01371	0,98629

ΠΙΝΑΚΑΣ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Ε.Α.Ε. 1990

x	lx	dx	qx	px
0	1.000.000	10.070	0,01007	0,98993
1	989.930	490	0,00049	0,99951
2	989.440	389	0,00039	0,99961
3	989.051	316	0,00032	0,99968
4	988.735	279	0,00028	0,99972
5	988.456	253	0,00026	0,99974
6	988.203	230	0,00023	0,99977
7	987.973	206	0,00021	0,99979
8	987.767	186	0,00019	0,99981
9	987.581	173	0,00018	0,99982
10	987.408	174	0,00018	0,99982
	…			
50	933.668	3.847	0,00412	0,99588
51	929.821	4.250	0,00457	0,99543
52	925.571	4.697	0,00507	0,99493
53	920.874	5.189	0,00563	0,99437
54	915.685	5.730	0,00626	0,99374
55	909.955	6.324	0,00695	0,99305

2. Πίνακας θνησιμότητας

Η σχέση του πίνακα με την συνάρτηση επιβίωσης δίνεται παρακάτω

Έστω λ_0 το αρχικό πλήθος των ατόμων ηλικίας 0 (νεογέννητα) και

έστω λ_x τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το πλήθος των ατόμων που φθάνουν ακριβώς στην ηλικία x, τότε

$$E(\lambda_x) = \lambda_0 \cdot s(x)$$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

$T(x)$: τυχαία μεταβλητή της διάρκειας ζωής προσώπου ηλικίας x

i) $_{n}q_{x} = P(T(x) \le n)$: πιθανότητα προσώπου ηλικίας x να αποθάνει εντός των επομένων n ετών

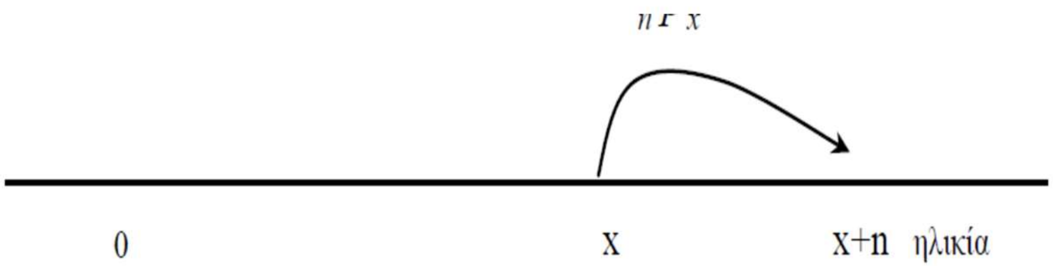
ii) $_{n}p_{x} = 1 - P(T(x) \le n)$: πιθανότητα προσώπου ηλικίας x να επιβιώσει περισσότερο από n έτη.

iii) $_{m}q_{x+n} = P(n < T(x) < n+m \mid T(x) > n)$: πιθανότητα ατόμου ηλικίας x να επιβιώσει λιγότερο από m έτη γνωρίζοντας ότι θα φτάσει την ηλικία $x+n$

3. Βασικές συναρτήσεις

Εκτός από τις βασικές συναρτήσεις, υπάρχουν αρκετές ακόμη οι οποίες μας βοηθούν στον υπολογισμό των πιθανοτήτων διαφόρων ενδεχομένων, όπως

${}_n p_x$: πιθανότητα επιβίωσης ατόμου ηλικίας (ακριβώς) x μέχρι την ηλικία (ακριβώς) x+n.



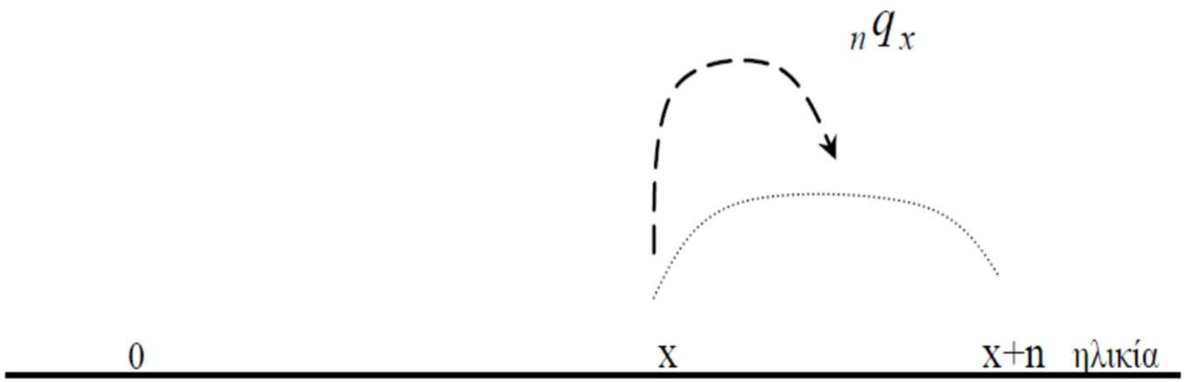
Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

Πρόκειται ίσως για την πιο κλασσική συνάντηση της αναλογιστικής αναφορικά με τις ασφαλίσεις ζωής.

Αποδίδει την πιθανότητα επιβίωσης ενός ατόμου ηλικίας x για μια περίοδο n και ορίζεται από το λόγο του αριθμού των επιζώντων στην ηλικία x+n και στην ηλικία x.

3. Βασικές συναρτήσεις

${}_n q_x$: πιθανότητα θανάτου ατόμου ηλικίας (ακριβώς) x πριν την ηλικία (ακριβώς) x+n.



Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

όπου n=1 τότε συνήθως παραλείπεται δηλαδή,

$$ {}_1p_x = p_x \qquad {}_1q_x = q_x $$

Γενικά ισχύει ότι $$ p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \ , $$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

Σε συνδυασμό με τη συνάρτηση επιβίωσης έχουμε για το p_χ

$$s(x+1) = s(x) \cdot p_x \Rightarrow p_x = \frac{s(x+1)}{s_x} \Rightarrow p_x = \frac{\frac{l_{x+1}}{\lambda_o}}{\frac{l_x}{\lambda_o}} \Rightarrow p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

εφόσον $$s(x) = \frac{\mathrm{E}(\lambda_x)}{\lambda_0} = \frac{l_x}{\lambda_0}$$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

Επίσης έχουμε ότι

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \quad ,$$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

$$ {}_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} = p_{x} \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdot \ldots\ldots \cdot p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_{x}} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot \ldots\ldots \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} $$

$$ {}_{n}q_{x} = 1 - {}_{n}p_{x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_{x}} $$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

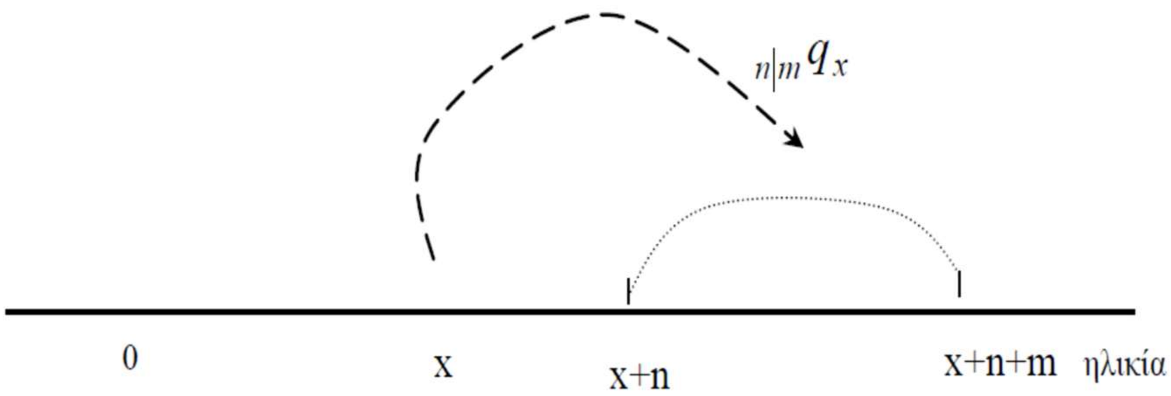
Άρα τελικά έχουμε τις εξής σχέσεις

$$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad \text{και} \qquad {}_n q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} $$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

${}_{n|m}q_x$: πιθανότητα θανάτου ατόμου ηλικίας x (ακριβώς) μεταξύ των ηλικιών x+n και x+n+m.



Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

Για την παραπάνω συνάρτηση ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$_{n|m}q_x = {}_{n+m}q_x - {}_nq_x \qquad {}_{n|m}q_x = {}_np_x \cdot {}_mq_{x+n}$$

$$_{n|m}q_x = {}_np_x - {}_{n+m}p_x \qquad {}_{n|m}q_x = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+m}}{l_x}$$

Επίσης, όταν n=1 τότε η μονάδα παραλείπεται δηλαδή,

$$_{n|}\,q_x = {}_{n|1}q_x$$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

3. Βασικές συναρτήσεις

Συνάρτηση ${}_{n|m}q_x$, για την οποία ισχύει ότι:

α) $${}_{n|m}q_x = P(n < T(x) < n+m)$$

$$= P(T(x) < n+m) - P(T(x) < n)$$

$$= {}_{n+m}q_x - {}_{n}q_x$$

$$= 1 - {}_{n+m}p - (1 - {}_{n}p_x)$$

$$= {}_{n}p_x - {}_{n+m}p_x$$

3. Βασικές συναρτήσεις

β) $_{n|m}q_x = {}_np_x \cdot {}_mq_{x+n}$

$$P(n < T(x) < n+m) = P(T(x) < n+m) - P(T(x) < n)$$

$$= \frac{S(x) - S(x+n+m)}{S(x)} - \frac{S(x) - S(x+n)}{S(x)}$$

$$= \frac{S(x+n) - S(x+n+m)}{S(x)}$$

$$= \frac{S(x+n)}{S(x)} \cdot \frac{S(x+n) - S(x+n+m)}{S(x+n)}$$

$$= {}_np_x \cdot {}_mq_{x+n}$$

Η πιθανότητα θανάτου ατόμου ηλικίας x εντός της χρονικής περιόδου n και n+m ισούται με την πιθανότητα επιβίωσης έως τη χρονική στιγμή n επί την πιθανότητα θανάτου ατόμου ηλικίας x+n εντός των επομένων m ετών.

4. Ένταση θνησιμότητας

Η ένταση θνησιμότητας στην ηλικία x συμβολίζεται με μ_χ και ορίζεται ως ο στιγμιαίος ρυθμός θνησιμότητας δηλαδή,

$$\mu_x = \lim_{h\to 0} \frac{{}_h q_x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{l_x - l_{x+h}}{h l_x} = -\frac{1}{l_x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{l_{x+h} - l_x}{h} = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{d_x}$$

οπότε έχουμε ότι

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{d_x} = -\frac{d}{d_x}(\ln l_x)$$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

5. Η συνάρτηση του προσδόκιμου ζωής

Η συνάρτηση του προσδόκιμου ζωής : E_x

ορίζεται ως το άθροισμα κάθε πιθανής διάρκειας ζωής σταθμισμένη με την αντίστοιχη (εντός αυτής της ηλικίας)πιθανότητα θανάτου.

$$E_x = \sum_{k \geq 0}^{\omega - x} (k+1)\ {}_kP_x\ q_{x+k}$$

ή

$$E_x = \sum_{k \geq 0}^{\omega - x} {}_kP_x$$

6. Βασικοί νόμοι θνησιμότητας

Μέχρι σήμερα έχουν προταθεί διάφορες μαθηματικές συναρτήσεις για την εξέλιξη της βασικής συνάρτησης l_x του πίνακα θνησιμότητας που παρουσιάζουν σχετική έως και αρκετά καλή προσαρμογή στα εμπειρικά δεδομένα των ερευνών θνησιμότητας

Αναφέρουμε τους δύο βασικούς και παλαιότερους τέτοιους νόμους

1. Gompertz: $l_x = \kappa \cdot g^{c^x}$ $\quad$ $\mu_x = \mathrm{B} \cdot c^x$

2. Makeham: $l_x = \kappa \cdot S^x \cdot g^{c^x}$ $\quad$ $\mu^x = \mathrm{A} + \mathrm{B} \cdot c^x$

De Moivre: $l_x = \kappa \cdot (\omega - x)$ $\quad$ $\mu_x = \dfrac{1}{\kappa(\omega - x)}$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

7. Αριθμοί Μετατροπής

Η σύνθεση ενός πίνακα θνησιμότητας με ένα ποσοστό επιτοκίου παράγει ένα αναλογιστικό πίνακα. (βλέπε τους πίνακες του παραρτήματος)

Παρατηρούμε ότι ένας αναλογιστικός πίνακας έχει δέκα στήλες και περιέχει κάποιες επιπλέον (από τις ήδη γνωστές) συναρτήσεις. Αυτές οι έξι νέες συναρτήσεις ονομάζονται συναρτήσεις μετατροπής και υπολογίζονται ως εξής

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

7. Αριθμοί Μετατροπής

- $D_x = v^x \cdot l_x \qquad , \quad v = \dfrac{1}{1+i}$

- $N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t} = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{\omega-1}$

- $S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} N_{x+t} = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots + N_{\omega-1}$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

7. Αριθμοί Μετατροπής

- $C_x = v^{x+1} \cdot d_x$

- $M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t} = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots$

- $R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t} = \sum_{t=0}^{\omega-\chi-1} M_{x+t} = M_x + M_{x+1} + \ldots$

Πηγή : Αλ. Ζυμπίδης – Αναλογιστικά Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής

7. Αριθμοί Μετατροπής

$D_x = l_x v^x$ $N_x = \sum_{k=0}^{\omega - x} D_{x+k}$ $S_x = \sum_{k=0}^{\omega - x} N_{x+k}$ $C_x = d_x v^{x+1}$ $M_x = \sum_{k=0}^{\omega - x} C_{x+k}$ $R_x = \sum_{k=0}^{\omega - x} M_{x+k}$

x	Dx	Nx	Sx		Cx	Mx	Rx
0	1.000.000,00	22.190.271,84	449.580.665,96		23290,168	95360,620	3862043,253
1	935.942,45	21.190.271,84	427.390.394,12		2042,682	72070,453	3766682,632
2	895.743,84	20.254.329,40	406.200.122,28		970,878	70027,770	3694612,180
3	858.255,82	19.358.585,56	385.945.792,89		634,976	69056,892	3624584,410
4	822.632,00	18.500.329,73	366.587.207,33		495,393	68421,917	3555527,517
5	788.600,05	17.677.697,73	348.086.877,59		412,876	67926,524	3487105,600
6	756.038,01	16.889.097,68	330.409.179,86		351,209	67513,648	3419179,076
7	724.865,11	16.133.059,66	313.520.082,18		315,387	67162,440	3351665,427
8	694.998,87	15.408.194,55	297.387.022,52		281,903	66847,052	3284502,988
9	666.383,68	14.713.195,68	281.978.827,96		257,220	66565,150	3217655,935
10	638.959,74	14.046.812,01	267.265.632,28		240,407	66307,930	3151090,786
11	612.670,61	13.407.852,27	253.218.820,27		230,606	66067,523	3084782,856
12	587.463,03	12.795.181,65	239.810.968,01		226,444	65836,917	3018715,332
13	563.287,25	12.207.718,63	227.015.786,35		240,106	65610,473	2952878,415
14	540.083,40	11.644.431,37	214.808.067,73		273,168	65370,367	2887267,942
15	517.792,44	11.104.347,98	203.163.636,35		333,448	65097,199	2821897,575
16	496.349,95	10.586.555,54	192.059.288,37		394,273	64763,752	2756800,376
17	475.720,79	10.090.205,59	181.472.732,84		458,567	64369,479	2692036,625
18	455.868,33	9.614.484,80	171.382.527,25		503,359	63910,912	2627667,146
19	436.780,41	9.158.616,48	161.768.042,44		531,122	63407,553	2563756,234
20	418.442,89	8.721.836,07	152.609.425,97		542,016	62876,431	2500348,681
21	400.842,05	8.303.393,18	143.887.589,89		548,337	62334,415	2437472,250
22	383.952,43	7.902.551,13	135.584.196,71		545,179	61786,079	2375137,835
23	367.754,52	7.518.598,70	127.681.645,58		541,367	61240,900	2313351,756
24	352.220,76	7.150.844,18	120.163.046,88		526,362	60699,533	2252110,856
25	337.335,28	6.798.623,42	113.012.202,70		518,458	60173,171	2191411,324