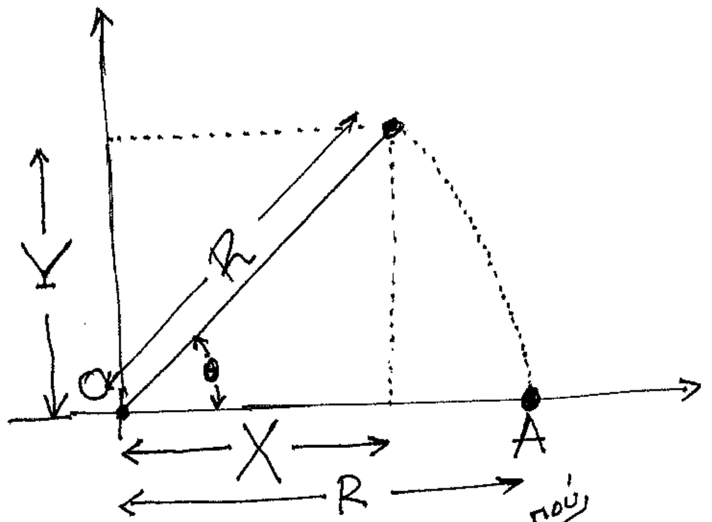
Πχ.



Ράβδος μήκους $OA=R$ που έχει σφαίρα στην άκρη σπρώχνεται με δύναμη και διαγράφεται γωνία Θ με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{\Theta}(\theta)=\begin{cases} \frac{2}{\pi} & 0<\theta<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η αναμενόμενη θέση $(E(X), E(Y))$ στην οποία θα βρεθεί η σφαίρα.

Απάντηση: $X=R\,\text{συν}\,\Theta \qquad Y=R\,\text{ημ}\,\Theta$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} R\,\text{συν}\theta\, f_{\Theta}(\theta)\,d\theta=\int_{0}^{\pi/2} R\,\text{συν}\theta\,\frac{2}{\pi}\,d\theta$$

$$=\frac{2R}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\text{συν}\theta\,d\theta=\frac{2R}{\pi}\left[\text{ημ}\theta\right]_{0}^{\pi/2}=\frac{2R}{\pi}\left(\text{ημ}\frac{\pi}{2}-\text{ημ}0\right)=\frac{2R}{\pi}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} R\,\text{ημ}\theta\, f_{\Theta}(\theta)\,d\theta=\int_{0}^{\pi/2} R\,\text{ημ}\theta\,\frac{2}{\pi}\,d\theta=\frac{2R}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\text{ημ}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{2R}{\pi}\left[-\text{συν}\theta\right]_{0}^{\pi/2}=\frac{2R}{\pi}$$

Πχ Έστω X τ.μ. συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\theta^k}{x^{k+1}} & x \geq \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases} \qquad k,\theta \qquad \text{"κατανομή Pareto"}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{x k\theta^k}{x^{k+1}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{k}{k-1}\theta, & k>1 \\ \theta \displaystyle\int_{\theta}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \theta\left[\ln x\right]_0^{+\infty}, & k=1 \end{cases}$$

δεν υπάρχει $E(X)$

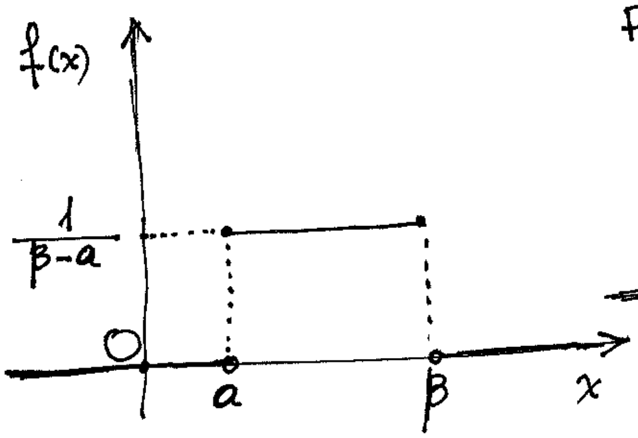
Οι Κυριότερες Συνεχείς Κατανομές

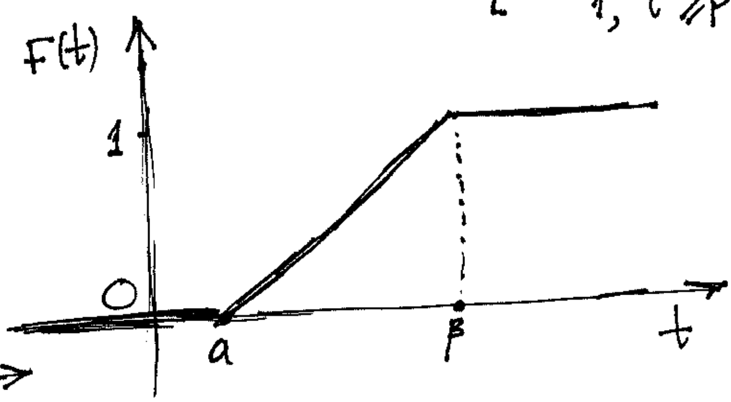
Ομοιόμορφη Κατανομή: Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση ~~κατανομής~~ πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - a} & a \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a,\beta]$ και συμβολίζεται με $\mathcal{U}(a,\beta)$.

Συνάρτηση Κατανομής της X: $F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0, & t<a \\ \dfrac{t-a}{\beta-a}, & a \leq t \leq \beta \\ 1, & t \geq \beta \end{cases}$





Πρόταση: $X \sim \mathcal{U}(a,\beta)$. $E(X)=\frac{a+\beta}{2}$ $V(X)=\frac{(\beta-a)^2}{12}$

Απόδειξη: $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_a^\beta x \frac{1}{\beta-a}dx = \frac{1}{\beta-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^\beta$

$$= \frac{\beta^2-a^2}{2}\,\frac{1}{\beta-a} = \frac{a+\beta}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} \underbrace{x^2 f(x)dx}_{\to 0} + \int_a^\beta x^2 f(x)dx + \int_\beta^{+\infty} \underbrace{x^2 f(x)dx}_{\to 0}$$

$$= \int_a^\beta x^2 \cdot \frac{1}{\beta-a}dx = \frac{1}{\beta-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^\beta = \frac{1}{\beta-a}\,\frac{\beta^3-a^3}{3}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\beta-a}}\,\frac{\cancel{(\beta-a)}(a^2+a\beta+\beta^2)}{3} = \frac{a^2+a\beta+\beta^2}{3}$$

Συνεπώς: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{a^2+a\beta+\beta^2}{3} - \left(\frac{a+\beta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(\beta-a)^2}{12}$$

πχ. Ένας φοιτητής παίρνει το τρένο για να πάει στο Πανεπιστήμιο στις 8:00 πμ. Η διάρκεια (σε min) X του δρομολογίου $\sim \mathcal{U}(58,63)$.

$P(X>60) = ;$ $\quad P(X \leq 59) = ;$ $\quad E(X) = ;$

Απάντηση: Η συνάρτηση πυκνότητας της X έχει τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{63-58}, & 58 \leq x \leq 63 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5} & 58 \leq x \leq 63 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 58 \\ \dfrac{t-58}{63-58} & 58 \leqslant t < 63 \\ 1 & t \geqslant 63 \end{cases}$$

$$P(X > 60) = 1 - P(X \leqslant 60) = 1 - F(60)$$
$$= 1 - \frac{60-58}{63-58} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(X \leqslant 59) = F(59) = \frac{59-58}{63-58} = \frac{1}{5}$$

Μέσος Χρόνος Δρομολογίου $= E(X) = \dfrac{58+63}{2} = 60.5$ min

<u>Κανονική Κατανομή</u>:

<u>Ορισμός</u>: Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 > 0$ αν η συνάρτηση πυκνότητας f της X δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

<u>Συμβολισμός</u>: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f(x) \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ (προφανώς ισχύει)

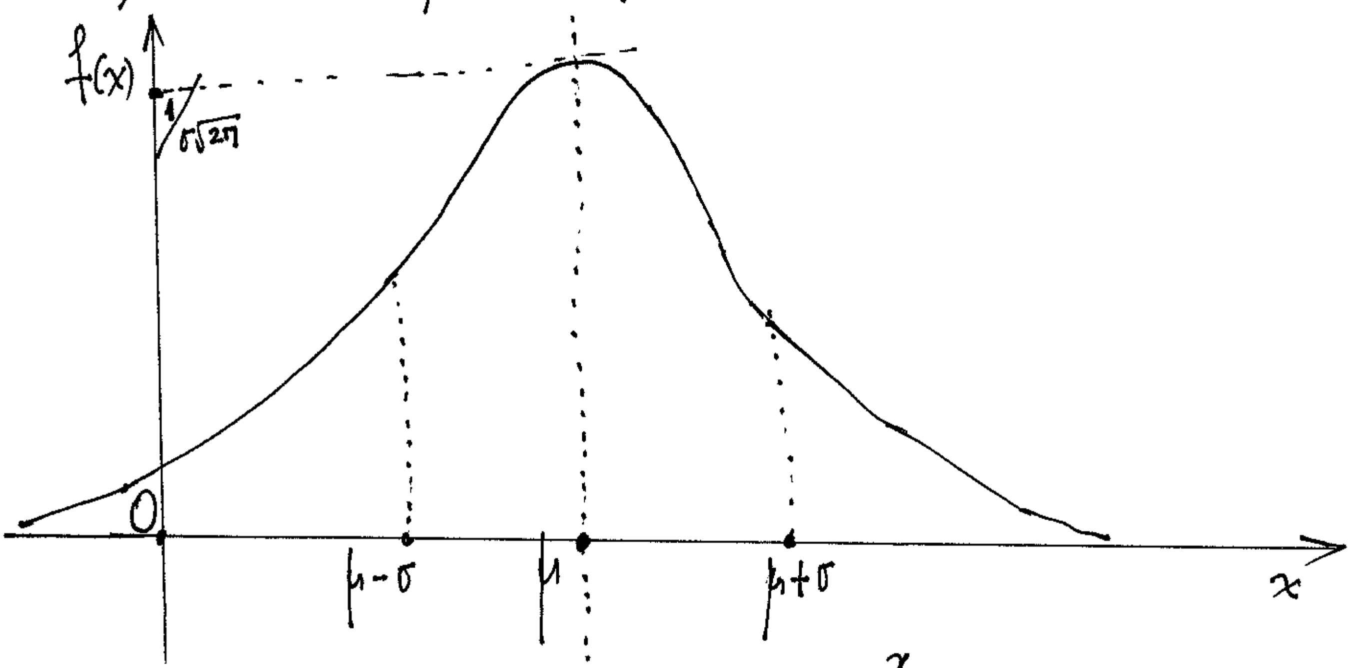
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ (χρειάζονται γνώσεις διπλών ολοκληρωμάτων)

Πρόταση:

α) $\max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

β) Η συνάρτηση f είναι συμμετρική γύρω από το σημείο μ, δηλαδή $f(\mu+x)=f(\mu-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

γ) Τα σημεία $\mu\pm\sigma$ είναι σημεία καμπής.



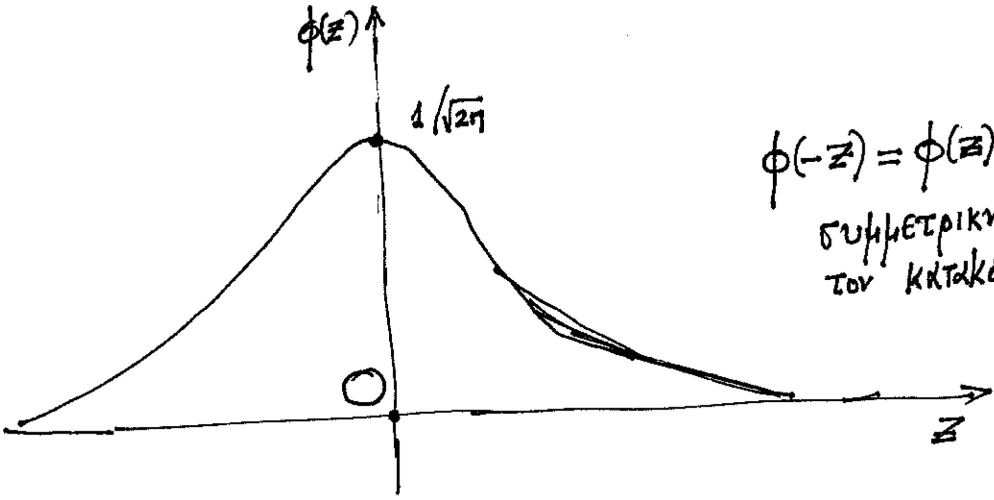
Η συνάρτηση κατανομής $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $x\in\mathbb{R}$ δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή.

Πρόταση: Αν η τ.μ. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ τότε

$$E(X)=\mu \quad \text{και} \quad V(X)=\sigma^2$$

<u>Ορισμός</u>: Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή Z λέμε ότι ακολουθεί την <u>τυποποιημένη κανονική κατανομή</u> αν $Z \sim N(0,1)$ δηλαδή η Z ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu=0$ και $\sigma^2=1$. Η συνάρτηση πυκνότητας της Z έχει τύπο:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}$$



$\phi(-z) = \phi(z), \quad z \in \mathbb{R}$

συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα

Υπάρχουν πίνακες τιμών της συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ της $Z \sim N(0,1)$. (Στο βιβλίο του Μ. Κούτρα υπάρχει ο πίνακας Π6 στην σελίδα 852).

<u>Επίσης ισχύει ότι</u>: $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1, \quad z \in \mathbb{R}$

<u>π.χ.</u> $\Phi(1.5) = 0.9332$

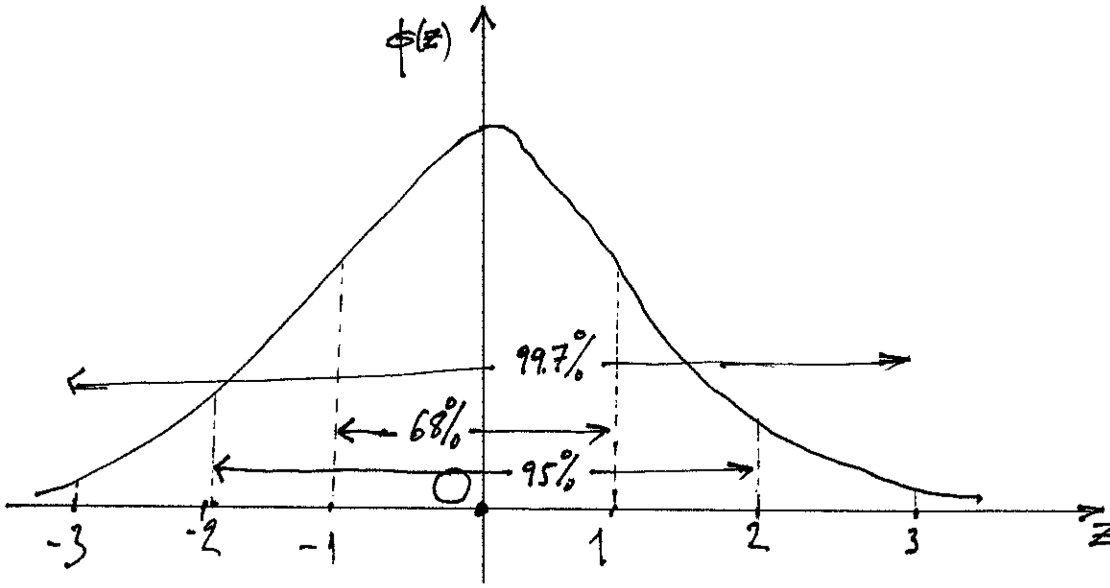
$\Phi(0.5) = 0.6915$

$\Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

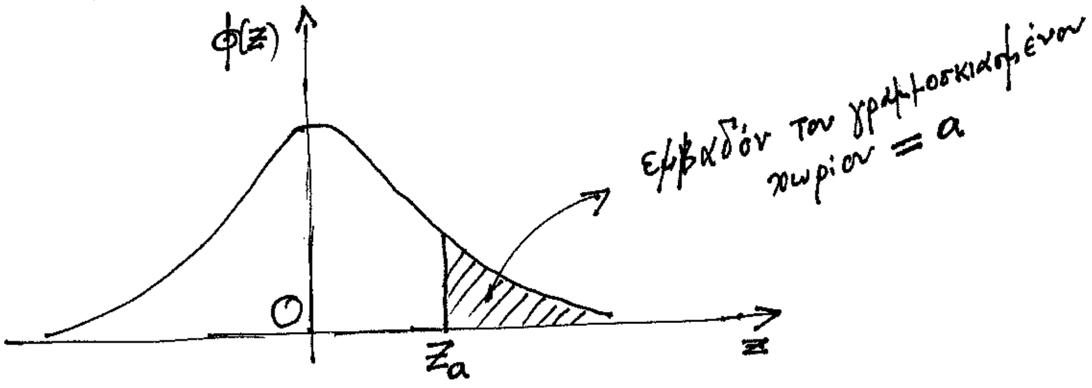
$$P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)]$$
$$= 2 * \Phi(1) - 1 = 2 * 0.8413 - 1 = 0.6826 \simeq 68\%$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)]$$
$$= 2 * \Phi(2) - 1 = 2 * 0.9772 - 1 = 0.9544 \simeq 95\%$$

$$P(-3 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - [1 - \Phi(3)]$$
$$= 2 * \Phi(3) - 1 = 2 * 0.9987 - 1 = 0.9974 \simeq 99.7\%$$

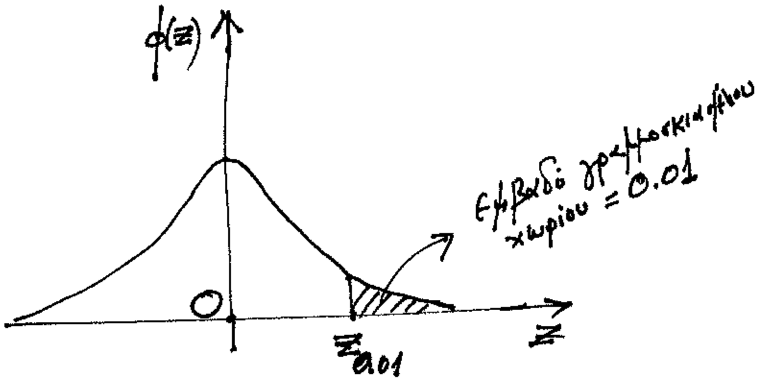


<u>Ορισμός</u>: Αν $Z \sim N(0,1)$ και $0 < a < 1$. Ο αριθμός z για τον οποίον $P(Z > z) = a$, $0 < a < 1$ ονομάζεται <u>άνω a-(ποσοστιαίο) σημείο</u> της τυποποιημένης κανονικής κατανομής Z.
Συμβολίζεται με z_a



πχ. Αν $a = 0.01$. $z_{0.01} = ?$

$$P(Z > z) = 0.01$$
$$1 - P(Z \leq z) = 0.01$$
$$1 - \Phi(z) = 0.01$$
$$\Phi(z) = 0.99$$



Από πίνακα: $z \simeq 2.33$

Συνεπώς $z_{0.01} \simeq 2.33$

Από πίνακα έχουμε επίσης ότι: $z_{0.05} \simeq 1.645$, $z_{0.1} \simeq 1.28$

Πρόταση: Αν η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Απόδειξη: Έστω $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Η συνάρτηση κατανομής της Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y\right) = P(X \leq \mu + \sigma y) = F_X(\mu + \sigma y),$$

όπου F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της X

Παραγωγίζοντας ως προς y έχουμε:

$$\underbrace{f_Y(y)}_{\text{συνάρτηση πυκνότητας της } Y} = F_Y'(y) = \sigma \underbrace{f_X}_{\text{συνάρτηση πυκνότητας της } X}(\mu + \sigma y) = \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu+\sigma y-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \underbrace{\varphi(y)}_{\text{συνάρτηση πυκνότητας της } N(0,1)}$$

Επομένως: $Y \sim N(0,1)$

<u>Σημείωση</u>: Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε:

$$P(a \leq X \leq \beta) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \quad a \leq \beta.$$

$$P(X \leq \beta) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right).$$

<u>πχ.</u> Έστω X = διάρκεια (σε ημέρες) κύησης μιας γυναίκας

$$X \sim N(\mu = 270, \sigma^2 = 30^2)$$

όπου $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

P(να γεννηθεί ένα παιδί πριν την συμπλήρωση του 7ου μήνα)

$$= P(X < 210) = P\left(\frac{X-270}{30} < \frac{210-270}{30}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2)$$
$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \simeq 2\%$$

$$P(240 < X < 270) = P\left(\frac{240-270}{30} < \frac{X-270}{30} < \frac{270-270}{30}\right)$$
$$= P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1)]$$
$$= 0.5 - 1 + 0.8413 = 0.3413 \simeq 34\%$$

$\Phi(0) = 0.5$
$\Phi(1) = 0.8413$

Σημείωση: Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε:

$$P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = P\left(-1 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 1\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 68\%$$

$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) = P\left(-2 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 95\%$$

$$P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) = P\left(-3 \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq 3\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \simeq 99.7\%$$

Από την τρίτη από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι, αν $\mu > 3\sigma$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ για τυχαίες μεταβλητές X που από την φύση τους παίρνουν μόνον θετικές τιμές, όπως χρόνος ζωής, εμβαδά, όγκοι, χρονικές διάρκειες συγκεκριμένων φαινομένων κλπ.

<u>πχ.</u> Έστω X = χρόνος ζωής (σε min) ενός φωτογραφικού φιλμ. Υποθέτουμε ότι $X \sim N(30, 1.2^2)$

α) $P(X > 33) = 1 - P(X \leq 33) = 1 - P\left(\frac{X-30}{1.2} \leq \frac{33-30}{1.2}\right)$

$= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062 \simeq 0.6\%$

β) $P(X \leq 28) = P\left(\frac{X-30}{1.2} \leq \frac{28-30}{1.2}\right) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67)$

$= 0.0475 \simeq 5\%$

γ) Να βρεθεί η πιθανότητα σε 10 φιλμ τουλάχιστον τα 2 να εμφανιστούν σε χρόνο λιγότερο των 28 min.

Y = # φιλμ από τα 10 με χρόνο εμφάνισης λιγότερο από 28 min

$Y \sim b(\nu = 10,\ p = P(X \leq 28) = 0.05)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$

$\simeq 1 - \binom{10}{0} 0.05^0 * 0.95^{10} - \binom{10}{1} 0.05^1 * 0.95^9 \simeq 0.086$

<u>πχ.</u> Έστω X = όγκος του αναψυκτικού (σε lt) που τοποθετεί μία αυτόματη μηχανή σε μπουκάλι σε 1.5 lt

$$X \sim N(\mu, 0.01^2)$$

Ποιά πρέπει να είναι η τιμή του μ ώστε μόνο στο 1‰ των περιπτώσεων η ποσότητα που τοποθετείται να υπερβαίνει τα 1.6 lt;

<u>Απάντηση:</u> Πρέπει $P(X > 1.6) = 0.001$

$$1 - P(X \leq 1.6) = 0.001$$

$$P(X \leq 1.6) = 0.999$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1.6-\mu}{\sigma}\right) = 0.999$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{0.01} \leq \frac{1.6-\mu}{0.01}\right) = 0.999$$

$$\Phi\left(\frac{1.6-\mu}{0.01}\right) = 0.999$$

Από πίνακα βλέπουμε ότι $\Phi(3.09) = 0.999$

<u>Συνεπώς:</u> $\dfrac{1.6-\mu}{0.01} = 3.09 \Rightarrow \mu = 1.591$

<u>Σημείωση:</u> Αν $X \sim b(\nu, p)$ τότε για μεγάλες τιμές του ν <u>κατά προσέγγιση</u> ισχύει ότι:

$$\frac{X - \nu p}{\sqrt{\nu p q}} \sim N(0,1)$$

Οπότε:

$$P(a<X<\beta)=P\left(\frac{a-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}<\frac{X-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}<\frac{\beta-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right)$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{\beta-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right)$$

Η πιό πάνω προσέγγιση μπορεί να βελτιωθεί (διόρθωση συνέχειας):

$$P(i\leq X\leq j)\simeq \Phi\left(\frac{j+0.5-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right)-\Phi\left(\frac{i-0.5-\nu p}{\sqrt{\nu pq}}\right)$$

$i<j$ ακέραιοι αριθμοί

Πχ. Το ποσοστό θνησιμότητας για άτομα που προσβάλλονται από μία ασθένεια είναι 20%. Ποιά είναι η πιθανότητα σε 100 άτομα που έχουν προσβληθεί από την ασθένεια να έχουμε τουλάχιστον 26 θανάτους;

Απάντηση: Έστω X = # θανάτων στα 100 προσβληθέντα άτομα

$$X\sim b(\nu=100,\ p=0.2)$$

$$P(X=k)=\binom{100}{k}0.2^{k}*0.8^{100-k},\quad k=0,\dots,100$$

$$P(X\geq 26)=\sum_{k=26}^{100}\binom{100}{k}0.2^{k}*0.8^{100-k}=0.0875$$ "δύσκολος υπολογισμός"

Το $\nu=100$ είναι αρκετά μεγάλο, οπότε

$Z\sim N(0,1)$

$$P(X\geq 26)\simeq P\left(Z\geq\frac{(26-0.5)-100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\right)$$

$$=P(Z\geq 1.375)=1-\Phi(1.375)=1-0.9154=0.0845$$

(διαφέρει ελάχιστα από την ακριβή τιμή)

"διόρθωση συνέχειας"

Η πιό πάνω πιθανότητα χωρίς την διόρθωση συνεχείας είναι κατα προσέγγιση ιση με:

$$P\left(Z \geqslant \frac{26 - 100*0.2}{\sqrt{100*0.2*0.8}}\right) = P(Z \geqslant 1.5) = 1-\Phi(1.5)$$
$$= 0.0668$$

Σημείωση: Έστω τ.μ. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda>0$. Για μεγάλες τιμές του $\lambda>0$ προσεγγίζεται από την $N(\mu,\sigma^2)$ με $\mu = E(X) = \lambda$ και $\sigma^2 = V(X) = \lambda$. Οπότε:

$$P(a<X<\beta) \simeq \Phi\left(\frac{\beta-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad a\leqslant\beta.$$

Χρησιμοποιώντας διόρθωση συνεχείας:

$$P(i\leqslant X\leqslant j) \simeq \Phi\left(\frac{j+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{i-0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$i\leqslant j$ δύο μη αρνητικοί ακέραιοι.

Εκθετική Κατανομή

Ορισμός: Λέμε ότι η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda>0$ αν έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

Συμβολισμός: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Προφανώς: $f(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}$

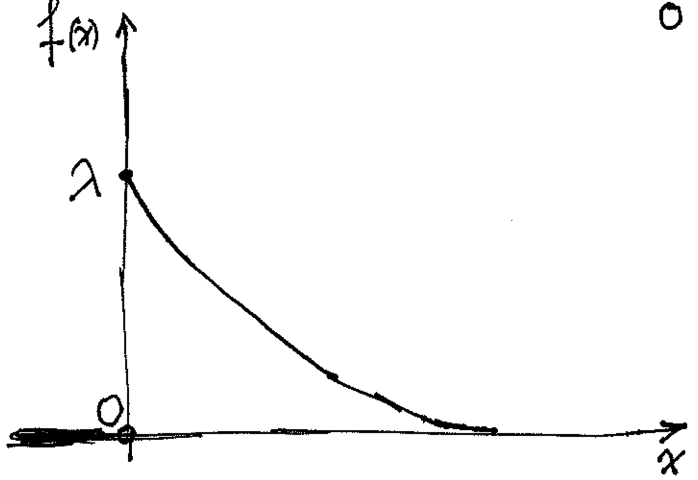
Επίσης:

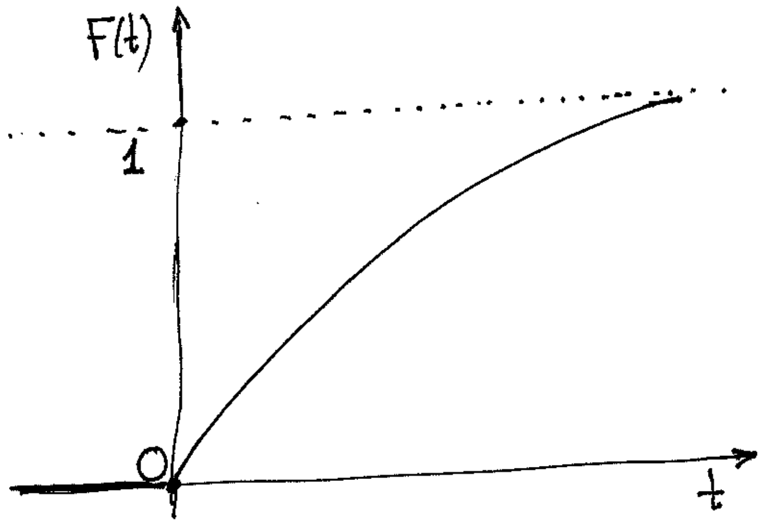
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \cancel{f(x)}dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx, & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-e^{-\lambda t}, & t \geq 0. \end{cases}$$





Παραδείγματα τ.μ. που ακολουθούν την εκθετική κατανομή:

Χρόνος άφιξης του επόμενου πελάτη

Χρόνος που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο ατυχημάτων σ' ένα σημείο στην εθνική οδό

<u>Πρόταση</u>: Αν $X \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$, τότε

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{και} \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

<u>Απόδειξη</u>: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \underbrace{f(x)}_{0} dx + \int_{0}^{+\infty} x f(x) dx$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\infty} x (e^{-\lambda x})' dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= -0 - (-0) + \frac{1}{\lambda} \overbrace{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}^{=1} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -\int_0^{\infty} x^2 (e^{-\lambda x})' dx = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx$$

$$= -0 - (-0) + 2\frac{1}{\lambda} \overbrace{\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx}^{1/\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

<u>πχ.</u> Έστω X = χρόνος ζωής μιας συσκευής. Υποθέτουμε ότι $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

a) (i) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο χρόνος ζωής να υπερβεί τον μέσο χρόνο ζωής της.

<u>Απάντηση</u>: $P(X > E(X)) = P(X > \frac{1}{\lambda}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{\lambda}) = 1 - F(\frac{1}{\lambda})$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}}) = e^{-1} \simeq 0.3679 \simeq 37\%$$

(ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο χρόνος ζωής να υπερβεί το διπλάσιο του μέσου χρόνου ζωής της.

<u>Απάντηση</u>: $P(X > 2E(X)) = P(X > \frac{2}{\lambda}) = 1 - P(X \leq \frac{2}{\lambda}) = 1 - F(\frac{2}{\lambda})$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda \frac{2}{\lambda}}) = e^{-2} \simeq 0.1353 \simeq 14\%$$

β) Να βρεθεί ο χρόνος εκείνος των οποίου υπερβαίνουν τα 95% των παραγόμενων συσκευών.

<u>Απάντηση</u>: Ζητάμε $x_0>0$ με την ιδιότητα

$$P(X>x_0)=0.95$$

Η πιό πάνω σχέση ισοδυναμεί με

$$1-P(X\leq x_0)=0.95$$

$$\Leftrightarrow \quad 1-F(x_0)=0.95$$

<u>Γνωρίζουμε ότι</u>: $F(x_0)=1-e^{-\lambda x_0}$

<u>Οπότε</u>: $e^{-\lambda x_0}=0.95 \Rightarrow -\lambda x_0=\ln(0.95)$

$$\Rightarrow x_0=-\frac{1}{\lambda}\ln(0.95)\simeq\frac{0.05}{\lambda}$$

<u>Πρόταση</u>: Αν $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda>0$ τότε

$$P(X>s+t\mid X>s)=P(X>t)$$ "ιδιότητα έλλειψης μνήμης"

<u>Απόδειξη</u>: $P(X>s+t\mid X>s)=\dfrac{P(X>s+t,X>s)}{P(X>s)}$

$$=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(X>t)$$

<u>Πχ</u>. Έστω X = χρόνος (σε min) μεταξύ δύο διαδοχικών εκπομπών σωματιδίων από μία ραδιενεργή πηγή. $X\sim\mathcal{E}(\lambda=\frac{1}{60})$

α) $P(X>45)=1-P(X\leq 45)=1-F(45)=1-(1-e^{-45/60})=e^{-3/4}\simeq 47\%$

β) $P(X>45+45\mid X>45)=P(X>45)=e^{-3/4}$.