Πιθανότητες - Κατανομές - Εκτιμητική

Η Θεωρία Πιθανοτήτων είναι μία μαθηματική θεωρία με τη βοήθεια της οποίας μελετάμε φαινόμενα τα οποία επηρεάζονται από την τύχη

Παραδείγματα φαινομένων που επηρεάζονται από την τύχη:

1. Το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος: Κορώνα (Κ), Γράμματα (Γ).
2. Το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού: 1, 2, ..., 6.
3. Το χαρτί που επιλέγουμε από μία συνηθισμένη τράπουλα 52 χαρτιών.
4. Ο αυριανός καιρός
5. Ο αριθμός των σεισμών που θα γίνουν στην Κρήτη κατά τον επόμενο μήνα.
6. Ο αριθμός των γεννήσεων στην Κρήτη κατά τον επόμενο μήνα.
7. Το αποτέλεσμα της λήψης ενός φαρμάκου το οποίο προορίζεται γιά κάποια ασθένεια
8. Το μέγεθος του πληθωρισμού κατά το επόμενο έτος.

Παραδείγματα φαινομένων που δεν επηρεάζονται από την τύχη:

1. Το σπάσιμο ενός εύθραστου ποτηριού όταν αφεθεί να πέσει κάτω από μεγάλο ύψος.
2. Η επιτάχυνση ενός αυτοκινήτου όταν πατάμε γκάζι.
3. Η γήρανση και ο θάνατος των ανθρώπων.
4. Η ελλειπτική κίνηση των πλανητών.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αποτελεί τη βάση της Στατιστικής Συμπερασματολογίας.

Η Στατιστική είναι μία μαθηματική θεωρία με τη βοήθεια της οποίας εξάγουμε κάποιο συμπέρασμα γιά έναν πληθυσμό βασιζόμενοι σ' ένα δείγμα του πληθυσμού.

Παράδειγμα: Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο εισόδημα των κατοίκων των Χανίων. Επιλέγουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα και με βάση αυτό το δείγμα εκτιμούμε το μέσο εισόδημα των κατοίκων.

Παράδειγμα: Θέλουμε να μελετήσουμε το αποτέλεσμα που επιφέρει στην καταπολέμηση της γρίπης ένα συγκεκριμένο φάρμακο. Επιλέγουμε ένα δείγμα ασθενών που έχουν γρίπη. Τους δίνουμε το φάρμακο. Τους εξετάζουμε και με βάση αυτό το δείγμα των ασθενών προσπαθούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για το σύνολο (ολόκληρο τον πληθυσμό) των ασθενών.

Η Στατιστική χρησιμοποιείται σε πάρα πολλούς τομείς όπως στην ιατρική, στη βιολογία, στις δημοσκοπήσεις, στην οικονομετρία (π.χ στο πρόβλημα της πρόβλεψης του πληθωρισμού ή της ανεργίας), στον έλεγχο της ποιότητας κατά τη βιομηχανική παραγωγή.

Ιστορική Αναδρομή:

- Οι Αρχαίοι είχαν κάνει την Τύχη Θεά.
- Η τύχη είχε αναγνωριστεί από τον Αριστοτέλη ως ένα εκ των "ουκ άνευ" γιά την επιτυχία γιά τη ζωή.
- Η αβεβαιότητα έγινε γιά πρώτη φορά αντικείμενο μαθηματικής μελέτης κατά τον 17ον αιώνα. Αυτή άρχισε με την ανταλλαγή επιστολών μεταξύ των Pascal και Fermat πάνω σ' ένα πρόβλημα που έθεσε ο παίκτης Chevalier de Meré, ο οποίος ισχυριζόταν (σωστά ή λάθος;) ότι η πιθανότητα εμφάνισης τουλάχιστον ενός άσσου σε 4 ρίψεις ενός ζαριού είναι ίση με την πιθανότητα εμφάνισης τουλάχιστον δύο άσσων σε 24 ρίψεις δύο ζαριών.
- Στη δεκαετία του 1930 ο Ρώσος μαθηματικός Kolmogorov θεμελίωσε αυστηρά τη Θεωρία Πιθανοτήτων εισάγοντας αξιώματα εφαρμόζοντας ιδέες από τη Θεωρία Μέτρου (που είναι ένας κλάδος της Μαθηματικής Ανάλυσης)

Ας δούμε ένα αρχικό παράδειγμα:

Ένα σύστημα τηλεπικοινωνιών αποτελείται από n φαινομενικά όμοιες κεραίες που τοποθετούνται σε ευθύγραμμη διάταξη. Το σύστημα είναι σε θέση να λαμβάνει όλα τα εισερχόμενα σήματα (και τότε ονομάζεται λειτουργικό) όταν δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές ελαττωματικές κεραίες. Αν γνωρίζουμε ότι ακριβώς m από τις n κεραίες είναι ελαττωματικές, ποιά είναι η πιθανότητα το σύστημα να είναι λειτουργικό;

Γιά παράδειγμα, αν $n=4$ και $m=2$ υπάρχουν 6 δυνατές καταστάσεις του συστήματος. Αυτές δίνονται παρακάτω:

0	1	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1
1	1	0	0

όπου 1 σημαίνει ότι η κεραία λειτουργεί, ενώ 0 σημαίνει ότι είναι ελαττωματική. Παρατηρούμε ότι στις 3 πρώτες καταστάσεις το σύστημα είναι λειτουργικό ενώ στις 3 τελευταίες καταστάσεις το σύστημα δεν είναι λειτουργικό. Συνεπώς η πιθανότητα να είναι λειτουργικό το σύστημα ισούται με 1/2.

Στη γενική περίπτωση, που έχουμε n κεραίες από τις οποίες m είναι ελαττωματικές, γιά να υπολογίσουμε την πιθανότητα να είναι λειτουργικό το σύστημα πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό των καταστάσεων στις οποίες το σύστημα είναι λειτουργικό και να τον διαιρέσουμε με το συνολικό αριθμό όλων των καταστάσεων.

Θα ήταν λοιπόν χρήσιμο να έχουμε μία μέθοδο που θα μας βοηθάει να μετράμε τους τρόπους που συμβαίνουν ορισμένα πράγματα.

Είναι χρήσιμο λοιπόν να παραθέσουμε ορισμένα στοιχεία από τη μαθηματική θεωρία μέτρησης που είναι γνωστή ως Συνδυαστική Ανάλυση. Αυτή η θεωρία βασίζεται σε δύο αρχές μέτρησης: τη βασική και τη γενική αρχή μέτρησης.

Βασική Αρχή Μέτρησης:

Αν το Πείραμα Π_1 έχει n_1 δυνατά αποτελέσματα και γιά κάθε αποτέλεσμα του Π_1 το πείραμα Π_2 έχει n_2 δυνατά αποτελέσματα, τότε το πείραμα (Π_1, Π_2) έχει $n_1 \cdot n_2$ δυνατά αποτελέσματα.

Παράδειγμα: Σ' ένα χορό έχουμε 15 άνδρες και 10 γυναίκες. Πόσα δυνατά ζευγάρια (Α, Γ) έχουμε;

Απάντηση: $15 \times 10 = 150$

Παράδειγμα: Πόσα δυνατά αποτελέσματα υπάρχουν αν ρίξουμε

(i) δύο νομίσματα; (ii) δύο ζάρια;

Απάντηση: (i) Η ρίψη του 1ου νομίσματος έχει 2 δυνατά αποτελέσματα: $\{K, \Gamma\}$
Γιά κάθε αποτέλεσμα της ρίψης του 1ου νομίσματος το 2ο νόμισμα έχει 2 δυνατά αποτελέσματα. Άρα από τη βασική αρχή μέτρησης έπεται ότι τα δυνατά αποτελέσματα είναι $2 \times 2 = 4$

(ii) Η ρίψη του 1ου ζαριού έχει 6 δυνατά αποτελέσματα: $\{1, \dots, 6\}$. Γιά κάθε αποτέλεσμα της ρίψης του 1ου ζαριού το 2ο ζάρι έχει 6 δυνατά αποτελέσματα. Άρα από τη βασική αρχή μέτρησης έπεται ότι τα δυνατά αποτελέσματα είναι $6 \times 6 = 36$.

Γενική Αρχή Μέτρησης

Αν το πείραμα Π_1 έχει n_1 δυνατά αποτελέσματα και γιά κάθε αποτέλεσμα του Π_1

" " Π_2 " n_2 " " " " " " " (Π_1, Π_2)

" " Π_3 " n_3 " " " " " " " (Π_1, Π_2, Π_3)

" " Π_4 " n_4 " "

κ.ο.κ.

" " " " " $(\Pi_1, \dots, \Pi_{k-1})$

" " Π_k " n_k δυνατά αποτελέσματα

τότε το πείραμα $(\Pi_1, \dots, \Pi_k)$ έχει $n_1 \cdots n_k$ δυνατά αποτελέσματα.

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι κάποιος διαθέτει 5 κοστούμια, 3 ζευγάρια και 2 καπέλα. Με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί;

Απάντηση: Εφαρμόζοντας τη γενική αρχή μέτρησης με $k=3$ συμπεραίνουμε ότι μπορεί να ντυθεί με $5 \times 3 \times 2 = 30$ τρόπους.

Παράδειγμα: Κάθε πινακίδα αυτοκινήτου έχει 7 θέσεις από τις οποίες οι 3 πρώτες έχουν γράμματα και οι υπόλοιπες 4 αριθμούς. Για παράδειγμα:

X	A	Y	7	3	8	3

Πόσες τέτοιες πινακίδες υπάρχουν;

Απάντηση: Εφαρμόζοντας τη γενική αρχή μέτρησης με $k=7$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν

$$24 \times 24 \times 24 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 138.240.000$$ τέτοιες πινακίδες

Παράδειγμα: (τροποποίηση του προηγούμενου) Πόσες 7-θέσιες πινακίδες υπάρχουν αν κανένα γράμμα ή αριθμός δεν μπορούν να επαναληφθούν;

Απάντηση: Εφαρμόζοντας τη γενική αρχή μέτρησης με $k=7$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν

$$24 \times 23 \times 22 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 61.205.760$$

<u>Παράδειγμα:</u> Ρίχνουμε ένα νόμισμα n φορές. Πόσα δυνατά αποτελέσματα έχουμε;

<u>Απάντηση:</u> Εφαρμόζοντας τη γενική αρχή μέτρησης με $k=n$ συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων είναι ίσος με 2^n.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω ότι έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Πόσες δυνατές διατάξεις αυτών των αντικειμένων υπάρχουν;

<u>Απάντηση:</u> Το 1ο αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί με n τρόπους. Αφού επιλεγεί το 1ο αντικείμενο το 2ο αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί με $n-1$ τρόπους, αφού επιλεγεί το 2ο αντικείμενο το 3ο αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί με $n-2$ τρόπους, ..., αφού επιλεγεί το $n-1$ αντικείμενο το n-οστό αντικείμενο μπορεί να επιλεγεί με 1 τρόπο. Από τη γενική αρχή μέτρησης προκύπτει ότι συνολικά υπάρχουν

$$n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

διατάξεις των n αντικειμένων.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω ότι έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα. Αν διατάξουμε k $(k \leq n)$ αντικείμενα από τα n, πόσες διαφορετικές διατεταγμένες k-άδες υπάρχουν;

<u>Απάντηση:</u>

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{(n)_k}_{\text{αριθμός των διατάξεων } n \text{ αντικειμένων λαμβανομένων ανά } k}$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω ένα σύνολο αποτελούμενο από n αντικείμενα. Πόσα διαφορετικά υποσύνολα μεγέθους k υπάρχουν; (εδώ δεν λαμβάνεται υπόψη η διάταξη των στοιχείων);

<u>Απάντηση:</u> Έστω M ο ζητούμενος αριθμός. Σε κάθε υποσύνολο μεγέθους k αντιστοιχούν $k!$ διατεταγμένες k-άδες (βλέπε το προ-προηγούμενο παράδειγμα). Άρα ο συνολικός αριθμός των διατεταγμένων k-άδων είναι ίσος με $M\cdot k!$. Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι:

$$Mk! = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow M = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

συνδυασμοί n αντικειμένων λαμβανομένων ανά k

Παρατηρήσεις:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$

3. $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi e}$ "Τύπος του Stirling"

4. Ο αριθμός $\binom{n}{k}$ υπολογίζεται αναδρομικά από τον τύπο:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad 1 \leq k \leq n-1$$

Ο υπολογισμός αντιστοιχεί στο παρακάτω σχήμα που είναι γνωστό ως το "τρίγωνο του Pascal."

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Υπολογίζουμε τα στοιχεία της κάθε γραμμής και πηγαίνουμε στην επόμενη.

Παράδειγμα: Σ' ένα δοχείο υπάρχουν 5 λευκές και 7 μαύρες σφαίρες. Ανασύρουμε χωρίς επανάθεση 6 σφαίρες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να ανασύρουμε 2 λευκές και 4 μαύρες σφαίρες;

Απάντηση:

Οι 2 λευκές σφαίρες μπορούν ν' ανασυρθούν με $\binom{5}{2}$ τρόπους
" 4 μαύρες " " " " $\binom{7}{4}$ "

Συνεπώς 2 λευκές και 4 μαύρες σφαίρες μπορούν ν' ανασυρθούν με $\binom{5}{2}\binom{7}{4}$ τρόπους.

Παράδειγμα: Έστω 8 αριθμημένες σφαίρες. Ανασύρουμε 4 σφαίρες χωρίς επανάθεση. Πόσοι τρόποι υπάρχουν ώστε ο μικρότερος αριθμός να είναι ο 3;

Απάντηση: Η σφαίρα με αριθμό 3 μπορεί να επιλεγεί με έναν τρόπο ενώ οι υπόλοιπες 3 σφαίρες μπορούν να επιλεγούν με $\binom{5}{3}$ τρόπους. Άρα η απάντηση του προβλήματος είναι $1\cdot\binom{5}{3}$ τρόποι.

Παράδειγμα: 10 παιγνιόχαρτα επιλέγονται από μία συνηθισμένη τράπουλα 52 παιγνιόχαρτων. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή έτσι ώστε

(i) να επιλεγεί τουλάχιστον ένας άσσος;

(ii) να επιλεγεί ακριβώς ένας άσσος;

(iii) να επιλεγούν τουλάχιστον δύο άσσοι;

Απάντηση: (i) $\binom{52}{10}-\binom{48}{10}$

(ii) $\binom{4}{1}\binom{48}{9}$

(iii) $\binom{52}{10}-\binom{4}{1}\binom{48}{9}-\binom{48}{10}$

Πρόβλημα: Έστω n διαφορετικά αντικείμενα. Θέλουμε να τα διαιρέσουμε σε k διαφορετικά υποσύνολα με μεγέθη $n_1,\dots,n_k$ αντίστοιχα έτσι ώστε $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η διαίρεση;

Απάντηση: Χρησιμοποιώντας τη Γενική Αρχή Μέτρησης έχουμε

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i}{n_k}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i)!}}{n_k!\;0!}$$

$$=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}=\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$$

Εφαρμογή: Τα 52 χαρτιά μιάς συνηθισμένης τράπουλας τα μοιράζουμε σε 4 ανθρώπους. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η διανομή;

Απάντηση: $\dfrac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}=\dfrac{52!}{(13!)^4}$

Εφαρμογή: 8 δάσκαλοι πρόκειται να σταλούν σε 4 σχολεία. Σε κάθε σχολείο πρέπει να πάνε 2 δάσκαλοι. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει;

Απάντηση: $\dfrac{8!}{2!2!2!2!} = \dfrac{8!}{(2!)^4}$

Παράδειγμα: Επιλέγουμε χωρίς επανάθεση 5 χαρτιά από τα 52 χαρτιά μιας συνηθισμένης τράπουλας. Με πόσους τρόπους έχουμε

(α) ακριβώς δύο Ρήγες;

(β) χρώμα;

(γ) φουλ (δηλαδή, $\{x,x,x,y,y\}$);

(δ) καρέ (δηλαδή, 4 ίδια);

(ε) κέντα (δηλαδή, 5 διαδοχικά χαρτιά);

(στ) φλος (δηλαδή 5 διαδοχικά χαρτιά με ίδιο χρώμα);

Απάντηση: (α) $\binom{4}{2}\binom{48}{3}$ (β) $\binom{4}{1}\binom{13}{5}$

(γ) $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}$ (δ) $\binom{13}{1}\binom{4}{4}48$

(ε) $9 \cdot 4^5$ (στ) $9 \cdot 4 = 36$

Πρόβλημα: Πόσες διαφορετικές διατάξεις n αντικειμένων υπάρχουν αν τα αντικείμενα είναι διατεταγμένα πάνω στην περιφέρεια ενός κύκλου;

Απάντηση: Έστω k ο ζητούμενος αριθμός. Σε κάθε κυκλική διάταξη αντιστοιχούν n διαφορετικές ευθύγραμμες διατάξεις (αρχίζοντας την κάθε ευθύγραμμη διάταξη από κάποιο σημείο της κυκλικής).

Άρα:

$$k \cdot n = n! \Rightarrow k = (n-1)!$$

Θεωρία Πιθανοτήτων

Πειράματα → αιτιοκρατικά (όταν δεν επηρεάζονται από την τύχη)
→ τυχαία (όταν επηρεάζονται από την τύχη)

Εμείς θα περιοριστούμε στα τυχαία πειράματα. Παρακάτω αναφέρουμε τρία παραδείγματα τυχαίων πειραμάτων:

Παράδειγμα 1: Ρίψη ενός νομίσματος

Παράδειγμα 2: Ρίψη ενός ζαριού

Παράδειγμα 3: Επιλογή χαρτιού από μία τράπουλα

Ο Δειγματικός Χώρος ενός Πειράματος είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος. Συμβολίζεται με Ω. Οι δειγματικοί χώροι των παραπάνω τριών πειραμάτων είναι οι εξής:

Ρίψη ενός νομίσματος: $\Omega = \{K, \Gamma\}$

Ρίψη ενός ζαριού: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Επιλογή χαρτιού από μία τράπουλα: Ω = {τα 52 χαρτιά της τράπουλας}

Ενδεχόμενα ενός πειράματος είναι (συνήθως όλα) τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου.

Αναφέρουμε παρακάτω ορισμένα ενδεχόμενα των παραπάνω τριών πειραμάτων.

Στο πείραμα "Ρίψη ενός νομίσματος":

- το ενδεχόμενο εμφάνισης της "κορώνας" είναι το υποσύνολο $\{K\}$ του $\Omega = \{K, \Gamma\}$.
- το ενδεχόμενο εμφάνισης των "γραμμάτων" είναι το υποσύνολο $\{\Gamma\}$ του $\Omega = \{K, \Gamma\}$

Στο πείραμα "Ρίψη ενός ζαριού":

- το ενδεχόμενο "άρτιο αποτέλεσμα" είναι το υποσύνολο $\{2, 4, 6\}$ του

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- το ενδεχόμενο "περιττό αποτέλεσμα" είναι το υποσύνολο $\{1,3,5\}$ του $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 4" είναι το υποσύνολο $\{4,5,6\}$ του $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Στο πείραμα "Επιλογή χαρτιού από μία τράπουλα":

- το ενδεχόμενο "να εμφανιστεί άσσος καρρό" είναι το υποσύνολο {άσσος καρρό} του Ω = {όλα τα χαρτιά της τράπουλας}.

Θεωρούμε τομές και ενώσεις δύο ή περισσοτέρων ενδεχομένων καθώς επίσης και συμπληρώματα ενδεχομένων.

Παράδειγμα: Στο Πείραμα "Ρίψη ενός ζαριού" θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A = "άρτιο αποτέλεσμα" $= \{2,4,6\}$

B = "αποτέλεσμα μεγαλύτερο ή ίσο του 4" $= \{4,5,6\}$

Οπότε: $A \cap B = \{4,6\}$

$A \cup B = \{2,4,5,6\}$

$A^c = \Omega \setminus A = \{1,3,5\}$ = "περιττό αποτέλεσμα"

Θα λέμε ότι το ενδεχόμενο A **συνέβη** αν το αποτέλεσμα a του πειράματος ανήκει στο A.

Παράδειγμα: Το ενδεχόμενο "άρτιο αποτέλεσμα" συνέβη αν το αποτέλεσμα του ζαριού είναι 2 ή 4 ή 6.

Συνολοθεωρητικές εκφράσεις καθημερινών εκφράσεων:

Έστω A, B, Γ ενδεχόμενα ενός πειράματος. Από τα A, B, Γ

(α) το A δεν συμβαίνει: A^c

(β) μόνο το A συμβαίνει: $A \cap B^c \cap \Gamma^c$

(γ) τουλάχιστον ένα συμβαίνει: $A \cup B \cup \Gamma$

(δ) και τα τρία συμβαίνουν : $A \cap B \cap \Gamma$

(ε) το A και το B συμβαίνει αλλά όχι το Γ : $A \cap B \cap \Gamma^c$

(στ) τουλάχιστον δύο συμβαίνουν : $(A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cap (\Gamma \cap A)$

(ζ) κανένα από τα τρία δεν συμβαίνει : $(A \cup B \cup \Gamma)^c = A^c \cap B^c \cap \Gamma^c$

<u>Ορισμός</u>: Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος. Σε κάθε ενδεχόμενο A του πειράματος αντιστοιχούμε μία ποσότητα $P(A)$, που ονομάζεται <u>πιθανότητα του A</u> και που έχει τις εξής ιδιότητες :

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$ γιά κάθε ενδεχόμενο A

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$

εφόσον τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους, δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall\, i \neq j$.

<u>Πρόταση</u>: $P(A^c) = 1 - P(A)$

<u>Απόδειξη</u>: $A \cup A^c = \Omega \Rightarrow P(A \cup A^c) = P(\Omega) \xRightarrow{(iii)\&(ii)} P(A) + P(A^c) = 1$ □

<u>Πρόταση</u>: $P(\emptyset) = 0$

<u>Απόδειξη</u>: Θέτοντας $A_2 = A_3 = \dots = \emptyset$ και εφαρμόζοντας την (iii) έχουμε

$$P(A_1 \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = P(A_1) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$\Rightarrow P(A_1) = P(A_1) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \Rightarrow P(\emptyset) = 0 \qquad \square$$

<u>Πρόταση</u>: Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

<u>Απόδειξη</u>: $B = A \cup (B \setminus A)$

$$\xRightarrow{(iii)} P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A). \qquad \square$$

<u>Πρόταση</u>: $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

<u>Απόδειξη</u>: $A \cup A^c = \Omega$

$$\Rightarrow B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup A^c) = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$$

$$\overset{(iii)}{\Rightarrow} \quad P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A^c) \qquad \square$$

Πρόταση: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

Απόδειξη: $A\cup B = A\cup(B\cap A^c)$

$$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B\cap A^c)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B). \qquad \square$$

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα A, B ενός πειράματος και έστω

$$P(A) = 1/2, \quad P(B) = 1/3, \quad P(A\cap B) = 1/6$$

(α) $P(\text{τουλάχιστον ένα ενδεχόμενο από τα } A, B \text{ συμβαίνει})$

$$= P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

(β) $P(\text{μόνο το } A \text{ συμβαίνει}) = P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

(γ) $P(\text{ούτε το } A \text{ ούτε το } B \text{ συμβαίνει}) = P(A^c\cap B^c) = P((A\cup B)^c)$

$$= 1 - P(A\cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(δ) $P(\text{το πολύ ένα συμβαίνει}) = P[(A\cap B)^c] = 1 - P(A\cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Πρόταση: Έστω δύο ενδεχόμενα A, B. Η πιθανότητα να συμβεί ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα A και B είναι ίση με $P(A) + P(B) - 2\cdot P(A\cap B)$.

Απόδειξη:

$P\{\text{να συμβεί ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα } A \text{ και } B\}$

$$= P[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)] = P(A\cap B^c) + P(A^c\cap B)$$

$$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - 2\cdot P(A\cap B) \qquad \square$$

Πειράματα με ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα

Έστω ότι ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ενός δειγματικού χώρου έχει την ιδιότητα

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}),$$

δηλαδή τα δυνατά του αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Αυτό συμβαίνει εν γένει στα πειράματα που σχετίζονται με τα τυχερά παιχνίδια. Έχουμε ότι:

$$1 = P(\Omega) = P[\{\omega_1, \dots, \omega_n\}] = P[\bigcup_{k=1}^{n} \{\omega_k\}] = \sum_{k=1}^{n} P[\{\omega_k\}] = n P[\{\omega_1\}]$$

$$\Rightarrow P[\{\omega_1\}] = 1/n$$

Συνεπώς: $P[\{\omega_1\}] = \dots = P[\{\omega_n\}] = \frac{1}{n} = \frac{1}{\#\Omega}$

Έστω $\underbrace{A}_{\text{ενδεχόμενο}} = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Τότε

$$P(A) = P[\{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}\}] = P[\{\omega_{i_1}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_k}\}] = \sum_{j=1}^{k} P[\{\omega_{i_j}\}]$$

$$= \frac{k}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Άρα: $\boxed{P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}}}$

Ο παραπάνω τύπος είναι σημαντικός με πολλές εφαρμογές. Παραθέτουμε παρακάτω μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα: Επιλέγουμε κατά τυχαίο τρόπο και χωρίς επανάθεση 5 χαρτιά από μία συνηθισμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Τότε:

$$P(\text{να επιλεγούν ακριβώς 2 Ρήγες}) = \frac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}$$

$$P(\text{να επιλεγεί κέντα}) = \frac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{9 \cdot 4^5}{\binom{52}{5}}$$

$$P(\text{να επιλεγεί φλος}) = \frac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{9 \cdot 4}{\binom{52}{5}}$$

Παράδειγμα: Ένα δοχείο περιέχει 6 άσπρους και 5 μαύρους βώλους. Εάν τραβήξουμε τυχαία δύο βώλους από το δοχείο, ποιά είναι η πιθανότητα (i) και οι δύο να είναι άσπροι; (ii) ένας άσπρος και ένας μαύρος;

<u>Απάντηση</u> : (i) $\dfrac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{\binom{6}{2}\binom{5}{0}}{\binom{11}{2}}$

(ii) $\dfrac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{1}}{\binom{11}{2}}$

<u>Πρόβλημα (των γενεθλίων)</u>: Έστω ότι υπάρχουν n άτομα σ' ένα δωμάτιο. Ποιά είναι η πιθανότητα να μη γιορτάζουν δύο απ' αυτά τα γενέθλιά τους την ίδια μέρα του χρόνου;

<u>Απάντηση</u>: $\dfrac{\#\text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\#\text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}$

Παρατηρούμε ότι αν $n \leqq 23$ το παραπάνω κλάσμα είναι $> \frac{1}{2}$

" " " $n \geqq 24$ " " " " $< \frac{1}{2}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω A, B ενδεχόμενα με $P(A) \neq 0$. Η <u>δεσμευμένη πιθανότητα</u> του B δοθέντος του A ορίζεται ως εξής:

$$P(B|A) := \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Ένα δοχείο περιέχει 15 Άσπρους, 10 Κίτρινους και 5 Μαύρους βώλους. Διαλέγουμε τυχαία ένα βώλο από το δοχείο. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι κίτρινος αν ξέρουμε ότι δεν είναι μαύρος;

<u>Απάντηση</u>: $P(K|M^c) = \dfrac{P(K\cap M^c)}{P(M^c)} = \dfrac{P(K)}{1-P(M)} = \dfrac{\frac{10}{30}}{1-\frac{5}{30}} = 0.4$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω μία οικογένεια με δύο παιδιά. Ο δειγματικός χώρος εδώ είναι

$$\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$$

όπου A σημαίνει "Αγόρι"

και B σημαίνει "Κορίτσι"

Το στοιχείο AK του Ω σημαίνει ότι το μεγαλύτερο παιδί είναι αγόρι και το μικρότερο κορίτσι. Θεωρώ τα εξής ενδεχόμενα:

B = "παιδιά του ιδίου φύλου" = $\{AA, KK\}$

Γ = "τουλάχιστον ένα αγόρι" = $\{AA, AK, KA\}$

Υποθέτουμε ότι: $P[\{A,A\}] = P[\{A,K\}] = P[\{K,A\}] = P[\{K,K\}] = \frac{1}{4}$

Τότε:

$$P(B|\Gamma) = \frac{P(B\cap\Gamma)}{P(\Gamma)} = \frac{P[\{AA\}]}{P[\{AA, AK, KA\}]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Πολλαπλασιαστικό Θεώρημα

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = P(A_1\cap\dots\cap A_n)$$
$$= P(A_n|A_1\cap\dots\cap A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\cap\dots\cap A_{n-2})\dots P(A_2|A_1)P(A_1)$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n

Εφαρμογή: Έστω δοχείο με 5 Μαύρες, 3 Κόκκινες και 2 Λευκές σφαίρες. Αποσύρουμε 4 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση. Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

A_1: το 1º σφαιρίδιο είναι μαύρο
A_2: " 2º " " κόκκινο
A_3: " 3º " " λευκό
A_4: " 4º " " μαύρο

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)P(A_3|A_1\cap A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$P(A_1) = \frac{5}{10}$ $\quad P(A_2|A_1) = \frac{3}{9}$ $\quad P(A_3|A_1\cap A_2) = \frac{2}{8}$ $\quad P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3) = \frac{4}{7}$

Το παρακάτω θεώρημα το οποίο είναι γνωστό ως Θεώρημα της ολικής πιθανότητας είναι σημαντικότατο με ποικίλες εφαρμογές.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π.)

Έστω A_j, $j=1,\dots,n$ ασυμβίβαστα (δηλαδή ξένα ανά δύο μεταξύ τους) ενδεχόμενα τέτοια ώστε $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Έστω B ένα ενδεχόμενο. Τότε:

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)$$

Απόδειξη: $P(B) = P(B\cap\Omega) = P\left[B\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right]$

$$= P\left[\bigcup_{j=1}^{n}(B\cap A_j)\right] = \sum_{j=1}^{n} P(B\cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j) \quad \square$$

Παράδειγμα: Ένα αεροπλάνο συνετρίβη σε μία περιοχή που αποτελείται από Δάσος (Δ), Βουνό (Β) και Θάλασσα (Θ) με αντίστοιχη πιθανότητες:

$$P(\text{συντριβή σε } \Delta) = P(\Delta) = 0.1$$
$$P(\quad '' \quad '' \quad \Theta) = P(\Theta) = 0.3$$
$$P(\quad '' \quad '' \quad B) = P(B) = 0.6$$

Έστω E το ενδεχόμενο να βρεθεί το αεροπλάνο. Γνωρίζουμε ότι

$$P(E|B) = \frac{3}{4}, \quad P(E|\Theta) = \frac{1}{5} \quad P(E|\Delta) = \frac{1}{2}$$

Από το Θεώρημα Ολικής πιθανότητας έπεται ότι η πιθανότητα εύρεσης του αεροπλάνου είναι ίση με:

$$P(E) = P(E|B)P(B) + P(E|\Theta)P(\Theta) + P(E|\Delta)P(\Delta)$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{5}\,\frac{3}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = 0.56 \quad \square$$

Το παρακάτω Θεώρημα που είναι γνωστό ως Θεώρημα Bayes είναι σημαντικότατο με ποικίλες εφαρμογές. Αποτελεί τη βάση της Στατιστικής κατά Bayes.

Θεώρημα του Bayes

Έστω A_j, $j=1,\dots,n$ ασυμβίβαστα ενδεχόμενα τέτοια ώστε $\Omega=\bigcup_{j=1}^{n} A_j$.
Τότε ισχύει:

$$P(A_j|B)=\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}$$

Απόδειξη:

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j\cap B)}{P(B)}\overset{\Theta.\text{O}.\Pi.}{=}\frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)} \quad \square$$

Παράδειγμα: Μία ασφαλιστική εταιρία χαρακτηρίζει τους πελάτες της ως Ασφαλείς (A), Μέτριους (M) και Κακούς (K) με αντίστοιχες πιθανότητες: $P(A)=0.2$, $P(M)=0.5$, $P(K)=0.3$
Έστω E το ενδεχόμενο να έχει κάποιος ατύχημα κατά τη διάρκεια ενός έτους. Γνωρίζουμε ότι

$$P(E|A)=0.05$$
$$P(E|M)=0.15$$
$$P(E|K)=0.3$$

Ζητάμε να βρούμε τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|E^c)$.

Απάντηση: Αφού τα ενδεχόμενα A, M, K είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους ισούται με το δειγματικό χώρο, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Bayes έχουμε ότι:

$$P(A|E^c)=\frac{P(E^c|A)P(A)}{P(E^c|A)P(A)+P(E^c|M)P(M)+P(E^c|K)P(K)}$$

$$=\frac{0.95\times 0.2}{0.95\times 0.2+0.85\times 0.5+0.7\times 0.3}=\frac{38}{165}\doteq 0.23 \quad \square$$

Παράδειγμα: Είναι γνωστό ότι το 5‰ του πληθυσμού έχει μία ασθένεια A, δηλαδή $P(A) = \frac{5}{1000}$. Για τη διάγνωση της ασθένειας έχει επινοηθεί ένα ιατρικό τεστ, το οποίο βγαίνει θετικό σωστά με πιθανότητα 0.95 και λάθος με πιθανότητα 0.01, δηλαδή

$$P(\Theta|A) = 0.95 \quad \text{και} \quad P(\Theta|A^c) = 0.01$$

Δεδομένου ότι γιά ένα συγκεκριμένο άτομο το τεστ βγαίνει θετικό, ποιά είναι η πιθανότητα να έχει το άτομο την ασθένεια;

Απάντηση: $$P(A|\Theta) \overset{\Theta.\,Bayes}{=\!=} \frac{P(\Theta|A)P(A)}{P(\Theta|A)P(A)+P(\Theta|A^c)P(A^c)}$$

$$= \frac{0.95\times 0.005}{0.95\times 0.005+0.01\times 0995} = 0.3231 \quad \square$$

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι 5 άνδρες στους 100 και 25 γυναίκες στις 1000 έχουν δυσχρωματοψία. Διαλέγουμε τυχαία έναν άνθρωπο που έχει δυσχρωματοψία. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι άνδρας; (Υποθέτουμε ότι ο συνολικός αριθμός των ανδρών είναι ίσος με τον συνολικό αριθμό των γυναικών).

Απάντηση:

A_1 = "άνδρας"

A_2 = "γυναίκα"

A = "δυσχρωματοψία"

Προφανώς: $\Omega = A_1 \cup A_2$ και $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(A_1|A) = \frac{P(A_1)P(A|A_1)}{P(A_1)P(A|A_1)+P(A_2)P(A|A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{1000}} = \frac{20}{21}$$

Ζητούμενη ποσότητα

$\square$

Παράδειγμα: Οι Έλληνες αποτελούν το 75% του πληθυσμού της Λευκωσίας και οι Τούρκοι το υπόλοιπο 25%. 20% από τους Έλληνες μιλούν Αγγλικά και 10% από τους Τούρκους μιλούν Αγγλικά. Ένας επισκέπτης της πόλης συναντά κάποιον ο οποίος ομιλεί Αγγλικά. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι αυτό το άτομο Έλληνας;

Απάντηση: Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\left.\begin{array}{l} E: \text{Έλληνας} \\ T: \text{Τούρκος} \end{array}\right\} \text{ασυμβίβαστα}$$

A: ομιλά Αγγλικά

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$\underbrace{P(E|A)}_{\text{Ζητούμενη ποσότητα}} = \frac{P(A|E)P(E)}{P(A|E)P(E)+P(A|T)P(T)} = \frac{0.75\times 0.20}{0.75\times0.20+0.25\times0.10} \doteq 0.857 \quad \square$$

Το επόμενο πρόβλημα σχετίζεται με την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας:

Πρόβλημα: Ρίχνει κάποιος δύο αμερόληπτα ζάρια και αναγγέλει ότι έφερε γινόμενο 12. Ποιά είναι η πιθανότητα να έφερε δύο άρτιους αριθμούς;

Απάντηση:

$$P(\text{δύο άρτιοι}\,|\,\text{γινόμενο } 12) = \frac{P(\text{δύο άρτιοι \& γινόμενο } 12)}{P(\text{γινόμενο } 12)}$$

$$= \frac{P[\{(2,6),(6,2)\}]}{P[\{(2,6),(6,2),(4,3),(3,4)\}]} = \frac{2/36}{4/36} = \frac{1}{2} \quad \square$$

Το επόμενο πρόβλημα σχετίζεται με τον τύπο της σελ. 14

Πρόβλημα: Από μία συνηθισμένη τράπουλα που αποτελείται από 52 χαρτιά επιλέγουμε κατά τυχαίο τρόπο και χωρίς επανάθεση πέντε χαρτιά. Ποιά είναι η πιθανότητα να υπάρχουν ανάμεσα στα πέντε χαρτιά ακριβώς δύο σπαθιά και τουλάχιστον δύο κούπες;

Απάντηση:

P(ακριβώς δύο σπαθιά και τουλάχιστον δύο κούπες)

$= P$[(ακριβώς δύο σπαθιά & ακριβώς δύο κούπες) ή (ακριβώς δύο σπαθιά & ακριβώς τρεις κούπες)]

$= P$(ακριβώς δύο σπαθιά & ακριβώς δύο κούπες) $+ P$(ακριβώς δύο σπαθιά & ακριβώς τρεις κούπες)

$$= \frac{\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{26}{1}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{13}{2}\binom{13}{3}}{\binom{52}{5}} \quad \square$$

Η έννοια της ανεξαρτησίας, που ορίζεται παρακάτω, είναι θεμελιώδης στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Ορισμός: Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ανεξάρτητα αν
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Από τον παραπάνω ορισμό, αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα προκύπτει ότι:
$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου A δεν επηρεάζεται από το αν συνέβη ή όχι το ενδεχόμενο B.

Πρόταση: Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα τότε και τα ενδεχόμενα A, B^c είναι ανεξάρτητα.

Απόδειξη:
$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &\overset{A,B \text{ ανεξ.}}{=} P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(B^c) \quad \square \end{aligned}$$

Η ανεξαρτησία τριών ενδεχομένων ορίζεται ως εξής:

Ορισμός: Τα ενδεχόμενα A, B, Γ λέγονται ανεξάρτητα αν

$$P(A\cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(B\cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma)$$
$$P(\Gamma\cap A) = P(\Gamma)P(A)$$
$$P(A\cap B\cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$$

Κατ' ανάλογο τρόπο ορίζεται η ανεξαρτησία τεσσάρων, πέντε, κλπ. ενδεχομένων.

Πρόταση: Αν τα ενδεχόμενα A, B, Γ είναι ανεξάρτητα τότε και τα A και $B\cup\Gamma$ είναι ανεξάρτητα.

Απόδειξη:
$$\begin{aligned} P[A\cap(B\cup\Gamma)] &= P[(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)] \\ &= P(A\cap B)+P(A\cap\Gamma)-P(A\cap B\cap\Gamma) \\ &\overset{A,B,\Gamma \text{ ανεξ.}}{=} P(A)P(B)+P(A)P(\Gamma)-P(A)P(B)P(\Gamma) \\ &= P(A)[P(B)+P(\Gamma)-P(B)P(\Gamma)] \\ &= P(A)[P(B)+P(\Gamma)-P(B\cap\Gamma)] \\ &= P(A)P(B\cup\Gamma) \end{aligned}$$ □

Παράδειγμα: Έστω οικογένεια με δύο παιδιά. Ο δειγματικός χώρος είναι
$\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$ (A σημαίνει αγόρι, K σημαίνει κορίτσι).

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A_1: παιδιά και των δύο φύλων

A_2: το μεγαλύτερο παιδί είναι αγόρι

$$A_1 = \{AK, KA\}$$
$$A_2 = \{AA, AK\}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P[\{AK\}] = \frac{1}{4}$$

Άρα: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$

Επομένως τα ενδεχόμενα A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητα. □

Παράδειγμα: Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: το άθροισμα των δύο ζαριών είναι 7

B: το πρώτο ζάρι είναι 1

Είναι τα ενδεχόμενα A, B ανεξάρτητα;

Απάντηση: $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

$A \cap B = \{(1,6)\}$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \qquad P(A) = P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Άρα, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ και, συνεπώς, τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα

□

Παράδειγμα: Από μία κοινή τράπουλα διαλέγουμε μία κάρτα στην τύχη.

Έστω τα ενδεχόμενα:

A = η κάρτα είναι Άσσος

B = " " " Καρρό

Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Απάντηση: $P(A) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52}$

$P(A \cap B) = P[\{\text{άσσος καρρό}\}] = \frac{1}{52} = P(A)P(B)$. Άρα τα ενδεχόμενα

A, B είναι ανεξάρτητα. $\square$

Εισάγουμε παρακάτω την έννοια της ανεξαρτησίας πειραμάτων.

<u>Ορισμός</u>: Έστω πείραμα Π που αποτελείται από τα υποπειράματα $\Pi_1, \dots, \Pi_k$. Λέμε ότι τα $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ είναι <u>ανεξάρτητα</u> αν τα οποιαδήποτε ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_k$ που αντιστοιχούν στα $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ είναι ανεξάρτητα.

<u>Πρόβλημα</u> (του Chevalier de Méré)

Θεωρούμε τα εξής πειράματα:

<u>Πείραμα 1</u>: Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 4 ανεξάρτητες φορές και έστω $E_i = \{\text{το } i \text{ ζάρι είναι άσσος}\}$, $i = 1,2,3,4$.

<u>Πείραμα 2</u>: Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια 24 ανεξάρτητες φορές και έστω:

$$A_i = \{\text{η } i \text{ ζαριά έφερε διπλό άσσο}\} \quad i = 1, \dots, 24$$

Το πρόβλημα είναι αν ισχύει $p = q$ όπου $p = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)$ και $q = P\left(\bigcup_{i=1}^{24} A_i\right)$.

<u>Απάντηση</u>:

$$p = P\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right) = 1 - P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{4} E_i\right)^c\right] = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} E_i^c\right)$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{4} P(E_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{4} \left(1 - P(E_i)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{4} \left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \doteq 0.517747$$

$$q = P\left(\bigcup_{i=1}^{24} A_i\right) = 1 - P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{24} A_i\right)^c\right] = 1 - P\left[\bigcap_{i=1}^{24} A_i^c\right]$$

$$\stackrel{\text{ανεξ.}}{=} 1-\prod_{i=1}^{24}\left[1-P(A_i)\right] = 1-\prod_{i=1}^{24}\frac{35}{36} = 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \doteq 0.491404$$

Συνεπώς: $p > \frac{q}{2}$ □

Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω ότι εκτελούμε ένα πείραμα και έστω Ω ο δειγματικός χώρος, δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών του αποτελεσμάτων.

Παραδείγματα:

1. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Εδώ, $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\dots,6\}$

2. Ρίχνουμε ένα νόμισμα n φορές. Εδώ

$$\Omega = \{\underbrace{KK\dots K}_{\leftarrow n \text{ στοιχεία} \rightarrow},\ \Gamma K\dots K,\ K\Gamma K\dots K, \dots, \Gamma\Gamma\Gamma\dots\Gamma\}$$

3. Αγοράζουμε μία λάμπα. Την ανάβουμε και μετράμε τον χρόνο μέχρι να καεί. Εδώ,

$$\Omega = \text{όλοι οι θετικοί αριθμοί} = (0, +\infty)$$

Αν σε κάθε αποτέλεσμα ω του πειράματος αντιστοιχίσουμε έναν αριθμό τότε έχουμε ορίσει μία <u>τυχαία μεταβλητή</u>. Δηλαδή, τυχαία μεταβλητή X είναι μία συνάρτηση

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Omega \ni \omega \longmapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$$

Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής είναι θεμελιώδης στη Θεωρία Πιθανοτήτων. Δίνουμε παρακάτω τρία παραδείγματα τυχαίων μεταβλητών που αντιστοιχούν στα προαναφερθέντα πειράματα

Παραδείγματα

1. Έστω ότι ρίχνουμε δύο ζάρια. Εδώ, $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\dots,6\}$

   Ορίζουμε:

$$X(i,j) = i + j$$

Εδώ η τυχαία μεταβλητή εκφράζει το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών.

2. Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα n φορές. Ορίζουμε

$$X = \# \text{ εμφανιζομένων κορώνων}$$

$\# \to$ αριθμός

3. Ανάβουμε μία λάμπα. Έστω X = χρόνος ζωής της λάμπας

<u>Παρατήρηση:</u> Στα Παραδείγματα (1), (2) οι τυχαίες μεταβλητές παίρνουν ακέραιες τιμές. Τέτοιου τύπου τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται <u>διακριτές</u>. Στο Παράδειγμα (3) η τυχαία μεταβλητή παίρνει τιμές σ' ένα διάστημα πραγματικών αριθμών. Τέτοιες τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται <u>συνεχείς</u>. Σχηματικά, λοιπόν, έχουμε την εξής διάκριση:

<u>Τυχαίες Μεταβλητές</u> → <u>Διακριτές</u>, <u>Συνεχείς</u>

→ Οι <u>διακριτές τ.μ.</u> χαρακτηρίζονται από τη <u>συνάρτηση μάζας πιθανότητας</u> (σ.μ.π.) που ορίζεται ως εξής:

$$P(X = x), \text{ όπου } x \text{ είναι μία δυνατή τιμή της } X$$

Προφανώς ισχύει ότι $\sum_x P(X=x) = 1$

→ Οι <u>συνεχείς</u> τ.μ. χαρακτηρίζονται από μία θετική συνάρτηση $f(\cdot)$ που ονομάζεται <u>πυκνότητα</u> της X και έχει τις εξής ιδιότητες

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

και

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx \qquad (*)$$

όπου B είναι ένα διάστημα πραγματικών αριθμών.

Αν $B=[\alpha,\beta]$ όπου α,β είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha<\beta$, τότε βάσει της $(*)$ έχουμε

$$P[X\in[\alpha,\beta]] = P[\alpha \leq X \leq \beta] = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Αν $B=[\alpha,\alpha]$, τότε βάσει της $(*)$ έχουμε

$$P[X\in[\alpha,\alpha]] = P[X=\alpha] = \int_\alpha^\alpha f(x)dx = 0$$

Η πιθανότητα δηλαδή να πάρει μία συνεχής τυχαία μεταβλητή μία συγκεκριμένη τιμή είναι ίση με μηδέν.

<u>Σημαντική Παρατήρηση:</u> Μία διακριτή τ.μ. X ή μία συνεχής τ.μ. X προσδιορίζεται πλήρως από τη <u>συνάρτηση κατανομής</u> της, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_X(x) = P(X \leq x),\ x\in\mathbb{R}$$

Ισχύει για συνεχείς τ.μ. ότι

$$F_X'(x) = f(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Θα παραθέσουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα διακριτών και συνεχών τ.μ.

Παραδείγματα διακριτών τ.μ. (κατανομών)

1. Διωνυμική τ.μ. (κατανομή)

Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα n ανεξάρτητες φορές. Έστω ότι η πιθανότητα εμφάνισης κορώνα σε μία ρίψη είναι ίση με p. Ορίζομε

$$X := \#\text{ εμφανιζομένων κορώνων στις } n \text{ ρίψεις}$$

Προφανώς, $X \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Θα βρούμε τώρα τη σ.μ.π. της X

$$P(X=k) = P(\text{να έχουμε } k \text{ κορώνες και } n-k \text{ γράμματα})$$

$$= P\Big(\text{να έχουμε την εξής σειρά αποτελεσμάτων } \underbrace{KK\ldots K}_{k}\underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n-k} \text{ ή } K\Gamma K\ldots K\Gamma\Gamma\ldots\Gamma \text{ ή } \ldots \text{ ή } \underbrace{\Gamma\Gamma\ldots\Gamma}_{n-k}\underbrace{KK\ldots K}_{k}\Big)$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

↳ αυτή είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X

Προφανώς,

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με n δοκιμές και πιθανότητα επιτυχίας p και γράφουμε:

$$\underset{\text{ακολουθεί}}{X \sim} \text{Διωνυμική}(\underset{\text{αριθμός δοκιμών}}{n}, \overset{\text{πιθανότητα επιτυχίας}}{p})$$

Παράδειγμα: Μία πόλη έχει 1000 σπίτια. Κατά τη διάρκεια ενός χρόνου η πιθανότητα να διαρρηχθεί οποιοδήποτε από αυτά είναι $1‰$. Βρείτε την πιθανότητα να γίνουν κατά τη διάρκεια ενός έτους σ' αυτή την πόλη

(α) ακριβώς δύο διαρρήξεις.

(β) τουλάχιστον " " .

Απάντηση: Έστω $X := \#$ διαρρήξεων κατά τη διάρκεια ενός χρόνου.

$$X \sim \text{Διωνυμική}\left(1000, \frac{1}{1000}\right)$$

(α) $$P(X=2) = \binom{1000}{2}\left(\frac{1}{1000}\right)^2\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000-2}$$

(β) $$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$
$$= 1 - \binom{1000}{0}p^0(1-p)^{1000} - \binom{1000}{1}p^1(1-p)^{999} \quad \square$$

Παράδειγμα: Γνωρίζουμε η πιθανότητα αποτυχίας στις εξετάσεις γιά δίπλωμα οδηγού είναι $\frac{1}{4}$. Έστω

$$X := \# \text{ αποτυχόντων από τους } 25 \text{ εξετασθέντες}$$

$$X \sim \text{Διωνυμική}(25, 0.25)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{25}{0}(0.25)^0(1-0.25)^{25} = 0.9992$$

$$P(X \leq 20) = \sum_{k=0}^{20}\binom{25}{k}(0.25)^k(1-0.25)^{25-k} \approx 1.$$

2. Poisson τ.μ. (κατανομή)

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$

αν οι δυνατές τιμές της είναι 0, 1, 2, ... και η συνάρτηση μάζας πιθανότητάς της δίνεται από τη σχέση:

$$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x=0,1,\ldots$$

Προφανώς, $\sum_{x=0}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

Γράφουμε $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

"η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ."

Η κατανομή Poisson χρησιμοποιείται όταν μας ενδιαφέρει ο αριθμός των γεγονότων που συμβαίνουν σ' ένα χρονικό διάστημα.

Παραδείγματα: # τροχαίων ατυχημάτων κατά το Σαββατοκύριακο.
σεισμών κατά τη διάρκεια του χειμώνα
σωματιδίων που εκπέμπει μία ραδιενεργός πηγή σ' ένα χρονικό διάστημα.

Παράδειγμα:
Έστω ότι X = # σεισμών στην Ελλάδα ανά εβδομάδα ~ Poisson(3)
Ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε δύο σεισμούς στην Ελλάδα αυτήν την εβδομάδα;

Απάντηση:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$$
$$= 1 - P(X=0) - P(X=1)$$
$$= 1 - e^{-3}\frac{3^0}{0!} - e^{-3}\frac{3^1}{1!} = 1 - 4e^{-3} \approx 0.8$$

3. Υπεργεωμετρική τ.μ. (Κατανομή)

Έστω ότι έχουμε m Λευκά και n Κόκκινα σφαιρίδια σ' ένα δοχείο. Ανασύρουμε κατά τυχαίο τρόπο r σφαιρίδια. Έστω

$X :=$ # Λευκών σφαιριδίων ανάμεσα στα r

$$X \in \{0, 1, \ldots, k\} \quad \text{όπου} \quad k = \min\{r, n\}.$$

Λέμε ότι η τ.μ. Y ακολουθεί την Υπεργεωμετρική Κατανομή # συνάρτηση μάζας πιθανότητας της X έχει τύπο:

$$P(X = x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{r-x}}{\binom{m+n}{r}} \qquad x = 0, 1, \ldots, k$$

Παράδειγμα: Τύποι αίματος ενός ανθρώπου: O, A, B, AB

Έστω ότι έχουμε 100 άτομα από τα οποία 45 έχουν τύπο O. 20 άτομα επιλέγονται κατά τυχαίο τρόπο. Ορίζομε

$X :=$ # ατόμων απο τα 20 που έχουν τύπο αίματος O

Τότε:
$$P(X = 8) = \frac{\binom{45}{8}\binom{55}{12}}{\binom{100}{20}} = 0.719$$

4. Γεωμετρική τ.μ. (Κατανομή)

Εκτελούμε ρίψεις ενός νομίσματος. Οι ρίψεις θεωρούνται ανεξάρτητες και η πιθανότητα εμφάνισης κορώνας σε μία ρίψη είναι ίση με $p > 0$. # εμφάνιση κορώνας θεωρείται επιτυχία. Έστω

$X :=$ # ρίψεων μέχρι την εμφάνιση κορώνας γιά 1η φορά

$X \in \{1,2,\dots\}$

Λέμε ότι η διακριτή τ.μ. X ακολουθεί την Γεωμετρική Κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p. Η σ.μ.π. της X δίνεται από τον τύπο:

$$P(X=x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x=1,2,\dots$$

Πράγματι,

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X=x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

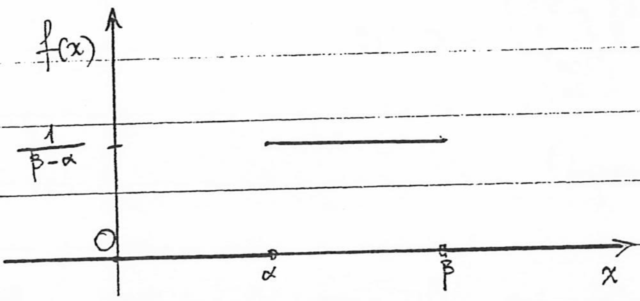
Γιά να δηλώσουμε ότι η X ακολουθεί τη Γεωμετρική Κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p γράφουμε: $X \sim$ Γεωμετρική (p).

Παραδείγματα συνεχών τυχαίων μεταβλητών (κατανομών)

1. Ομοιόμορφη τ.μ. (κατανομή) στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Λέμε ότι η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ (και γράφουμε $X \sim$ Ομοιόμορφη(α,β)) όταν η πυκνότητα της X δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Η $f(x)$ είναι πράγματι πυκνότητα διότι

1ον] είναι μη αρνητική και

2ον] $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} \cancelto{0}{f(x)}dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{+\infty} \cancelto{0}{f(x)}dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\beta-\alpha}dx = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha} = 1.$$

Παράδειγμα: Υποθέτουμε ότι η ώρα άφιξης X του λεωφορείου σε μία ορισμένη στάση ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο χρονικό διάστημα $8^{3/4}$ με $9^{1/4}$ το πρωί. Αν φτάσετε σ' αυτή τη στάση στις 9 π.μ. ακριβώς ποιά είναι η πιθανότητα

(α) να χάσετε το λεωφορείο;

Απάντηση:

Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $P(X<9)$ όπου

$$X \sim \text{Ομοιόμορφη}(8^{3/4}, 9^{1/4})$$

↳ ώρα άφιξης του λεωφορείου

Έχουμε: $$P(X<9) = \int_{-\infty}^{9} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{8^{3/4}} \cancelto{0}{f_X(x)dx} + \int_{8^{3/4}}^{9} f_X(x)dx$$

$$= \int_{8^{3/4}}^{9} \frac{1}{9^{1/4}-8^{3/4}}dx = \frac{9-8^{3/4}}{9^{1/4}-8^{3/4}} = \frac{1}{2}.$$

(β) να περιμένετε ακριβώς 5 λεπτά;

Απάντηση:

$$P(X=9^{1/12})=0.$$

(γ) να περιμένετε το πολύ 5 λεπτά;

Απάντηση:

$$P(9 \leq X \leq 9^{1/12}) = \int_{9}^{9^{1/12}} \frac{1}{9^{1/4}-8^{3/4}}dx = \frac{9^{1/12}-9}{9^{1/4}-8^{3/4}} = \frac{1/12}{1/2}$$

$$= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

(δ) να περιμένετε τουλάχιστον 5 λεπτά;

Απάντηση:

$$P(X \geq 9^{1/12}) = 1-P(X<9^{1/12}) = 1-\int_{8^{3/4}}^{9^{1/12}} \frac{1}{9^{1/4}-8^{3/4}}dx$$

$$= 1-\frac{9^{1/12}-8^{3/4}}{9^{1/4}-8^{3/4}} = \frac{1}{3}$$

2. Εκθετική τ.μ. (κατανομή)

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ και γράφουμε

$$X \sim \text{Εκθετική}(\lambda)$$

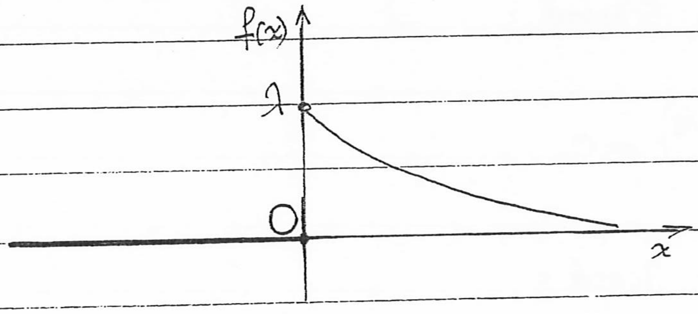
αν η πυκνότητά της έχει τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αν } x>0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι πράγματι πυκνότητα διότι είναι μη αρνητική και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = 0-(-e^{-\lambda 0}) = 1$$

Η γραφική παράσταση της $f(x)$ δίνεται παρακάτω.



Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα της Εκθετικής κατανομής είναι ότι δεν έχει μνήμη, δηλαδή,

$$P(X>r+t \mid X>r) = P(X>t), \qquad r,t>0 \qquad (*)$$

Απόδειξη της $(*)$:

$$P(X>r+t \mid X>r) = \frac{P(X>r+t, X>r)}{P(X>r)} = \frac{P(X>r+t)}{P(X>r)}$$

$$= \frac{\int_{r+t}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx}{\int_{r}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx} = \frac{e^{-\lambda(r+t)}}{e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda t} = \int_{t}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = P(X>t).$$

Παράδειγμα: Ο χρόνος ζωής ενός ανθρώπου ακολουθεί την Εκθετική Κατανομή $(\lambda = \frac{1}{75})$.
Βρείτε την πιθανότητα να ζήσει αυτός ο άνθρωπος

(α) το πολύ 70 χρόνια;

Έστω X = χρόνος ζωής του ανθρώπου

$X \sim$ Εκθετική$(\frac{1}{75})$

$$P(X \leq 70) = \int_0^{70} \frac{1}{75} e^{-\frac{70}{75}x} dx = 1 - e^{-\frac{70}{75}} \simeq 0.61$$

(β) ακριβώς 70 χρόνια; $P(X=70) = 0.$

(γ) τουλάχιστον 70 χρόνια; $P(X \geq 70) = 1 - P(X<70) = 0.39$

(δ) πάνω από 70 χρόνια αν είναι τώρα 30 χρονών;

$$P(X>70|X>30) = P(X>40+30|X>30) = P(X>40)$$
$$= 1 - P(X \leq 40) = 1 - \int_0^{40} \frac{1}{75} e^{-\frac{1}{75}x} dx$$
$$= e^{-\frac{40}{75}} \simeq 0.59.$$

3. Κανονική τ.μ. (Κατανομή)

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή ή την κατανομή Gauss με παραμέτρους μ και σ^2 και γράφουμε

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 > 0,$$

αν η πυκνότητα της X έχει τύπο:

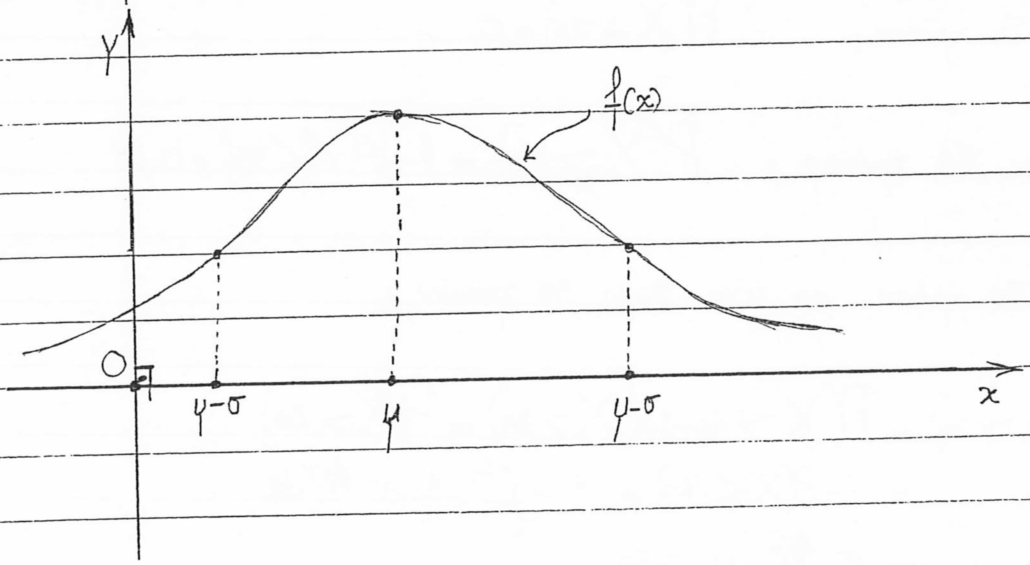
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η $f(x)$ είναι συμμετρική γύρω από το μ διότι

$$f(x+\mu) = f(-x+\mu), \quad x \in \mathbb{R}$$

Επίσης
$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x) = 0 \iff x = \mu$$
$$f''(x) = \frac{1}{\sigma^2}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - 1\right] f(x) = 0 \iff x = \mu \pm \sigma$$
$$f''(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\left(-f(\mu)\right) < 0$$

Στο σημείο $x=\mu$ η $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο και τα σημεία $x = \mu \pm \sigma$ είναι σημεία καμπής. Η γραφική παράσταση της $f(x)$ δίνεται παρακάτω:



Η παραπάνω καμπύλη παρατηρούμε ότι έχει ένα κωδωνοειδές σχήμα.

Αποδεικνύεται ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, δηλαδή το εμβαδό του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη και στον άξονα των x είναι ίσο με 1. Η συνάρτηση κατανομής $F_X(\cdot)$ της $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ έχει τύπο:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή.

Όμως, αν $X \sim N(0,1)$, δηλαδή αν $\mu=0$ & $\sigma^2=1$ η συνάρτηση κατανομής της X (που σ' αυτήν την περίπτωση συμβολίζεται με $\Phi(\cdot)$) θεωρείται γνωστή διότι έχουν πινακοποιηθεί οι τιμές της. Δηλαδή γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε την τιμή της

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

χρησιμοποιώντας κάποιους πίνακες.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $X \sim N(0,1)$, τότε λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

<u>Σημείωση</u>: Ισχύει ότι $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$

<u>Πρόταση</u>: Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

<u>Απόδειξη</u>: Η συνάρτηση κατανομής της Z δίνεται από τη σχέση:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z\right) = P(X \leq \sigma z + \mu) = F_X(\sigma z + \mu)$$

Άρα η πυκνότητα της Z έχει τύπο:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz} F_X(\sigma z + \mu) = \sigma f_X(\sigma z + \mu)$$

$$= \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma z + \cancel{\mu} - \cancel{\mu}}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}$$

αυτή είναι η πυκνότητα της $N(0,1)$.

Άρα $Z \sim N(0,1)$

<u>Εφαρμογή</u>: Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ βρείτε την πιθανότητα $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$.

Απάντηση:

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -1\right)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1-\Phi(1)]$$

$$= \underbrace{2\cdot\Phi(1) - 1 = 2\times 0.84}_{\text{βάσει πινάκων}} - 1 = 0.68$$

Μέση Τιμή και Διασπορά Τυχαίων Μεταβλητών

Ορισμός: Η μέση τιμή (ή αναμενόμενη τιμή) μιάς τ.μ. X ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}X = \begin{cases} \sum_x x\cdot P(X=x), & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx, & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής με πυκνότητα } f_X(x). \end{cases}$$

Παράδειγμα: Σ' ένα διαγώνισμα πολλαπλής επιλογής δίνονται δύο προβλήματα με 3 απαντήσεις στο ένα και 5 απαντήσεις στο άλλο. Ένας μαθητής διαλέγει τυχαία μία απάντηση ως σωστή σε κάθε πρόβλημα. Να βρεθεί η μέση τιμή του αριθμού των σωστών απαντήσεων X του μαθητή.

Απάντηση: $X \in \{0,1,2\}$ διακριτή τ.μ.

$$P(X=0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3}\times\frac{4}{5} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{6}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Συνεπώς, $\mathbb{E}X = \sum_{x=0}^{2} x\cdot P(X=x) = 0\cdot P(X=0) + 1\cdot P(X=1) + 2\cdot P(X=2) = \frac{8}{15}$ □

Πρόβλημα: Έστω $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Βρείτε τη μέση τιμή της X.

Απάντηση: $$\mathbb{E}X = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \, \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \overset{Y=x-1}{=\!=} e^{-\lambda}\lambda \sum_{Y=0}^{\infty} \frac{\lambda^Y}{Y!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda. \quad \square$$

Πρόβλημα: Αν $X \sim$ Διωνυμική(n,p) βρείτε τη μέση τιμή της X.

Απάντηση:

$$\mathbb{E}X = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1}(1-p)^{n-x}$$

$$\overset{Y=x-1}{=\!=} np \sum_{Y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{Y!(n-1-Y)!} p^Y (1-p)^{n-1-Y} = np \sum_{Y=0}^{n-1} \binom{n-1}{Y} p^Y (1-p)^{n-1-Y}$$

$$= np\left[p + (1-p)\right]^{n-1} = np \quad \square$$

Εφαρμογή: Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα 10 ανεξάρτητες φορές. Η πιθανότητα εμφάνισης της κορώνας είναι ίση με 0.4. Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός των εμφανιζομένων κορώνων;

Απάντηση:

Έστω $X :=$ # εμφανιζομένων κορώνων στις 10 ρίψεις

$X \sim$ Διωνυμική $(10, 0.4)$

$$\mathbb{E}X = 10 \times 0.4 = 4$$

Πρόβλημα: Αν $X \sim$ Ομοιόμορφη (α, β) βρείτε την $\mathbb{E}X$

Απάντηση:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{a}^{\beta} \frac{x\,dx}{\beta-a} = \frac{1}{\beta-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^{\beta} = \frac{\beta^2-a^2}{2}\cdot\frac{1}{\beta-a}$$

$$= \frac{a+\beta}{2}.$$

Εφαρμογή: Έστω ότι η ώρα άφιξης ενός λεωφορείου ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο χρονικό διάστημα 9 παρά τέταρτο με 9 και τέταρτο. Ποιός είναι ο αναμενόμενος χρόνος άφιξης του λεωφορείου;

Απάντηση: $\mathbb{E}X = \dfrac{8^{3/4} + 9^{1/4}}{2} = 9$

Πρόβλημα: Αν $X \sim$ Εκθετική (λ), $\lambda > 0$ βρείτε την $\mathbb{E}X$

Απάντηση: $\mathbb{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$

Εφαρμογή: Ο χρόνος ζωής (σε έτη) ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{5}$. Ποιός είναι ο αναμενόμενος χρόνος ζωής του ηλεκτρικού λαμπτήρα;

Απάντηση: Ο χρόνος ζωής X του ηλεκτρικού λαμπτήρα $\sim$ Εκθετική$(\frac{1}{5})$

Άρα: $\mathbb{E}X = \dfrac{1}{1/5} = 5$ έτη

Πρόβλημα: Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ βρείτε την $\mathbb{E}X$

Απάντηση: $\mathbb{E}X = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx = \mu$

Σημείωση: Η μέση τιμή $\mathbb{E}X$ μιάς τ.μ. X είναι ένα μέτρο της "πιθανότερης τιμής" της X.

Ορισμός: Η μέση τιμή μιάς συνάρτησης $g(X)$ της τ.μ. X ορίζεται ως εξής:

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \begin{cases} \sum_x g(x)\cdot P(X=x), & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx, & \text{αν η τ.μ. } X \text{ είναι συνεχής με πυκνότητα } f_X(x). \end{cases}$$

Ορισμός: Η διασπορά ΔX μιάς τ.μ. X ορίζεται ως εξής

$$\Delta X = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \begin{cases} \sum_x (x-\mathbb{E}X)\cdot P(X=x), & \text{αν } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mathbb{E}X)^2 f_X(x)dx, & \text{αν η } X \text{ είναι συνεχής.} \end{cases}$$

Ορισμός: Η τυπική απόκλιση σ_X μιάς τ.μ. X ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της διασποράς της, δηλαδή

$$\sigma_X = \sqrt{\Delta X}$$

Παρατήρηση: Η διασπορά και η τυπική απόκλιση μιάς τ.μ. X είναι μέτρα της "διάχυσης της X" γύρω από τη μέση τιμή της.

Πρόταση: $\Delta X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$ (γιά τον υπολογισμό της διασποράς μιάς τ.μ. X συνήθως συμφέρει αυτός ο τύπος.)

Απόδειξη:

$$\Delta X = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\cdot X\cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right)$$
$$= \mathbb{E}X^2 - 2\cdot\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2$$
$$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2. \quad \square$$

Παράδειγμα (συνέχεια του παραδείγματος της σελ. 38) Βρείτε τη διασπορά του αριθμού X των σωστών απαντήσεων.

Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι $P(X=0) = \frac{8}{15}$, $P(X=1) = \frac{6}{15}$, $P(X=2) = \frac{1}{15}$

$$\mathbb{E}X = \frac{8}{15}.$$

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{2} x^2 P(X=x) = 0^2 P(X=0) + 1^2 P(X=1) + 2^2 P(X=2)$$

$$= P(X=1) + 4P(X=2)$$

$$= \frac{6}{15} + 4\frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$

Άρα: $\Delta X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{86}{225}$ □

<u>Πρόβλημα:</u> Έστω $X \sim Poisson(\lambda)$. Βρείτε τη διασπορά της X

<u>Απάντηση:</u>

$$\mathbb{E}X = \lambda$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}X$$

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^{x-2}}{x!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$\overset{Y=x-2}{=} \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{Y=0}^{\infty} \frac{\lambda^Y}{Y!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

Άρα: $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda$

Οπότε:

$$\Delta X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$ □

<u>Παρατήρηση:</u> Αν $X \sim$ Εκθετική (λ) τότε $\Delta X = \frac{1}{\lambda^2}$

Αν $X \sim$ Ομοιόμορφη (α, β) τότε $\Delta X = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$

Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $\Delta X = \sigma^2$

Αν $X \sim$ Διωνυμική (n, p) τότε $\Delta X = np(1-p)$

<u>Ορισμός</u>: Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγονται <u>ανεξάρτητες</u> αν
$$P(X_1 \in B_1 \text{ και } X_2 \in B_2) = P(X_1 \in B_1) P(X_2 \in B_2)$$

<u>Σημείωση</u>: Ο ανωτέρω ορισμός επεκτείνεται για n τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ και για μία άπειρη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots$

Τα παρακάτω τρία Θεωρήματα είναι σημαντικά στη Θεωρία Πιθανοτήτων

<u>Θεώρημα</u> (Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών)

Έστω $X_1, X_2, \dots$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων τυχαίων μεταβλητών που έχουν την ίδια κατανομή (ισόνομες). Έστω ότι $E(X_i) = \mu$. Τότε, γιά κάθε $\varepsilon > 0$,
$$P\left\{ \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right\} \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

<u>Θεώρημα</u> (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών)

Έστω $X_1, X_2, \dots$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Έστω $E(X_i) = \mu$. Τότε
$$P\left[\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} \frac{X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = \mu \right\} \right] = 1$$

<u>Θεώρημα</u> (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)

Έστω $X_1, X_2, \dots$ μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Έστω $E(X_i) = \mu$ και $\Delta(X_i) = \sigma^2$. Τότε
$$P\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq x \right) \to \Phi(x), \text{ καθώς } n \to \infty, \text{ όπου } \bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$
και $\Phi(x)$ η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$.

<u>Εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος</u>

Χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα δώστε μία προσέγγιση της πιθανότητας ο αριθμός των εμφανιζομένων κορώνων σε χίλιες ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος να είναι ανάμεσα σε 480 και 520.

<u>Απάντηση</u>: Έστω $X_i \sim \text{Διωνυμική}(1, \frac{1}{2})$ τυχαίες μεταβλητές ισόνομες και ανεξάρτητες με $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. Προφανώς $\mu = E(X_i) = \frac{1}{2}$ και $\sigma^2 = \Delta(X_i) = \frac{1}{4}$

$$P(480 \leq X_1+\dots+X_{1000} \leq 520) = P(0.48 \leq \overline{X}_{1000} \leq 0.52)$$

$$= P\left(\frac{0.48-0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}/\sqrt{1000}} \leq \overbrace{\frac{\overline{X}_{1000}-0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}/\sqrt{1000}}}^{\sim N(0,1)} \leq \frac{0.52-0.5}{\sqrt{\frac{1}{4}}/\sqrt{1000}} \right)$$

$$\overset{\text{ΚΟΘ}}{\approx} \Phi(0.4\sqrt{10}) - \Phi(-0.4\sqrt{10}) = 2*\Phi(0.4\sqrt{10}) - 1$$

Παράδειγμα: Ο αριθμός των φοιτητών που εγγράφονται σ' ένα μάθημα ψυχολογίας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή 100. Ο καθηγητής του μαθήματος έχει αποφασίσει ότι αν ο αριθμός των εγγεγραμμένων φοιτητών είναι 120 ή περισσότεροι τότε θα διδάξει το μάθημα σε δύο ξεχωριστές τάξης, ενώ αν είναι λιγότεροι από 120 τότε θα το διδάξει σε μία τάξη με όλους τους φοιτητές. Ποιά είναι η πιθανότητα ο καθηγητής να διδάξει το μάθημα σε δύο τάξης;

Απάντηση: Έστω X = # εγγεγραμμένων φοιτητών. $X \sim \text{Poisson}(\lambda=100)$

Η ακριβής τιμή της ζητούμενης πιθανότητας είναι

$$P(X \geq 120) = e^{-100} \sum_{i=120}^{\infty} \frac{(100)^i}{i!},$$ που ουσιαστικά δεν παρέχει κάτι χρήσιμο.

Όμως είναι γνωστό (από Θεωρία Πιθανοτήτων πιό προχωρημένη) ότι η X μπορεί να γραφεί ως εξής

$$X = X_1+\dots+X_{100}, \quad \text{όπου } X_i \sim \text{Poisson}(1),\ i=1,\dots,100 \text{ ανεξάρτητες}$$

Οπότε λόγω του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος μπορούμε να προσεγγίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα ως εξής:

$$P(X \geq 120) = P(X_1+\dots+X_{100} \geq 120) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 120\right)$$

$$= 1 - P\left(\overbrace{\frac{\overline{X}_{100} - 1}{1/\sqrt{100}}}^{\sim N(0,1)} < \frac{1.2-1}{1/\sqrt{100}} \right) \cong 1 - \Phi(10*0.2)$$

$$= 1 - \Phi(2) = 0.0228$$

ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ (βασίζομαι στο Κεφ. 12, σελ. 247-298 του βιβλίου Εισαγωγή στη Στατιστική Σκέψη, Τόμος ΙΙ, Ι. Πανάρετου & Ε. Ξεκαλάκη) — έλληψα στο διαδίκτυο

Σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται να εκτιμηθεί μία παράμετρος του υπό μελέτη πληθυσμού. Η περιοχή της στατιστικής που ασχολείται με αυτό το πρόβλημα ονομάζεται Εκτιμητική. Υπάρχουν διάφορα κριτήρια με βάση τα οποία ο ερευνητής αποφασίζει πόσο "καλή" είναι η εκτιμήτρια μιάς εκτιμήτρια του υπό μελέτη πληθυσμού.

Θεωρούμε ότι ο υπό μελέτη πληθυσμός (ή το υπό μελέτη χαρακτηριστικό του πληθυσμού) είναι μία τυχαία μεταβλητή X με γνωστή κατανομή, η οποία εξαρτάται από μία άγνωστη παράμετρο θ.

Τυχαίο Δείγμα (random sample) του πληθυσμού είναι η τυχαίες μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή με την κατανομή της X.

Η εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου θ γίνεται χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση $\hat{\theta} = h(X_1, \dots, X_n)$ του τυχαίου δείγματος $X_1, \dots, X_n$. Προφανώς η ποσότητα $\hat{\theta}$, η οποία ονομάζεται εκτιμήτρια (estimator), είναι τυχαία μεταβλητή. Αν έχουμε αριθμητικές παρατηρήσεις $x_1, \dots, x_n$ των $X_1, \dots, X_n$, τότε η ποσότητα $\hat{\theta}$ παίρνει την τιμή $h(x_1, \dots, x_n)$, η οποία ονομάζεται εκτίμηση (estimate) της θ.

Θα αναφέρουμε παρακάτω μερικές επιθυμητές ιδιότητες μιάς εκτιμήτριας $\hat{\theta}$.

Ορισμός: Μία εκτιμήτρια $\hat{\theta}_n$ (όπου n είναι το μέγεθος του τυχαίου δείγματος) είναι μία συνεπής (consistent) της αγνώστου παραμέτρου θ του πληθυσμού αν

$$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

Ο ορισμός αυτός δηλώνει ότι τελικά με πιθανότητα 1 μία συνεπής εκτιμήτρια της θ θα δώσει μία εκτίμηση πάρα πολύ κοντά στην πραγματική τιμή της παραμέτρου θ (με απόκλιση $\pm\varepsilon$) όταν το n είναι μεγάλο. Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή στη Θεωρία Πιθανοτήτων ως κατά πιθανότητα σύγκλιση (Convergence in Probability) της $\hat{\theta}_n$ προς την θ, καθώς $n \to \infty$.

Παράδειγμα: Έστω $X_1,\dots,X_n$ τυχαίο δείγμα ενός πληθυσμού X με άγνωστη μέση τιμή θ. Ο δειγματικός μέσος $\overline{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ είναι μία συνεπής εκτιμήτρια της θ.

Απόδειξη: $P(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\Delta \overline{X}_n}{\varepsilon^2}$ για $\varepsilon>0$ (ανισότητα του Chebyshev)

$$0 \leq 1 - P(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| < \varepsilon) \leq \frac{\Delta X_1}{n\varepsilon^2}$$

Καθώς $n\to\infty$ $\frac{\Delta X_1}{n\varepsilon^2} \to 0$. Συνεπώς καθώς $n\to\infty$ $P(|\overline{X}_n - \theta| < \varepsilon) \to 1$. Οπότε $\overline{X}_n$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του θ.

Ορισμός: Μια εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ λέγεται αμερόληπτη (unbiased) εκτιμήτρια της παραμέτρου θ αν η μέση τιμή της ισούται με την παράμετρο θ, δηλαδή $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Σημείωση: Αν μία εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ δεν είναι αμερόληπτη θα λέμε ότι είναι μεροληπτική (biased) και η ποσότητα μεροληπτικότητάς της (bias) ορίζεται ως εξής:

$$\text{bias} = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Παράδειγμα: Έστω $X_1,\dots,X_n$ τυχαίο δείγμα ενός πληθυσμού X με άγνωστη μέση τιμή θ. Ο δειγματικός μέσος $\overline{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ.

Απόδειξη: $E(\overline{X}_n) = E\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\theta = \theta$.

Παράδειγμα: Έστω $X_1,\dots,X_n$ τυχαίο δείγμα ενός πληθυσμού X με άγνωστη διακύμανση σ^2. Η ποσότητα $S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ είναι μεροληπτική εκτιμήτρια της σ^2.

Απόδειξη: $S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2)$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2$$

$$E(S'^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - E(\overline{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu^2+\sigma^2) - (\Delta\overline{X}+\mu^2) = \frac{1}{n}(n\mu^2+n\sigma^2) - \Delta\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \mu^2$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2.$$ Συνεπώς η S'^2 δεν είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2

<u>Σημείωση:</u> Στο προηγούμενο παράδειγμα η ποσότητα $S'^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2, διότι:

$$E(S'^{*2}) = E(S'^{*2}) = E\left(\frac{n}{n-1}S'^2\right) = \frac{n}{n-1}E(S'^2) = \frac{n}{n-1}\,\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$$

<u>Σημείωση:</u> Μία συνεπής εκτιμήτρια ΔΕΝ είναι υποχρεωτικά αμερόληπτη. Επίσης μία αμερόληπτη εκτιμήτρια ΔΕΝ είναι υποχρεωτικά συνεπής.

Αν δύο εκτιμήτριες έχουν μικρή ή καθόλου μεροληπτικότητα είναι φυσικό να προτιμήσουμε εκείνη που έχει τη μικρότερη διακύμανση. Έτσι οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό:

<u>Ορισμός.</u> Αν δύο εκτιμήτριες $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ της παραμέτρου θ είναι αμερόληπτες και $\Delta(\hat{\theta}_1) < \Delta(\hat{\theta}_2)$, θα λέμε ότι η εκτιμήτρια $\hat{\theta}_1$ είναι <u>σχετικά πιό αποτελεσματική</u> από την εκτιμήτρια $\hat{\theta}_2$.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω ότι μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε τη μέση τιμή του χρόνου που ένα νέο προϊόν είναι δυνατόν να διατηρηθεί πριν χρησιμοποιηθεί από τον καταναλωτή. Από προηγούμενες εμπειρίες είναι δυνατόν να υποθέσουμε ότι η κατανομή αυτού του χρόνου ακολουθεί την κανονική κατανομή. Είναι γνωστό ότι γιά ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ τότε ο δειγματικός μέσος $\overline{X}$ όσο και η διάμεσος είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες της μέσης τιμής μ αυτού του χρόνου. Όμως

$$\Delta\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{και} \quad \Delta(\text{διαμέσου}) \simeq 1.57\frac{\sigma^2}{n}$$

Επομένως η εκτιμήτρια $\overline{X}$ είναι σχετικά πιό αποτελεσματική εκτιμήτρια από ότι η διάμεσος γιά την εκτίμηση του μ.

Κάτω Φράγμα των Cramér-Rao

Αν $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό X με συνάρτηση πιθανότητας $P(\cdot\,; \theta)$ (ή πυκνότητα $f(\cdot\,; \theta)$ στην συνεχή περίπτωση) και $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια τότε

$$\Delta(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln P_{X_1,\ldots,X_n}(X_1,\ldots,X_n;\theta)\right)^2\right]}$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω ανίσωσης ονομάζεται κάτω φράγμα των Cramér-Rao.
Ο παρονομαστής στο δεξί μέλος ονομάζεται ποσότητα πληροφορίας (amount of information) σχετικά με την παράμετρο θ, η οποία περιέχεται στις παρατηρήσεις $X_1, \ldots, X_n$ και συχνά συμβολίζεται με I_θ.

<u>Ορισμός:</u> Μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της οποία η διακύμανση ισούται με το κάτω φράγμα Cramér-Rao για όλα τα θ που ανήκουν στον παραμετρικό χώρο ονομάζεται <u>αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς</u> (minimum variance unbiased estimator)

<u>Ορισμός:</u> Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό X που εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ. Μία στατιστική συνάρτηση (δηλαδή συνάρτηση του τυχαίου δείγματος $X_1, \ldots, X_n$) $T(X_1, \ldots, X_n)$ ονομάζεται <u>επαρκής</u> (sufficient) για την παράμετρο θ αν η στατιστική συνάρτηση T περιέχει όλες τις πληροφορίες στο δείγμα γύρω από την παράμετρο θ ή, ισοδύναμα, αν η δεσμευμένη κατανομή των $(X_1, \ldots, X_n)$ δοθέντος του $T = t$ δεν εξαρτάται από το θ για όλα τα t.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω X ο αριθμός των ατυχημάτων πού συμβαίνουν κατά τη διάρκεια μιας μέρας, σε ένα συγκεκριμένο σημείο της εθνικής οδού. Θεωρούμε ότι $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, όπου $\lambda > 0$ άγνωστη. Έστω X_1, X_2 τυχαίο δείγμα. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $T = X_1 + X_2$ είναι επαρκής για την παράμετρο λ.

Λύση: Η δεσμευμένη κατανομή των (X_1, X_2) δοθέντος $T=t$ δίνεται από τη σχέση

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2 \mid T=t)$$

Η παραπάνω πιθανότητα αν $x_1+x_2 \neq t$ είναι μηδέν. Αν $x_1+x_2=t$, έχουμε

$$P(X_1=x_1, X_2=x_2 \mid T=t) = \frac{P(X_1=x_1, X_2=x_2, T=x_1+x_2)}{P(T=t)}$$

$$= \frac{P(X_1=x_1, X_2=x_2)}{P(T=t)} \overset{X_1, X_2 \text{ ανεξ.}}{=\!=} \frac{P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)}{P(X_1+X_2=x_1+x_2)}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}}\frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}\,\cancel{e^{-\lambda}}\frac{\lambda^{x_2}}{x_2!}}{\cancel{e^{-2\lambda}}\frac{(2\lambda)^{x_1+x_2}}{(x_1+x_2)!}} = \frac{(x_1+x_2)!}{x_1!\,x_2!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ποσότητα δεν εξαρτάται από την παράμετρο λ. Οπότε συμπεραίνουμε ότι η στατιστική συνάρτηση $T = X_1 + X_2$ είναι επαρκής για την παράμετρο λ.

Η έννοια της επάρκειας συνδέεται με το πρόβλημα της ύπαρξης αμερόληπτων εκτιμητριών ελάχιστης διασποράς, όπως φαίνεται από το παρακάτω Θεώρημα.

<u>Θεώρημα (Rao-Blackwell)</u>: Έστω ότι $\tilde{\theta}$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια μιας παραμέτρου θ. Τότε, αν T είναι μία επαρκής στατιστική συνάρτηση για την παράμετρο θ, η εκτιμήτρια

$$\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}(T) = E(\tilde{\theta} \mid T)$$

είναι επίσης μία αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου θ και $\Delta(\hat{\theta}) \leq V(\tilde{\theta})$.

<u>Σημείωση</u>: Αν η $\hat{\theta} \equiv \hat{\theta}(T)$ είναι η μοναδική συνάρτηση της T που είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ, τότε η $\hat{\theta}(T)$ είναι μία αμερόληπτη εκτιμήτρια ελάχιστης διασποράς της παραμέτρου θ.

Μέθοδοι σημειακής Εκτίμησης

Μέχρι στιγμής εξετάσαμε επιθυμητές ιδιότητες σημειακών εκτιμητριών. Υπάρχουν όμως μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την εύρεση σημειακών εκτιμητριών. Θα αναφέρουμε τη μέθοδο των ροπών και τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Μέθοδος των Ροπών

Έστω ότι έχουμε τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ από έναν πληθυσμό X που εξαρτάται από τις άγνωστες παραμέτρους $\theta_1, \dots, \theta_k$. Οι παράμετροι εκτιμώνται από το παρακάτω σύστημα k εξισώσεις με k αγνώστους $\theta_1, \dots, \theta_k$

$$\mu_r = m_r, \quad r = 1, 2, \dots, k, \quad \text{όπου}$$

$\mu_r = E(X^r)$ είναι η ροπή r τάξης της τυχαίας μεταβλητής και

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

Παράδειγμα: Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 > 0$ είναι άγνωστες παράμετροι

Λύση: Εδώ $E(X) = \mu$ και $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$. Οπότε προκύπτει το εξής σύστημα:

$$\mu = \overline{X}$$
$$\mu^2 + \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα προκύπτουν οι εξής εκτιμήτριες των μ και σ^2 με τη μέθοδο των ροπών.

$$\hat{\mu} = \overline{X} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Έστω ότι έχουμε ένα μοντέλο πιθανότητας (probability model) που αντιστοιχεί σε ένα πείραμα τύχης. Το μοντέλο εξαρτάται από μια άγνωστη παράμετρο θ ή από πολλές άγνωστες παραμέτρους $\theta_1, \dots, \theta_k$. Το πείραμα εκτελείται και παρατηρείται ότι έχει συμβεί κάποιο ενδεχόμενο E. Αυτό σημαίνει ότι έχουν συγκεντρωθεί κάποια δεδομένα.

Μας ενδιαφέρει η εκτίμηση της τιμής της παραμέτρου θ. Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας συνίσταται στον υπολογισμό της πιθανότητας $P(E;\theta)$ του ενδεχομένου E και της εύρεσης εκείνης της τιμής της παραμέτρου θ που μεγιστοποιεί την $P(E;\theta)$ ή κάποιο πολλαπλάσιό της $L(\theta) = kP(E;\theta)$, όπου k δεν είναι συνάρτηση του θ. Ισοδύναμα, η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της θ μεγιστοποιεί τη συνάρτηση $l(\theta) = \ln L(\theta)$

Παράδειγμα: Έστω X = # μυκήτων σε μία μονάδα όγκου νερού της λίμνης Μαραθώνα. Θεωρούμε ότι $X \sim Poisson(\lambda)$, όπου $\lambda > 0$ είναι άγνωστη παράμετρος. Παίρνουμε ότι τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ από αυτόν τον πληθυσμό. Οι παρατηρηθείσες τιμές του δείγματος είναι $x_1, \dots, x_n$. Το πρόβλημα είναι να εκτιμηθεί η άγνωστη παράμετρος λ, που είναι η μέση τιμή του αριθμού των μυκήτων σε μία μονάδα όγκου νερού.

Λύση

$$P(E;\lambda) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \xlongequal{X_1,\dots,X_n \text{ ανεξ.}} \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_j}}{j!} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{j=1}^{n} x_j}}{x_1! \cdots x_n!}$$

$L(\lambda) = kP(E;\lambda)$ Διαλέγοντας $k = x_1! \cdots x_n!$ έχουμε

$$L(\lambda) = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{j=1}^{n} x_j}$$

$$l(\lambda) = \ln\left(e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{j=1}^{n} x_j}\right) = -n\lambda + \sum_{j=1}^{n} x_j * \ln\lambda$$

$$l'(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} x_j - n \qquad l''(\lambda) = -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{\lambda^2}$$

$$l'(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{n}$$

Στο σημείο αυτό η δεύτερη παράγωγος της l είναι αρνητική. Επίσης $L(0) = 0$ και $L(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$. Οπότε το σημείο $\sum_{j=1}^{n} x_j / n$ είναι σημείο ολικού μεγίστου της $l(\lambda)$. Συμπεραίνουμε ότι

η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της λ είναι η στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\lambda} = \overline{X}$$

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ n ανεξαρτήτων παρατηρήσεων από μια κανονική κατανομή με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας της κανονικής κατανομής είναι

$$L(\mu,\sigma^2) = k\prod_{i=1}^{n} f(X_i),$$ όπου f είναι η πυκνότητα της $N(\mu,\sigma^2)$.

Οπότε

$$L(\mu,\sigma^2) = k\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Με κατάλληλη επιλογή του k, προκύπτει ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$L(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{\sigma^2})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right\}$$

Ο φυσικός λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι

$$l(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξεως της συνάρτησης $l(\mu,\sigma^2)$ ως προς μ και σ^2 είναι

$$\frac{\partial \ln l(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) \quad \text{και} \quad \frac{\partial \ln l(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$$

Οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας των μ και σ^2 είναι οι λύσεις των εξισώσεων

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = 0 \quad \text{και} \quad -\frac{n}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{2\sigma^2} = 0$$

Οπότε οι εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας των μ και σ^2 είναι:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n} = S'^2$$

Ασκήσεις

1. Έστω $X \sim$ Διωνυμική $(1, \theta)$, όπου $\theta \in [0,1]$ άγνωστη παράμετρος. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα, δηλαδή ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που έχουν την ίδια με την X. Να δειχθεί ότι η στατιστική συνάρτηση $T = X_1 + \dots + X_n$ είναι επαρκής για την παράμετρο θ.

2. Έστω $X_1, \dots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη (a, β). Να βρεθούν οι ροποεκτιμήτριες των παραμέτρων a και β.

3. Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X_1, \dots, X_n$ από μία εκθετική κατανομή με πυκνότητα $f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad \theta > 0$
Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της θ.

4. Έστω X_i, $i = 1, \dots, 10$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0,1]$. Βρείτε κατά προσέγγιση την πιθανότητα $P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right)$ συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής $\Phi(x)$ της τυποποιημένης κανονικής κατανομής.

1ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1)

Ρίχνουμε μία φορά δύο κυβους (ζάρια), έναν άσπρο και έναν κόκκινο.

α. Να δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω ή S για την περιγραφή των αποτελεσμάτων της ρίψης των δύο κυβων.

β. Να δοθουν περιγραφές και να βρεθούν τα δειγματικά σημεία των ενδεχομένων
   A_1 : η ένδειξη του άσπρου κυβου ήταν μεγαλύτερη της ένδειξης του κόκκινου κυβου,
   A_2 : οι ενδείξεις των δύο κυβων ήταν ίσες,
   A_3 : η ένδειξη του άσπρου κυβου ήταν μικρότερη της ένδειξης του κόκκινου κυβου.

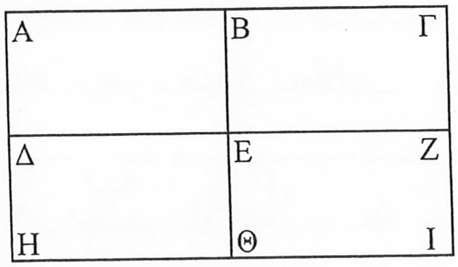
γ. Να δειχθεί ότι τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 αποτελούν διαμέριση τον δειγματικού χώρου Ω ή S.

2)

Ένας πωλητής θέλει να επισκεφτεί τέσσερις πόλεις α, β, γ, δ προκειμένου να πάρει παραγγελίες από τους προμηθευτές της εταιρείας. Αφού δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για την περιγραφή της σειράς επίσκεψης των τεσσάρων πόλεων από τον πωλητή, να γραφούν αναλυτικά τα επόμενα ενδεχόμενα

A_1 : ο πωλητής επισκέπτεται πρώτη την πόλη α,
A_2 : ο πωλητής ξεκινάει από την πόλη α και τελειώνει με την πόλη β,
A_3 : ο πωλητής επισκέπτεται διαδοχικά τις πόλεις β και γ,
A_4 : ο πωλητής επισκέπτεται διαδοχικά τις πόλεις α, β και γ.

3)



Ο Βασίλης έχει επισκεφτεί ενα φίλο του που μένει στη θέση Α και θέλει να επιστρέψει στο σπίτι του, που βρίσκεται στη θέση Ι του διπλανού σχήματος. Θέλοντας να ελαχιστοποιήσει την απόσταση που θα διανύσει, αποφασίζει να βαδίσει κινούμενος κάθε φορά είτε προς τα δεξιά (π.χ. από το σημείο Α στο Β, από το σημεία Δ στο Ε κτλ.) είτε προς τα κάτω (π.χ. από το σημείο Β στο Ε, από το σημείο Ε στο Θ κτλ.). Σε κάθε θέση που υπάρχει δυνατότητα επιλογής στον τρόπο κίνησης, επιλέγει τυχαία σε ποια κατεύθυνση θα κινηθεί, ρίχνοντας ένα νόμισμα,

α. Να δοθεί με δενδροδιάγραμμα ο δειγματικός χώρος του πειράματος, δηλαδή το σύνολο των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορεί ο Βασίλης να βαδίσει από τη θέση Α στη θέση Ι.

β. Να γραφούν αναλυτικά τα επόμενα ενδεχόμενα
   A_1 : ο Βασίλης περνάει από τη θέση Ε,
   A_2 : ο Βασίλης δεν περνάει από τη θέση Γ,
   A_3 : ο Βασίλης δεν περνάει από τις θέσεις Δ και Θ,
   A_4 : ο Βασίλης ρίχνει μόνο δύο φορές το νόμισμα για να αποφασίσει σε ποια κατεύθυνση θα κινηθεί.

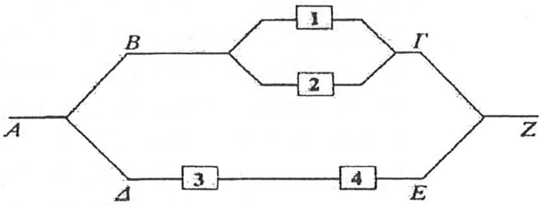
4)
Σε ένα δοχείο υπάρχουν 2 άσπρες και 3 μαύρες σφαίρες. Να δοθεί ένας κατάλληλος δειγματικός χώρος για την περιγραφή των αποτελεσμάτων που προκύπτουν αν εξάγουμε με τη σειρά 4 σφαίρες

α. αν για κάθε σφαίρα που εξάγεται σημειώνεται το χρώμα της και τοποθετείται πίσω στο δοχείο πριν γίνει η επόμενη εξαγωγή (μια τέτοια διαδικασία λέγεται επιλογή με επανάθεση).

β. όταν η σφαίρα που εξάγεται κάθε φορά μένει εκτός του δοχείου (μια τέτοια διαδικασία λέγεται επιλογή χωρίς επανάθεση).

γ. να δοθεί επίσης κατάλληλος δειγματικός χώρος στην περίπτωση που εξάγουμε ταυτόχρονα 3 σφαίρες από το δοχείο.

5)
Σε ένα δίκτυο ύδρευσης, τα σημεία Α και Ζ, συνδέονται με σωλήνες όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα και η ροή του νερού γίνεται από το Α προς το Ζ.
Στις θέσεις που σημειώνονται με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 υπάρχουν διακόπτες οι οποίοι μπορούν να διακόψουν τη ροή του νερού στον αντίστοιχο σωλήνα.



α. Να ορίσετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για την περιγραφή της κατάστασης των τεσσάρων διακοπτών.

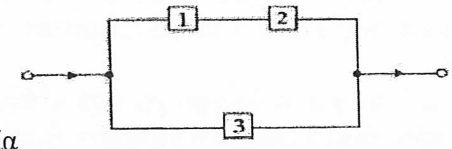
β. Να γράψετε αναλυτικά τα ενδεχόμενα

A_1 : υπάρχει ροή νερού από το σημείο Δ προς το σημείο Ε,

A_2 : υπάρχει ροή νερού από το σημείο Β προς το σημείο Γ,

A_3 : υπάρχει ροή νερού από το σημείο Α προς το σημείο Ζ.

2ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ



1)

Ένα σύστημα αποτελείται από τρία εξαρτήματα (1, 2, 3) τα οποία είναι συνδεδεμένα όπως δείχνει το σχήμα. Για τη λειτουργία του συστήματος απαιτείται είτε να λειτουργούν τα εξαρτήματα 1 και 2 συγχρόνως, είτε να λειτουργεί το εξάρτημα 3.

α. Να δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω ή S σε μορφή δενδροδιαγράμματος για τις δυνατές καταστάσεις {λειτουργία : 1, μη λειτουργία : 0) κάθε εξαρτήματος του συστήματος.

β. Να γραφούν αναλυτικά, τα ενδεχόμενα

A_1 : λειτουργεί τουλάχιστον ένα εξάρτημα,
A_2 : λειτουργούν και τα τρία εξαρτήματα,
A_3 : κανένα εξάρτημα δεν λειτουργεί,
A_4 : λειτουργούν ακριβώς δύο εξαρτήματα,
A_5 : λειτουργεί τουλάχιστον ένα από τα εξαρτήματα 1, 2, όχι όμως και το εξάρτημα 3,
A_6 : το σύστημα λειτουργεί
A_7 : το σύστημα δεν λειτουργεί.

γ. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

Λ_i : το εξάρτημα i λειτουργεί,

για i = 1, 2, 3. Να εκφραστούν τα ενδεχόμενα του ερωτήματος (β) μέσω των Λ_1, Λ_2, Λ_3 χρησιμοποιώντας τις πράξεις συμπλήρωμα, ένωση και τομή ενδεχομένων.

2)

Για δύο ξένα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματοχώρου Ω ή S είναι γνωστό ότι

$$P(A\cup B)=\frac{1}{6} \quad \text{και} \quad 2P(A')+3P(B)=2$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$.

3)

Έστω ότι για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματοχώρου Ω ή S είναι γνωστό ότι

$$P(A)=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad P(AB) \text{ ή } P(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A\cup B)$, $P(A'\cup B')$, $P(A'B')$, $P(AB')$, $P(A'\cup B)$, $P(A\cup B')$, $P(A'B)$.

4)

Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο* νόμισμα τρεις φορές.

α. Να δοθεί κατάλληλος δειγματικός χώρος Ω ή S για την περιγραφή των αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης.

β. Να υπολογιστεί η πιθανότητα των απλών ενδεχομένων του Ω και στη συνέχεια να υπολογιστεί η πιθανότητα των ενδεχομένων

A_1 : εμφανίζονται τρία ίδια αποτελέσματα,
A_2 : εμφανίζονται ακριβώς δύο κεφαλές,
A_3 : εμφανίζονται τουλάχιστον δύο κεφαλές,
A_4 : εμφανίζονται τουλάχιστον δύο ίδια διαδοχικά αποτελέσματα.

5)

Σε μια μελέτη των αιτίων διακοπής του ηλεκτρικού ρεύματος βρέθηκε ότι στο 10% των περιπτώσεων διακοπής υπήρχε βλάβη μετασχηματιστή, στο 75% των περιπτώσεων υπήρχε βλάβη γραμμής μεταφοράς και στο 2% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης. Με βάση τα ποσοστά αυτά, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε μια συγκεκριμένη διακοπή ρεύματος υπάρχει:

(α) βλάβη μετασχηματιστή ή βλάβη γραμμής μεταφοράς.
(β) βλάβη μετασχηματιστή, αλλά όχι βλάβη γραμμής μεταφοράς,
(γ) το πολύ ενός είδους βλάβη,
(δ) καμιά από τις δύο αναφερόμενες βλάβες.

3ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1)
Τέσσερα παντρεμένα ζευγάρια έχουν αγοράσει οκτώ εισιτήρια θεάτρου που αντιστοιχούν σε οκτώ συνεχόμενες θέσεις της ίδιας σειράς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα οκτώ άτομα στις θέσεις έτσι ώστε:

α) να μην υπάρχει κανένας περιορισμός για τη θέση που καταλαμβάνει το κάθε άτομο;
β) άντρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ;
γ) όλοι οι άνδρες να κάθονται σε 4 διαδοχικές θέσεις και όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;
δ) όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;

2)
Το 60% των μαθητών μιας πόλης έχουν κινητό τηλέφωνο. Το 40% έχουν ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η.Υ.) και το 25% και το δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της πόλης αυτής, να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής αυτός:
(i) να έχει ένα μόνο από τα δύο
(ii) να μην έχει κανένα από τα δύο και
(iii) να έχει το πολύ ένα από τα δύο.

3)
Σε μια μάντρα αυτοκινήτων, υπάρχουν 10 κόκκινες και 10 άσπρες Ford, 15 κόκκινες και 5 άσπρες Buick. Τα κλειδιά των αυτοκινήτων, βρίσκονται ανακατεμένα μέσα σε ένα κουτί. Επιλέγουμε στην τύχη ένα κλειδί, βγάζοντας το από το κουτί.
(α) Ποιά η πιθανότητα να επιλέξουμε κόκκινο αυτοκίνητο;
(β) Παρατηρούμε τα κλειδιά και βλέπουμε ότι ανήκουν σε Buick. Ποια η πιθανότητα να είναι κόκκινη;

4)
Σε ένα γραφείο υπάρχουν 40 γραπτά της τάξης A_1, 50 γραπτά της τάξης A_2, και 60 γραπτά της τάξης A_3. Το 15% των γραπτών της τάξης A_1, έχει βαθμολογία μικρότερη του πέντε. Το 20% των γραπτών της τάξης A_2, έχει βαθμολογία μικρότερη του πέντε και το 10% των γραπτών της τάξης A_3, έχει βαθμολογία μικρότερη του πέντε. Επιλέγουμε ένα γραπτό στην τύχη. Ποια η πιθανότητα να έχει βαθμό μικρότερο του 5;

5)
Τα ενδεχόμενα Α1, Α2, Α3 και Α4 αποτελούν διαμέριση ενός δειγματοχώρου Ω ή S και είναι γνωστό ότι

$$P(A_2)=3P(A_1),\quad P(A_3)=2P(A_2),\quad P(A_4)=2P(A_3)$$

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων

$A_1-A_2,\ A_1A_2A_3,\ A_1'\cup A_2,\ A_2'A_3',\ (A_2'\cup A_3)A_4$.

4ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Μια εταιρεία θέλει να προσλάβει 5 νέους υπαλλήλους. Μετά την προκήρυξη των νέων θέσεων υπέβαλαν αίτηση 7 γυναίκες και 8 άνδρες. Να υπολογιστούν οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή των 5 νέων υπάλληλων
   α) αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός
   β) αν πρέπει να προσληφθούν ακριβώς 2 γυναίκες.
   γ) αν πρέπει να προσληφθούν τουλάχιστον 3 άνδρες.

2. Σε μια τάξη, το 60% είναι κορίτσια. Το 12% των αγοριών και το 7% των κοριτσιών είναι αριστερόχειρες. Ένας μαθητής επιλέγεται τυχαία. Αν είναι αριστερόχειρας, ποια η πιθανότητα να είναι κορίτσι;

3. Σε μια γεωγραφική περιοχή υπάρχουν τέσσερα Λύκεια Α, Β, Γ και Δ. Τα Λύκεια Α, Β και Δ είναι Δημόσια Λύκεια. Το 2002, το ποσοστό των μαθητών της $3^{ης}$ Λυκείου σ' αυτή την περιοχή που φοιτούσαν στο καθένα απ' αυτά τα τέσσερα Λύκεια ήταν 44%, 19%, 11% και 26%, αντίστοιχα. Το ποσοστό των μαθητών της $3^{ης}$ Λυκείου σε καθένα απ' αυτά τα Λύκεια, που πέτυχε στις Πανελλήνιες Εξετάσεις του 2000 ήταν 43%, 52%, 78% και 22%, αντίστοιχα.

   Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας μαθητής της $3^{ης}$ Λυκείου σ' αυτή την περιοχή
   (α) φοίτησε στο Λύκειο Γ και δεν πέτυχε στις Πανελλήνιες Εξετάσεις
   (β) δεν πέρασε στις Πανελλήνιες Εξετάσεις
   (γ) φοίτησε στο Λύκειο Γ δεδομένου ότι πέτυχε στις Πανελλήνιες Εξετάσεις
   (δ) πέτυχε στις Πανελλήνιες Εξετάσεις δεδονένου ότι φοιτούσε σε Δημόσιο Λύκειο

4. Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν δύο μηχανές Α και Β που κατασκευάζουν το 40% και 60% των προϊόντων αντίστοιχα. Είναι γνωστό από την εμπειρία του παρελθόντος ότι το 2% και 3% των προϊόντων τα οποία δημιουργούνται από τις μηχανές Α και Β αντίστοιχα είναι ελαττωματικά.
   (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το τυχαίο προϊόν που θα επιλέξουμε από το εργοστάσιο να είναι ελαττωματικά.
   (b) Αν επιλέξουμε ένα προϊόν τυχαία από το εργοστάσιο και βρούμε ότι είναι ελαττωματικό, ποια η πιθανότητα να κατασκευάστηκε στην μηχανή Α;
   (c) Αν επιλέξουμε ένα προϊόν τυχαία από το εργοστάσιο και βρούμε ότι δεν είναι ελαττωματικό, ποια η πιθανότητα να κατασκευάστηκε στην μηχανή Β;

5. Σε ένα εργοστάσιο το 30% των εργατών του είναι καπνιστές. Βρέθηκε ότι οι καπνιστές έχουν τριπλάσιο αριθμό απουσιών από τους μή καπνιστές. Αν ένας εργάτης απουσιάζει, ποια η πιθανότητα να είναι καπνιστής;

5° ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1) Ρίχνουμε ένα πράσινο και ένα κόκκινο ζάρι. Θεωρούμε τα γεγονότα A, B, C όπου:

   A : Στο κόκκινο ζάρι 5

   B : Το άθροισμα των ενδείξεων είναι περιττός

   C : Το Αθροισμα των ενδείξεων είναι 11

   Είναι τα γεγονότα A, B, C στοχαστικά ανεξάρτητα;

2) Ένα δοχείο περιέχει 6 άσπρα και 12 μαύρα σφαιρίδια. Παίρνουμε με τη σειρά 5 σφαιρίδια χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε στη σειρά ΑΜΜΑΑ;

3) Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν 40 μικρές γεννήτριες, από τις οποίες οι 6 είναι χαλασμένες. Μια συγκεκριμένη ημέρα, πρόκειται να χρησιμοποιηθούν 5 γεννήτριες. Ποια η πιθανότητα να λειτουργούν όλες;

4) Μια συνηθισμένη τράπουλα 52 καρτών χωρίζεται τυχαία σε 4 στοίβες των 13 καρτών. Υπολογίστε την πιθανότητα κάθε στοίβα να περιέχει ακριβώς έναν άσσο.

5) Ένας παίκτης του πόκερ παίρνει 5 φύλλα από μια κανονική τράπουλα 52 φύλλων. Ποια είναι η πιθανότητα για:
   1. Καρέ (δηλαδή 4 ίδια φύλλα, για παράδειγμα 4 άσσους, 4 ντάμες, κτλ.);
   2. Χρώμα (δηλαδή όλα κούπες ή όλα σπαθιά ή όλα μπαστούνια ή όλα καρώ);
   3. Φουλ (δηλαδή ένα ζευγάρι και μια τριάδα, π.χ. 3 άσσους και 2 ρηγάδες);

6ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1) Ας θεωρήσουμε δύο διαδοχικές ρίψεις ενός συνήθους κύβου και έστω A_1 το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στην $1^η$ ρίψη, A_2 το ενδεχόμενο εμφάνισης άρτιου αριθμού στην $2^η$ ρίψη και A_3 το ενδεχόμενο το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται στις δύο ρίψεις να είναι άρτιος αριθμός. Να εξεταστεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα.

2) Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία τριών ρίψεων ενός συνήθους νομίσματος. Έστω A_j το ενδεχόμενο της εμφάνισης στην j ρίψη της όψης κεφαλή (κορώνα), j = 1, 2, 3. Να εξεταστεί κατά πόσον τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα.

3) Ας υποθέσουμε ότι το πείραμά μας συνίσταται στη ρίψη 3 τίμιων νομισμάτων. Ας συμβολίσουμε με Υ τον αριθμό που μας λέει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η Υ και να βρεθούν οι αντίστοιχες πιθανότητες.

4) Μια τ.μ. Χ έχει κατανομή (πυκνότητα) πιθανότητας που δίνεται από τον πίνακα

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
p(x)	**1/16**	**4/16**	**6/16**	**4/16**	**1/16**

(α) Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της Χ και να γίνει η γραφική τής παράσταση.
(β) Να βρεθεί η μέση τιμή ΕΧ ή Ε(Χ) και η διασπορά V(X) ή Var(X) της Χ.

5) Ο αριθμός των αυτοκινήτων που πουλάει μία έκθεση σε μία εβδομάδα είναι τυχαία μεταβλητή Χ με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο: f(x) = cx, x = 1,2,3;4,5 και f(x) = c(10-x), x = 6,7,8,9.
(α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.
(β) Ποια είναι η πιθανότητα να πουληθούν σε μία εβδομάδα
(i) λιγότερα από 4 αυτοκίνητα;
(ii) περισσότερα από 5 αυτοκίνητα γνωρίζοντας ότι έχουν πουληθεί τουλάχιστον 3;

6) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή Χ έχει συνάρτηση κατανομής

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/16, & 0 \le x < 1 \\ 3/16, & 1 \le x < 2 \\ 1/2, & 2 \le x < 3 \\ 11/16, & 3 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x < \infty \end{cases}$$

Να παρασταθεί γραφικά η F και να υπολογισθούν οι πιθανότητες $P(1 < X \le 3)$, $P(X > 2)$, $P(1 \le X < 4)$ και η συνάρτηση πιθανότητας f(x)= P{X = x), x = 0,1,2,3,4.

$7^{ο}$ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1) Έστω ότι το 25% από εκείνους που εξετάζονται για την απόκτηση διπλώματος οδηγού αυτοκινήτου αποτυγχάνουν. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X δίνει τον αριθμό των αποτυχόντων ανάμεσα σε είκοσι πέντε εξεταζόμενους. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες (α) $P(X \geq 1)$ (β) $P(X \leq 20)$ (γ) $P(5 < X \leq 20)$.

2) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 10 φορές

(α) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη Κ ακριβώς 7 φορές;

(β) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη Κ τουλάχιστον 7 φορές;

(γ) Ποια η πιθανότητα να εμφανιστεί η ένδειξη Κ το πολύ 7 φορές;

(δ) Ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος των ενδείξεων Κ, που εμφανίζεται;

3) Πόσα παιδιά πρέπει να αποκτήσει μία οικογένεια ώστε να έχει με πιθανότητα μεγαλύτερη ή ίση του 0.9 τουλάχιστον ένα αγόρι και τουλάχιστον ένα κορίτσι; Υποθέτουμε ότι σε κάθε γέννηση είναι εξίσου πιθανό να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι.

4) Μια αεροπορική εταιρεία γνωρίζει ότι το 5% των ατόμων που κάνουν κράτηση για να ταξιδέψουν δεν εμφανίζονται. Αν η εταιρεία κάνει κράτηση για 52 άτομα σε μια πτήση που γίνεται με ένα μικρό αεροσκάφος χωρητικότητας 50 ατόμων, ποια η πιθανότητα να υπάρχει διαθέσιμο κάθισμα για καθένα επιβάτη που εμφανίζεται για να ταξιδέψει;

5)

Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.5	0.1	0.3	0.1

i. Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διακύμανση της X.

ii. Ποια η μέση τιμή των τ.μ. X^2, $5X+3$ και $\sqrt{X}$.

iii. Ποια η διακύμανση των τ.μ. X^2, $5X+3$ και $\sqrt{X}$.

8^o ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Κατά τη διάρκεια μιας τηλεφωνικής συνομιλίας, κάθε λεπτό υπάρχει μια πιθανότητα 5% να 'πέσει' η γραμμή. Υποθέτουμε πως η συμπεριφορά της τηλεφωνικής γραμμής από λεπτό σε λεπτό είναι ανεξάρτητη.

   (α) Ποια η πιθανότητα να πέσει η γραμμή για $1^η$ φορά κατά το 5ο λεπτό της συνομιλίας;

   (β) Ποια η πιθανότητα να μην έχει πέσει η γραμμή κατά τα πρώτα 10 λεπτά της συνομιλίας;

2. Αν η τυπική απόκλιση μιας τ.μ. με γεωμετρική κατανομή είναι 3, ποια η πιθανότητα η τ.μ. να πάρει την τιμή 2;

3. Το κόστος εκτέλεσης για πρώτη φορά ενός συγκεκριμένου πειράματος είναι 100 €. Αν το πείραμα αποτύχει, για ορισμένες μεταβολές που πρέπει να γίνουν πριν από την επόμενη εκτέλεση του απαιτείται ένα πρόσθετο ποσόν 20 €. Υποθέτουμε ότι οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες με πιθανότητα επιτυχίας $p = 4/5$ και ότι συνεχίζονται μέχρι την $1^η$ επιτυχία. Να υπολογισθούν:

   (α) η πιθανότητα να απαιτηθούν 4 το πολύ δοκιμές μέχρι την πρώτη επιτυχία

   (β) το αναμενόμενο κόστος μέχρι την $1^η$ επιτυχία.

4. Από έρευνες έχει διαπιστωθεί ότι οι μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου καπνίζουν σε ποσοστό 4%. Ζητάμε διαδοχικά από μαθητές της Γ' τάξης του Γυμνασίου να απαντήσουν στο ερώτημα αν καπνίζουν ή όχι μέχρις ότου λάβουμε την πρώτη θετική απάντηση. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να κάνουμε

   (α) άρτιο αριθμό ερωτήσεων

   (β) περισσότερες από 8 ερωτήσεις και λιγότερες από 13.

5. Ένα αεροπλάνο υψηλής αξιοπιστίας περιέχει 3 ίδιους Η/Υ. Μόνο ο ένας χρησιμοποιείται για την λειτουργία του αεροπλάνου, οι άλλοι 2 είναι διαθέσιμοι στην περίπτωση βλάβης του αρχικού. Η πιθανότητα αποτυχίας του Η/Υ για 1 ώρα λειτουργίας του είναι 0,0005. Με την υπόθεση ότι κάθε ώρα λειτουργίας παριστάνει και μια δοκιμή Bernoulli,

   (α) ποιος είναι ο μέσος όρος λειτουργίας του αεροπλάνου;

   (β) ποια είναι η πιθανότητα ότι όλοι οι Η/Υ αποτυγχάνουν σε μια πτήση 6 ωρών;

6. Μια γυναίκα εξακολουθεί να τεκνοποιεί μέχρι να αποκτήσει 2 αγόρια. Έστω ότι η πιθανότητα γέννησης αγοριού είναι p=0,49. Να υπολογιστούν,

   (α) η πιθανότητα όπως η γυναίκα αυτή αποκτήσει το πολύ 4 παιδιά μέχρι να πετύχει το σκοπό της και

   (β) ο αναμενόμενος αριθμός παιδιών μέχρι τη γέννηση του $2^{ου}$ αγοριού.

9ο Φροντιστήριο

1. Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 10 άτομα με την ίδια ηλικία και κατάσταση υγείας. Αν κάθε άτομο αυτής της κατηγορίας έχει πιθανότητα 60% να ζει μετά από 30 χρόνια τότε να υπολογιστεί η πιθανότητα να ζουν μετά από 30 χρόνια,
   α) κανένας,
   β) το πολύ 3 άτομα.
   γ) ποιος είναι ο μέσος αριθμός ατόμων που θα ζουν μετά από 30 χρόνια;

2. Για την πρόσληψη του διευθυντή πωλήσεων ενός καταστήματος μία επιτροπή έχει να επιλέξει από ένα πλήθος υποψηφίων που υπέβαλαν αίτηση. Η επιτροπή αποφασίζει να εξετάσει έναν-έναν, που επιλέγεται τυχαία, προκειμένου να επιλέξει τρεις από το σύνολο των υποψηφίων για να καλύψει τρεις θέσεις λογιστών. Υποτίθεται ότι 40% των υποψηφίων είναι ικανοί να καταλάβουν μία από αυτές τις θέσεις. Να βρεθεί η πιθανότητα οι θέσεις να καλυφθούν με τον πέμπτο εξεταζόμενο υποψήφιο.

3. Σ'ένα δοχείο υπάρχουν 100 στυλό, από τα οποία τα 8 δεν γράφουν και τα 92 γράφουν. Επιλέγουμε τυχαία 5 στυλό.
   Να βρεθεί η πιθανότητα να πάρουμε 3 στυλό να γράφουν και 2 να μη γράφουν.

4. Σε μια κλήρωση Lotto τοποθετούνται στην κληρωτίδα 49 σφαίρες αριθμημένες από το 1 έως το 49 και εκλέγονται στην τύχη 6 αριθμοί που κερδίζουν. Σε ένα δελτίο που έχουν σημειωθεί 20 αριθμοί, να υπολογιστεί
   α) η πιθανότητα να περιέχονται 4 αριθμοί που κερδίζουν
   β) Ποιο το αναμενόμενο πλήθος τυχερών αριθμών που θα περιέχονται στο δελτίο μας;

5. Ένα κιβώτιο περιέχει 100 βίδες εγχώριες και άλλες 200 ιδίου τύπου αλλά παραγόμενες σε άλλη χώρα στο εξωτερικό. Εάν 4 βίδες επιλέγονται τυχαία από το κιβώτιο και χωρίς επανατοποθέτηση,
   α) ποια η πιθανότητα ότι όλες είναι εγχώριες,
   β) ποια είναι η πιθανότητα ότι τουλάχιστον 2 είναι εγχώριες

6. Ο αριθμός των ενήλικων κατοίκων μιας πόλης είναι 75000, από τους οποίους οι 500 είναι οικονομολόγοι. Σε μια δειγματοληπτική έρευνα γίνεται τυχαία επιλογή 25 ενηλίκων χωρίς επανατοποθέτηση. Να υπολογισθεί η πιθανότητα το δείγμα αυτό να περιλαμβάνει το πολύ ένα οικονομολόγο.

10^{o} ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ενός βιβλίου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda=5$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα μια σελίδα να περιέχει 2 ακριβώς λάθη.

2. Από μια γέφυρα περνούν κατά μέσο όρο 300 αυτοκίνητα την ώρα. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι κατά τη διάρκεια 2 λεπτών, θα περάσουν από τη γέφυρα αυτή 3 αυτοκίνητα.

3. Οι πελάτες που φθάνουν σε ένα συγκεκριμένο τμήμα ενός καταστήματος ακολουθούν την κατανομή Poisson, με μέσο αριθμό 8 πελάτες ανά ώρα. Να βρεθεί η πιθανότητα σε μια δοσμένη ώρα να φτάσουν:
   i. Ακριβώς 8 πελάτες.
   ii. Το πολύ 3 πελάτες
   iii. Τουλάχιστον 5 πελάτες.

4. Ο αριθμός των μικροβίων X που βρίσκονται σ'ένα χώρο V είναι μια τ.μ. $X \approx P(\lambda)$. Να προσδιοριστεί ο λ, αν είναι $P(X>0)=0{,}999$.

5. Σε μια συγκεκριμένη αεροπορική πτήση που εξυπηρετείται από αεροπλάνο 80 θέσεων έχει παρατηρηθεί ότι 4 επιβάτες κατά μέσο όρο δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση. Ποια είναι η πιθανότητα άτομο που βρίσκεται (α) στη δεύτερη θέση και (β) στην πέμπτη θέση του καταλόγου αναμονής να ταξιδεύσει;

6. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα μια στήλη ρεύματος να αστοχήσει λόγω κακοκαιρίας είναι 0,00002. Σε μια περιοχή όπου υπάρχουν 100.000 στήλες, ποια η πιθανότητα να αστοχήσουν λόγω κακοκαιρίας:
   (α) τουλάχιστον 4 στήλες
   (β) ακριβώς 4 στήλες

7. Ας υποθέσουμε ότι η παραγωγή ενός βιομηχανικού προϊόντος γίνεται κάτω από στατιστικό έλεγχο ποιότητας ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli. Μια μονάδα του προϊόντος αυτού θεωρείται ελαττωματική αν δεν πληροί όλες τις καθορισμένες προδιαγραφές και η πιθανότητα γι'αυτό έστω ότι είναι p=0,01. Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε ένα κιβώτιο 20 μονάδων του προϊόντος αυτού να υπάρχει μια το πολύ ελαττωματική.

11^{o} ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1) Η τ.μ. Χ έχει <u>πυκνότητα πιθανότητας</u>:

$$f_x(x) = \begin{cases} 0.2 & -\theta < x < \theta \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

(α) Να βρεθεί η σταθερά θ (έτσι ώστε η $f_X(x)$ νάναι πυκνότητα πιθανότητας).
(β) Να βρεθούν οι πιθανότητες: $(i)\ P\{-1 \le X \le 2\}$, $(ii)\ P\{X \ge 1.5\}$
(γ) Να βρεθεί η σταθερά c τέτοια ώστε: $P\{X \ge c\} = 0.8$
(δ) Να βρεθεί η μέση τιμή EX ή E(X) και η διασπορά V(X) ή Var(X) της X

2) Έστω συνεχής τ.μ. Χ η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα [1,3] με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{a}{x^2}$$

Να υπολογίσετε: **i)** τη σταθερά α, **ii)** τη συνάρτηση κατανομής F, και **iii)** την πιθανότητα P(X>2).

3) Η τ.μ. Χ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} kx & 0 < x \le \frac{1}{2} \\ k(1-x) & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & x \le 0 \text{ ή } x \ge 1 \end{cases}$$

i) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού *k*.
ii) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right)$.
iii) Να δειχθεί ότι τα ενδεχόμενα $A = \left\{X < \frac{1}{2}\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right\}$ είναι ανεξάρτητα.

4) Η μηνιαία κατανάλωση πετρελαίου για θέρμανση μιας πολυκατοικίας σε χιλιάδες λίτρα είναι τυχαία μεταβλητή Χ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \alpha\nu \quad x \in (0,1) \\ 0, & \alpha\nu \quad x \notin (0,1) \end{cases}$$

Ποια χωρητικότητα πρέπει να έχει η δεξαμενή του λέβητα ώστε η πιθανότητα να εξαντληθεί το πετρέλαιο σε ένα μήνα να είναι 1% ;

12^{o} ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Έστω ότι ο συρμός φθάνει σε συγκεκριμένο σταθμό του υπογείου σιδηρόδρομου κάθε 10 λεπτά, αρχίζοντας τα δρομολόγια του στις 5 π.μ. Αν η ώρα άφιξης ενός επιβάτη στο σταθμό ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο χρονικό διάστημα [7:20πμ–7:40πμ], να υπολογιστούν οι πιθανότητες να περιμένει τον συρμό

(α) το πολύ 4 λεπτά

(β) τουλάχιστον 7 λεπτά

2. Ένας φοιτητής που χρησιμοποιεί τον ηλεκτρικό σιδηρόδρομο για να μεταβεί στο Πανεπιστήμιο, παίρνει κάθε πρωϊ το τρένο που ξεκινάει από την αφετηρία στις 8:00 π.μ. Ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια του δρομολογίου μέχρι το σταθμό αποβίβασης του φοιτητή είναι τ.μ. που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [58, 63] (οι αριθμοί εκφράζουν min). Αν ο φοιτητής χρειάζεται επιπλέον 15 min για να περπατήσει από το σταθμό αποβίβασης μέχρι την αίθουσα διδασκαλίας, να υπολογιστούν:

(α) ποια η πιθανότητα να φτάσει στην αίθουσα μετά την έναρξη του μαθήματος;

(β) ποια η πιθανότητα να φτάσει στην αίθουσα τουλάχιστον 1 min πριν από την έναρξη του μαθήματος;

(γ) ο αναμενόμενος χρόνος άφιξης του φοιτητή στην αίθουσα διδασκαλίας;

Θεωρούμε ότι η διδασκαλία αρχίζει στις 9:15 π.μ.

3. Έστω X~N(5,16).

(α) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X>6)$ και $P(3\leq X\leq 6)$

(β) Να βρεθεί η τιμή c, για την οποία $P(|X-5|<c)=0.95$

4. Στον πρόσφατο διαγωνισμό του ΑΣΕΠ στο τεστ γενικών γνώσεων και δεξιοτήτων παρατηρήθηκε ότι τα αποτελέσματα ακολουθούσαν κανονική κατανομή με μέση τιμή **μ** και τυπική απόκλιση **σ**. Το 3.5% των αποτελεσμάτων είχαν βαθμολογία πάνω από 85 (η βαθμολογία κυμαινόταν από 0 έως 100), ενώ το 6.1% είχαν βαθμολογία κάτω από 25.

(α) Να βρεθούν οι τιμές των μ και σ.

(β) Αν το κράτος αποφασίσει να προσλάβει το 10% των ατόμων που συγκέντρωσαν την υψηλότερη βαθμολογία να υπολογίσετε πάνω από πια βαθμολογία θα πρέπει να έχει γράψει κάποιος ώστε να ανήκει στην κατηγορία αυτή.

13^o ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1) Η ποσότητα καφέ που περιέχεται σε πακέτα 500 gr., μιας συγκεκριμένης εταιρείας, είναι τ.μ. Χ που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 500 gr και διακύμανση 25 gr^2.

α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο πακέτο να περιέχει τουλάχιστον 490 gr καφέ,

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο πακέτο να περιέχει ποσότητα καφέ μεταξύ 490 gr και 505 gr,

γ) Αν κάποιος αγοράσει τρία πακέτα να υπολογιστεί η πιθανότητα τα δύο από τα τρία πακέτα να περιέχουν το πολύ 490 gr και το άλλο να περιέχει τουλάχιστο 490 gr καφέ

2) Οι τιμές της χοληστερόλης σε κάποιο πληθυσμό είναι τιμές τ.μ. X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 200 gr/dl και τυπική απόκλιση 65 gr/dl. Να υπολογιστεί:

α. το ποσοστό των ατόμων με μετρήσεις χοληστερόλης μεταξύ 150 και 300 gr/dl.

β. η τιμή χοληστερόλης για την οποία το 80% του πληθυσμού να έχει μικρότερη μέτρηση από αυτήν.

3) Είναι γνωστό ότι ο δείκτης νοημοσύνης του πληθυσμού των φοιτητών περιγράφεται από κανονική κατανομή με μέση τιμή 100 και τυπική απόκλιση 10 (δηλαδή μ=100 και $\sigma^2=10^2$).

i) Ποιο ποσοστό φοιτητών έχει δείκτη νοημοσύνης μεταξύ 90 και 110;

ii) Ένας φοιτητής ισχυρίζεται ότι ανήκει στο 25% των εξυπνότερων φοιτητών. Για να επαληθεύσει τον ισχυρισμό του ποια θα πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή του δείκτη νοημοσύνης του;

Για διευκόλυνση δίνεται ότι, $P(z<1)=\Phi(1)=0.8413$, $P(z<0.67)=\Phi(0.67)=0.75$ όπου $Z\sim N(0,1)$

4) Έστω Χ μια τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$ και που έχει την ιδιότητα $P(X>\alpha)=\frac{1}{2}P(X\leq\alpha)$.

α. Εάν γνωρίζετε ότι για την κατανομή $N(0,1)$ ισχύει $\Phi(0.43)=\frac{2}{3}$, να δείξετε ότι $\alpha-0.43\sigma=\mu$.

β. Αν οι τιμές του σιδήρου στο αίμα των ανδρών ενός πληθυσμού ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ = 110 mgr/dl και διακύμανση σ^2 = 25 mgr^2/dl^2, να βρεθεί η τιμή α του σιδήρου για την οποία το ποσοστό των ανδρών που την υπερβαίνει είναι το μισό του ποσοστού που δεν την υπερβαίνει.