Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού

Μιχάλης Ζαζάνης
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

23 Απριλίου 2019

Κεφάλαιο 1

Γραμμικός Προγραμματισμός

1.1 Δομή των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού είναι η βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) ενός γραμμικού κριτηρίου κάτω από γραμμικούς περιορισμούς. Για παράδειγμα, αν x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, είναι μεταβλητές με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς, ζητείται να μεγιστοποιηθεί το κριτήριο

$$
\begin{array}{l}
\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array} \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
\tag{1.1}
$$

Η μορφή αυτή γραμμικού προγράμματος ονομάζεται πρόβλημα της παραγωγής και έχει την εξής σημασία. Έστω ότι έχουμε την δυνατότητα να παράγουμε n διαφορετικά προϊόντα, P_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, με την βοήθεια m πρώτων υλών, M_i, $i = 1, \ldots, m$, και έστω ότι το προϊόν P_j πωλείται με τελικό κέρδος c_j. Έστω επίσης ότι για την παραγωγή του προϊόντος P_j απαιτούνται a_{ij} μονάδες της πρώτης ύλης M_i και ότι συνολικά υπάρχουν διαθέσιμες b_i μονάδες της που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για όλα τα προϊόντα. Τότε το γραμμικό πρόγραμμα (1.1) περιγράφει το βέλτιστο μείγμα παραγωγής προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το κέρδος. Παρατηρείστε τον περιορισμό μη αρνητικότητας για της μεταβλητές x_j οι οποίες περιγράφουν τον αριθμό των μονάδων κάθε προϊόντος που θα παραχθεί.

Μια διαφορετική μορφή γραμμικού προγράμματος είναι η ακόλουθη

$$
\begin{array}{l}
\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & \geq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m
\end{array} \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
\tag{1.2}
$$

Το παραπάνω πρόγραμμα ονομάζεται πρόγραμμα της δίαιτας και έχει την εξής σημασία. Αν έχουμε διαθέσιμα n διαφορετικά είδη τροφίμων (π.χ. ρύζι, μακαρόνια, κοτόπουλο, γάλα, πορτοκάλια κ.λπ.) με κόστος ανά μονάδα c_j, $j = 1, \ldots, n$ για το είδος τροφίμου j, και m διαφορετικά θρεπτικά συστατικά (π.χ. βιταμίνες A, B, C, θερμίδες, ιχνοστοιχεία κ.λπ.) για τα οποία υπάρχουν ελάχιστες ημερίσιες δόσεις τις οποίες πρέπει να παίρνει κανείς (b_i για το θρεπτικό συστατικό i), τότε το γραμμικό πρόγραμμα (1.2) περιγράφει την βέλτιστη ποσότητα από κάθε τρόφιμο έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος και ταυτόχρονα να πληρούνται οι διατροφικοί περιορισμοί. (Στην πράξη θα μπορούσε να θέση κανείς και ανισοτικούς περιορισμούς της αντίστροφης φοράς, π.χ. για τον αριθμό των θερμίδων.)

Οι παραπάνω μορφές γραμμικών προγραμμάτων αντικατοπτρίζουν διαφορετικές οπτικές γωνίες σε ότι αφορά τις εφαρμογές και όχι μαθηματικές διαφορές. Δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ της ελαχιστοποίησης και της μεγιστοποίησης ενός γραμμικού κριτηρίου αφού, για παράδειγμα, η μεγιστοποίηση του $x_1+3x_2-5x_3$ είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του $-x_1 - 3x_2 + 5x_3$ (που είναι το αρνητικό του αρχικού). Επίσης, δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στους περιορισμούς του (1.1) και σε εκείνους του (1.2) αφού π.χ. ο $x_1 + x + 2 + 6x_3 + x_4 \geq 12$ είναι ισοδύναμος με τον $-x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 \leq 12$. Κάτι που είναι λιγότερο προφανές είναι ότι οι ανισοτικοί περιορισμοί μπορούν επίσης να αντικατασταθούν από ισότητες. Για παράδειγμα το γραμμικό πρόγραμμα

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\max & \multicolumn{8}{l}{4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4} \\
s.t. & & & & & & & & \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & \leq & 25 \\
 & & 7x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & \leq & 45 \\
4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 10
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

μπορεί να γραφεί και με περιορισμούς ισότητας με την χρήση των λεγομένων μεταβλητών χαλαρότητας ως εξής

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & \multicolumn{12}{l}{4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4} \\
s.t. & & & & & & & & & & & & \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & + & s_1 & & & = & 25 \\
 & & 7x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & + & s_2 & & = 45 \\
4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & + \ s_3 & = & 10
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.$$

Παρατηρείστε ότι οι ανισοτικοί περιορισμοί στο παραπάνω πρόβλημα παραγωγής έχουν μεταβληθεί σε ισοτικούς με την χρήση των μεταβλητών χαλαρότητας s_i οι οποίες είναι μη αρνητικές και περιγράφουν το ποσό της πρώτης ύλης i που μένει αχρησιμοποίητη.

Ένα οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού λέγεται ότι έχει τεθεί σε *τυποποιημένη μορφή* αν έχει την μορφή

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\min & \multicolumn{11}{l}{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n} \\
s.t. & & & & & & & & & & & \\
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
\tag{1.3}
$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Όπως είδαμε, οποιοδήποτε γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να τεθεί σε τυποποιημένη μορφή Το γραμμικό προόβλημα (1.1) μπορεί να τεθεί σε τυποποιημένη μορφή με την βοήθεια των μεταβλητών χαλαρότητας και να πάρουμε το εξής πρόγραμμα

$$
\begin{array}{llllllllllll}
\max & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & & & & & & & & & & \\
s.t. & & & & & & & & & & & \\
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1j}x_j & \cdots & +a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2j}x_j & \cdots & +a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & & \leq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & \cdots & +a_{ij}x_j & \cdots & +a_{in}x_n & & & +x_{n+i} & & \leq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mj}x_j & \cdots & +a_{mn}x_n & & & & +x_{n+m} & \leq & b_m \\
\end{array}
$$

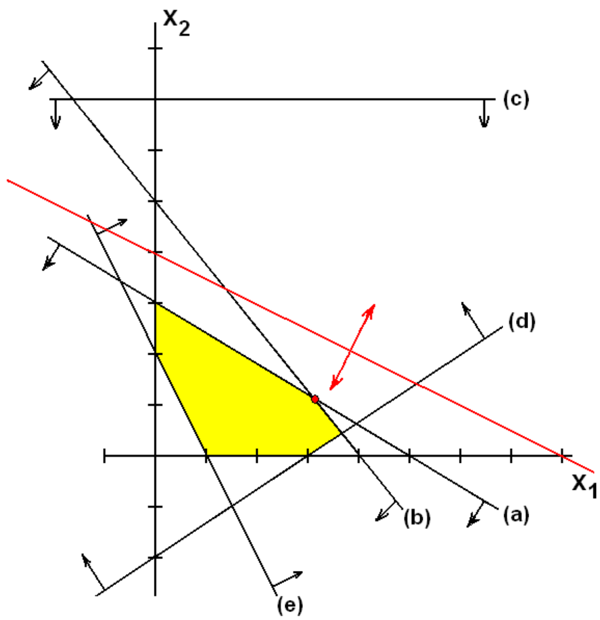
$$
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+m. \tag{1.4}
$$

1.2 Γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης

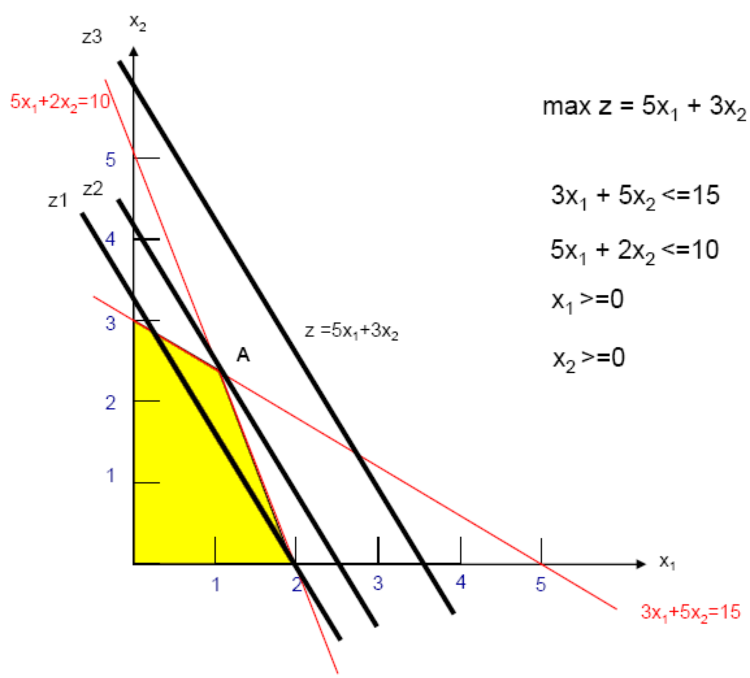
$$
\begin{array}{lllllll}
\max & x_1 + 2x_2 & & & & & \\
s.t. & & & & & & \\
3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 & & (a) \\
5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & & (b) \\
 & & x_2 & \leq & 7 & & (c) \\
2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 & & (d) \\
2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & & (e) \\
x_1 & & & \geq & 0 & & (f) \\
 & & x_2 & \geq & 0 & & (g)
\end{array} \tag{1.5}
$$

Όπως μπορεί να δει κανείς από την γραφική ανάλυση του σχήματος 1 η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου επιτυγχάνεται για $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, και είναι ίση με 6. Η εφικτή περιοχή στην οποία ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος φαίνεται σκιασμένη.

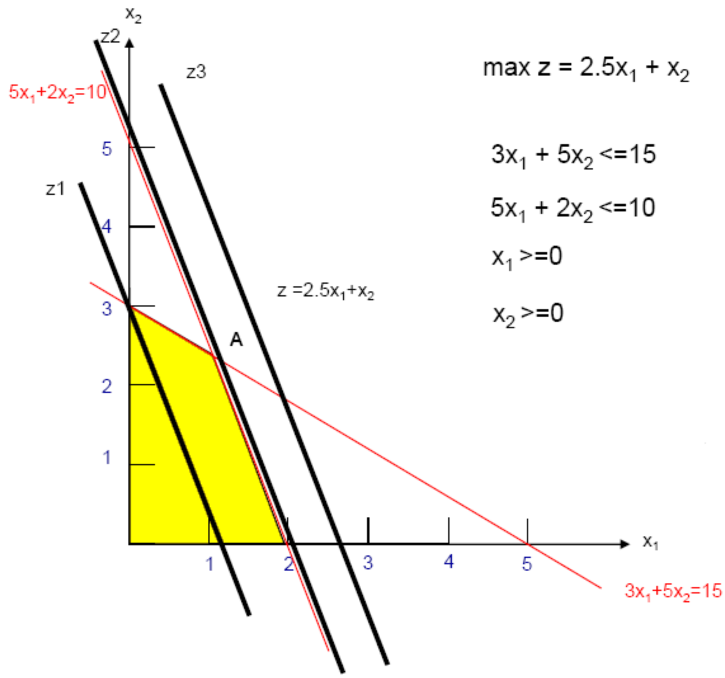


Σχήμα 1: Γραφική αναπαράσταση του προβλήματος μεγιστοποίησης (1.5)

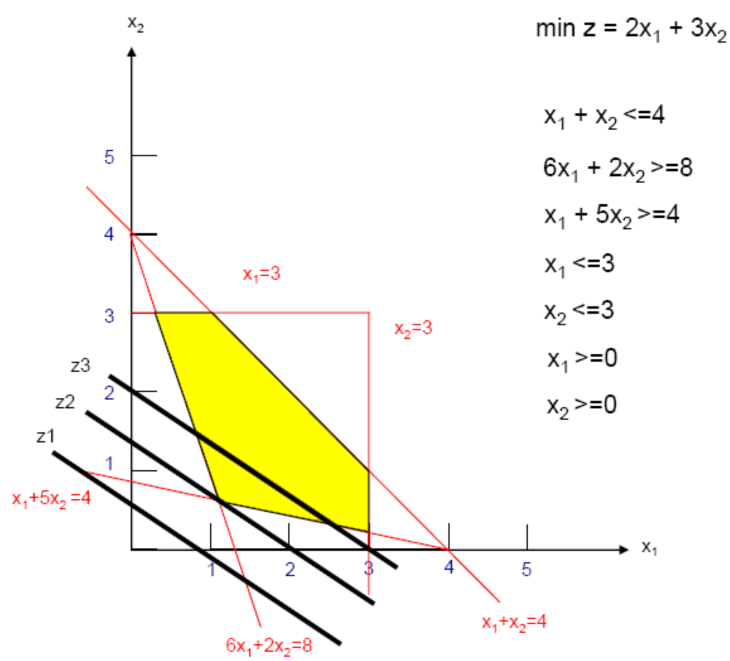
Στα ακόλουθα σχήματα παρουσιάζονται γραφικά όλες οι δυνατές περιπτώσεις



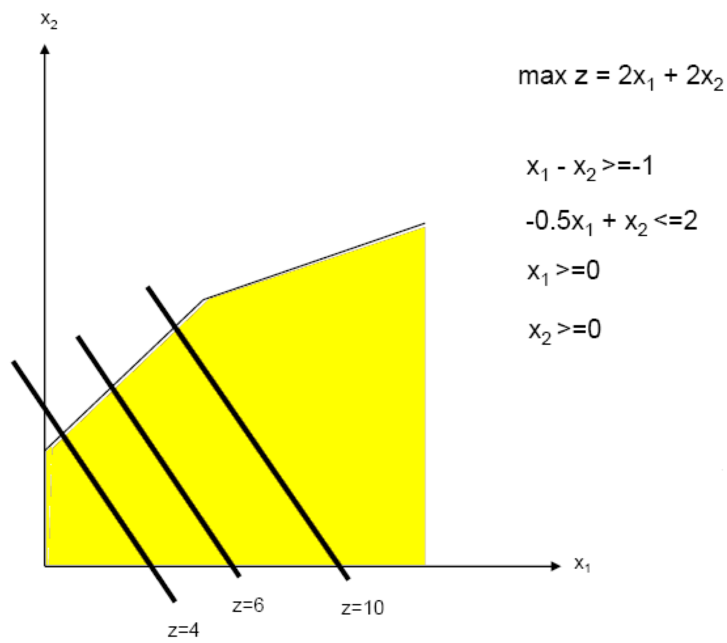
Σχήμα 2: Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποίησης



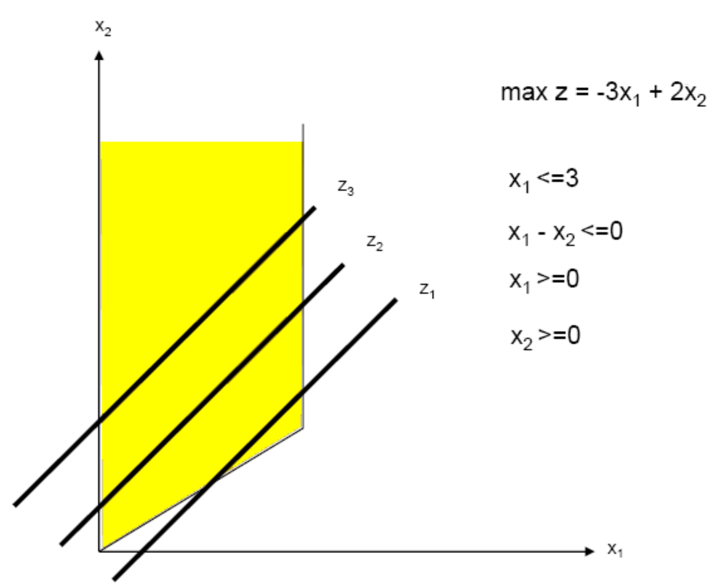
Σχήμα 3: Άπειρες Εναλλακτικές Βέλτιστες Λύσεις



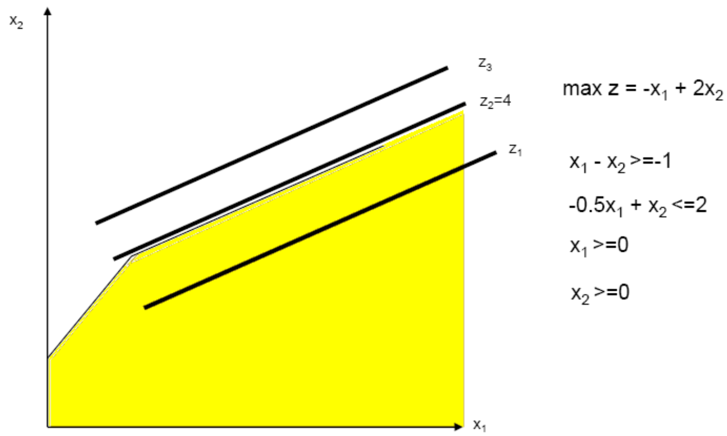
Σχήμα 4: Τυπική Περίπτωση Ελαχιστοποίησης



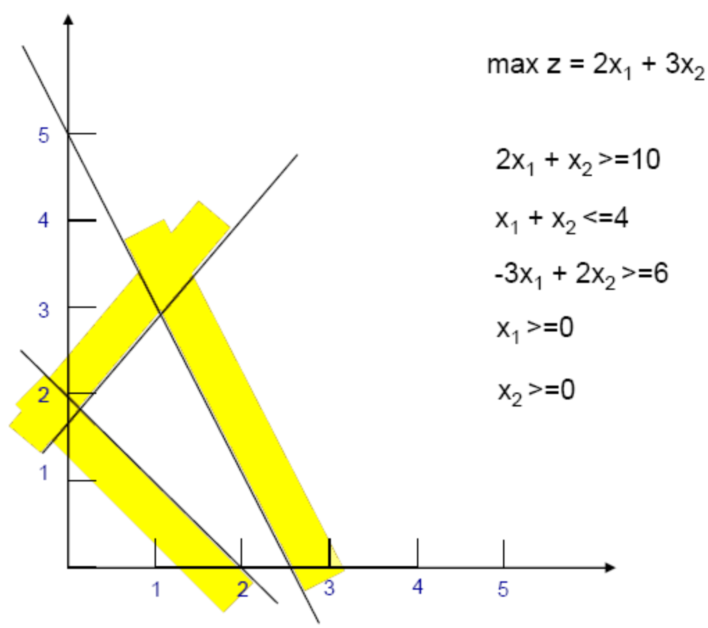
Σχήμα 5: Μη Πεπερασμένη Λύση



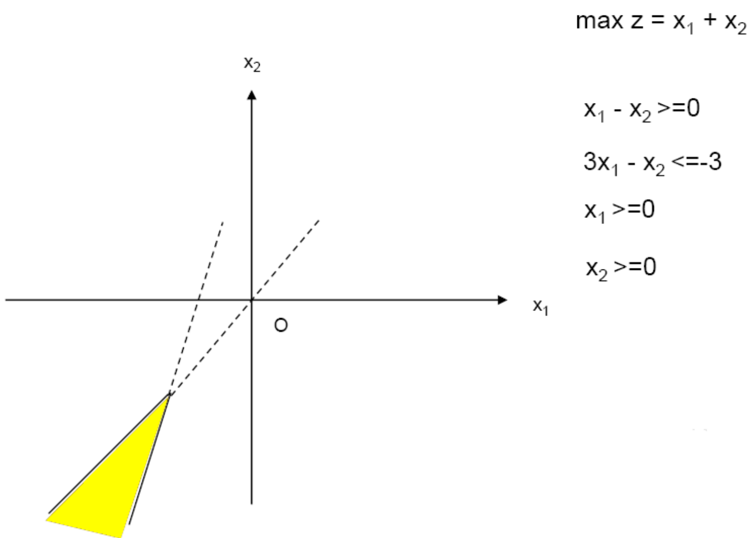
Σχήμα 6: Μη Πεπερασμένη Λύση με Πεπερασμένες Βέλτιστες Τιμές Ορισμένων Μεταβλητών



Σχήμα 7: Πεπερασμένη Βέλτιστη Τιμή Αντικειμενικής Συνάρτησης με Μη Πεπερασμένες Τιμές Μεταβλητών



Σχήμα 8: Καμία Λύση - Ασυμβίβαστοι Περιορισμοί



Σχήμα 9: Καμία Βέλτιστη Δυνατή Λύση

1.3 Προκαταρκτική Ανάλυση

Εξετάζουμε το πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού στην τυποποιημένη μορφή του:

$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}$$

Ο A είναι πίνακας $m \times n$, και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Αν $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ είναι οι στήλες του πίνακα A και $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$,

1.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Μία καφετέρια λειτουργεί σε 24-ωρη βάση και, ανάλογα με την ώρα της ημέρας, χρειάζεται το εξής προσωπικό.

Χρονική Περίοδος	Ελάχιστο Προσωπικό	Κόστος ανά 8ωρο ανά υπάλληλο
02 – 06	4	100
06 – 10	8	80
10 – 14	10	75
14 – 18	7	85
18 – 22	12	90
22 – 02	4	95

Κάθε υπάλληλος εργάζεται 8 συνεχείς ώρες. Αν το κόστος ανά υπάλληλο ανάλογα με το χρόνο που ξεκινάει τη βάρδια του δίνεται από τον παραπάνω πίνακα να βρεθεί το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος κάτω από τους περιορισμούς για το ελάχιστο προσωπικό που δίδονται στον πίνακα.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 100x_1 + 80x_2 + 75x_3 + 85x_4 + 90x_5 + 95x_6 \\
s.t. \\
x_1 & & & & & +x_6 & \geq & 4 \\
x_1 & +x_2 & & & & & \geq & 8 \\
 & x_2 & +x_3 & & & & \geq & 10 \\
 & & x_3 & +x_4 & & & \geq & 7 \\
 & & & x_4 & +x_5 & & \geq & 12 \\
 & & & & x_5 & +x_6 & \geq & 4 \\
\multicolumn{8}{l}{x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 6.}
\end{array}
$$

Παράδειγμα 2. Μία επιχείρηση πρόκειται να εισάγει ένα νέο προϊόν στην αγορά. Για τη διαφήμιση του προϊόντος επιλέγει να χρησιμοποιήσει ως διαφημιστικά μέσα τηλεόραση, ραδιόφωνο, εφημερίδα, περιοδικά και τέλος προβολή σε κάποια web sites. Το κόστος διαφήμισης ανά παρουσίαση στα πέντε αυτά διαφημιστικά μέσα και οι δείκτες ακροαματικότητας παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

	Τηλ.	Ραδ.	Εφημ.	Περιοδ.	Internet
Κόστος	1000	100	550	650	600
Δείκτες Ακροαματικότητας	120	25	60	82	40

Πίνακας 1. Κόστος διαφημίσεων και δείκτες ακροαματικότητας

Η διοίκηση της επιχείρησης δεν μπορεί να διαθέσει για τη διαφήμιση πάνω από 40.000 Ευρώ. Ακολουθείται η εξής πολιτική. Ο αριθμός των διαφημίσεων που γίνονται στα έντυπα μέσα δεν πρέπει να υπερβαίνει το 30% αυτών που γίνονται στην τηλεόραση και το ραδιόφωνο. Έχει παρατηρηθεί ότι για να αποδώσει μία διαφήμιση απαιτούνται τουλάχιστον 15 επαναλήψεις στο ραδιόφωνο και 10 επαναλήψεις στην τηλεόραση. Επίσης οι διαφημίσεις στο Internet επειδή βρίσκονται σε πειραματικό στάδιο δεν πρέπει να ξεπερνούν τις 15. Να προσδιοριστεί ο αριθμός των διαφημίσεων στα τέσσερα αυτά διαφημιστικά μέσα έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η συνολική ακροαματικότητα.

Λύση. Οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος ορίζονται ως εξής

x_1: αριθμός διαφημίσεων στην τηλεόραση
x_2: αριθμός διαφημίσεων στο ραδιόφωνο
x_3: αριθμός διαφημίσεων στις εφημερίδες
x_4: αριθμός διαφημίσεων στα περιοδικά
x_5: αριθμός διαφημίσεων στο Ιντερνετ.

Από τα στοιχεία του πίνακα 1 προκύπτει ότι η αντικειμενική συνάρτηση που πρόκειται να μεγιστοποιηθεί είναι η $120x_1 + 25x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 40x_5$. Εκτός από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας υπάρχει ο περιορισμός των χρημάτων, ο οποίος προκύπτει εύκολα από τον πίνακα 1 ότι είναι

$$1000x_1 + 100x_2 + 550x_3 + 650x_4 + 600x_5 \leq 40000.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη του περιορισμού με 50 προκύπτει ο ισοδύναμος και πιο απλός περιορισμός

$$20x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 12x_5 \leq 800.$$

Ο αριθμός των διαφημίσεων στον τύπο δεν ξεπερνά το 30% των διαφημίσεων της τηλεόρασης και του ραδιοφώνου. Άρα, πρέπει να ισχύει η ανισότητα

$$x_3 + x_4 \leq 0.3(x_1 + x_2).$$

Ο περιορισμός αυτός γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$-0.3x_1 - 0.3x_2 + x_3 + x_4 \leq 0.$$

Τέλος, υπάρχουν και οι περιορισμοί των ελάχιστων αριθμών διαφημίσεων στο ραδιόφωνο την τηλεόραση και το internet οι οποίοι αναλυτικά γράφονται σαν

$$x_1 \geq 10, \qquad x_2 \geq 15, \qquad x_5 \leq 15.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί έχει την μορφή

$$\begin{array}{l}
\max 120x_1 + 25x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 40x_5 \\
s.t. \\
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
20x_1 & + & 2x_2 & + & 11x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & \leq & 800 \\
-0.3x_1 & - & 0.3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & \leq & 0 \\
x_1 & & & & & & & & & \geq & 10 \\
 & & x_2 & & & & & & & \geq & 15 \\
 & & & & & & & & x_5 & \leq & 15
\end{array} \\
x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5.
\end{array}$$

Παράδειγμα 4. Μια τράπεζα επιχειρεί να καθορίσει που θα πρέπει να επενδυθούν τα κεφάλαια της κατά την διάρκεια του τρέχοντος έτους. Στο παρόν $ 500.000 είναι διαθέσιμα για επένδυση σε γραμμάτια, δάνεια αγοράς κατοικίας δάνεια αγοράς αυτοκινήτου και προσωπικά δάνεια. Ο ετήσιος τόκος σε κάθε τύπο δανείου είναι: γραμμάτια 10%, δάνεια αγοράς κατοικίας 16%, δάνεια αγοράς αυτοκινήτου 13%, προσωπικά δάνεια 20%. Για να εγγυηθεί ο μάνατζερ επενδύσεων της τράπεζας ότι το χαρτοφυλάκιο της τράπεζας δεν είναι τόσο ριψοκίνδυνο, έχει θέσει τρεις περιορισμούς για το χαρτοφυλάκιο της τράπεζας:

α) Το ποσό που θα επενδυθεί σε προσωπικά δάνεια δεν μπορεί να ξεπεράσει το ποσό που θα επενδυθεί σε γραμμάτια.

β) Το ποσό που θα επενδυθεί σε δάνεια αγοράς κατοικίας δεν μπορεί να ξεπεράσει το ποσό που θα επενδυθεί σε δάνεια αγοράς αυτοκινήτου.

γ) Το μέγιστο ποσό που μπορεί να επενδυθεί σε προσωπικά δάνεια μπορεί να είναι το 25% του συνολικού ποσού των επενδύσεων.

Στόχος της τράπεζας είναι να μεγιστοποιήσει τον ετήσιο τόκο στο χαρτοφυλάκιο των επενδύσεων της. Διατυπώστε ένα γραμμικό πρόβλημα, που θα επιτρέψει στην τράπεζα να επιτύχει το στόχο της.

Παράδειγμα 5. Έστω ότι δίδονται τα ακόλουθα δεδομένα ανάμεσα σε δύο μεγέθη, x και y τα οποία υποθέτουμε ότι συνδέονται με την συναρτησιακή σχέση $y = ax^2 + bx + c$.

x	1	2	3	4	5
y	9.94	18.55	33.02	48.19	71.54

Ζητείται να προσδιορισθούν τα a, b, c έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η μέγιστη απόκλιση, $\max_{1\le i\le 5}\left|-y_i + ax_i^2 + bx_i + c\right|$

1.5 Το πρόβλημα της μεταφοράς

Θεωρούμε ότι έχουμε m εργοστάσια τα οποία παράγουν ποσότητες a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ ενός προϊόντος κάθε μήνα και n πόλεις οι οποίες έχουν ζήτηση b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ για το προϊόν αυτό κάθε μήνα. Το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας του προϊόντος από την πόλη i στο εργοστάσιο j είναι c_{ij}. Επίσης θα θεωρήσουμε αρχικά ότι το πρόβλημα είναι ισοσταθμισμένο, δηλαδή ότι $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Συνεπώς, με την υπόθεση αυτή, η συνολική παραγωγή ισούται με την συνολική ζήτηση.

Έστω ότι x_{ij} συμβολίζει την ποσότητα του προϊόντος που στέλνουμε από το εργοστάσιο i στην πόλη j. (Η ποσότητα αυτή είναι βεβαίως μη αρνητική.) Το πρόβλημα είναι επομένως η ελαχιστοποίηση του γραμμικού κριτηρίου

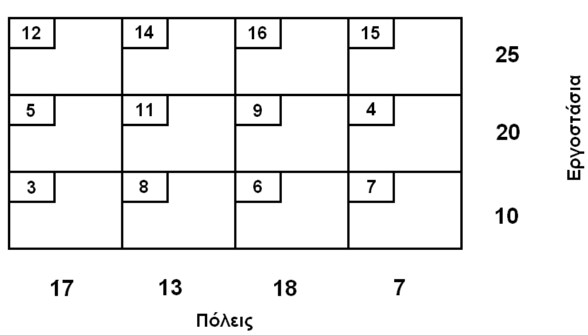
$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1.6}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m, & (1.7) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n, & (1.8) \\ x_{ij} &\geq 0. & (1.9) \end{aligned}$$

όπου οι περιορισμοί (1.7) αναφέρονται στα εργοστάσια ενώ οι περιορισμοί (1.8) αναφέρονται στις πόλεις.

Ένα συγκεκριμμένο παράδειγμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έχουμε τρία εργοστάσια που παράγουν 25, 20 και 10 μονάδες αντίστοιχα, και τέσσερεις πόλεις που ζητούν 17, 13, 18 και 7 μονάδες. Η συνολική ζήτηση ισούται με την συνολική προσφορά και συνεπώς πρόκειται για ισοσταθμισμένο πρόβλημα μεταφοράς. Τα μικρά τετράγωνα δείχνουν τα αντίστοιχα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα. Για παράδειγμα το κόστος μεταφοράς από το εργοστάσιο 2 στην πόλη 2 είναι σύμφωνα με τον πίνακα $c_{22} = 11$. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης γίνεται συνεπώς

$$\min 12x_{11} + 14x_{12} + 16x_{13} + 15x_{14} + 5x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 4x_{24} + 3x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 7x_{34}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
s.t. \\
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & & & & & & = & 25 \\
& & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & & & & & = & 20 \\
& & & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & = & 10 \\
x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +x_{31} & & & & = & 17 \\
& x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +x_{32} & & & = & 13 \\
& & x_{13} & & & & +x_{23} & & & & +x_{33} & & = & 18 \\
& & & x_{14} & & & & +x_{24} & & & & +x_{34} & = & 7
\end{array}$$

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j.$

Σε περίπτωση που το πρόβλημα μεταφοράς δεν είναι ισοσταθμισμένο μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ισοσταθμισμένο με την προσθήκη μιας πηγής («εργοστασίου») σε περίπτωση που η προσφορά είναι μικρότερη από την ζήτηση ή ενός επιπλέον προορισμού («πόλης») σε περίπτωση που η προσφορά είναι μεγαλύτερη από την ζήτηση. Οι εικονικές πηγές και οι εικονικοί προορισμοί παράγουν και ζητούν αντίστοιχα ακριβώς όσο από το προϊόν απαιτείται προκειμένου το πρόβλημα να γίνει ισοσταθμισμένο. Φυσικά, μεταφορά προιόντος από ένα εικονικό εργοστάσιο σε μια πόλη στην πραγματικότητα σημαίνει ότι η ζήτηση δεν ικανοποιείται και σ′ αυτή την περίπτωση το κόστος μεταφοράς είναι το κόστος μη ικανοποίησης της ζήτησης.

1.6 Το δυϊκό πρόβλημα

1.6.1 Το δυϊκό πρόβλημα ενός προβλήματος παραγωγής και η οικονομική σημασία του

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα παραγωγής. Ένας κατασκευαστής μπορεί να παράγει n διαφορετικά προϊόντα, $P_1, \ldots, P_n$ χρησιμοποιώντας m πρώτες ύλες, $Y_1, \ldots Y_m$. Για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος P_j απαιτούνται a_{ij} μονάδες της πρώτης ύλης Y_i και η συνολική διαθέσιμη ποσότητα της Y_i έστω ότι είναι b_i. Έστω επίσης ότι η πώληση μιας μονάδας του P_j αποφέρει κέρδος c_j στον κατασκευαστή. Συνεπώς ο κατασκευαστής, προκειμένου να μεγιστοποιήσει το κέρδος του θα κατασκευάσει x_j

μονάδες του προϊόντος P_j έτσι ώστε

$$
\begin{array}{l}
\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array} \\
\\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
\tag{1.10}
$$

Έστω τώρα ότι ένας επιχειρηματίας εμφανίζεται και προτίθεται να αγοράσει τις πρώτες ύλες του κατασκευαστή. Αν προτείνει τις τιμές y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ αυτές θα πρέπει να είναι αρκετά υψηλές ώστε να συμφέρει τον κατασκευαστή να του πωλήσει τις πρώτες ύλες αντί να κατασκευάσει οποιοδήποτε από τα n προϊόντα. Θα πρέπει συνεπώς να ισχύει ότι $y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj} \geq c_j$ δηλαδή το κέρδος του κατασκευαστή από την πώληση των πρώτων υλών που απαιτούνται για την κατασκευή μιας μονάδας του προϊόντος P_j να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το κέρδος που αποφέρει η κατασκευή και πώληση μιας μονάδας του P_j. Αυτό βεβαίως θα πρέπει να ισχύει για όλα τα j. Δεδομένων αυτών των περιορισμών ο επιχειρηματίας που προτίθεται να αγοράσει τις πρώτες ύλες θα προσπαθήσει να ελαχιστοποιήσει το ποσό που θα δώσει για την αγορά τους που είναι $y_1b_1 + \cdots + y_mb_m$. Συνεπώς ο επιχειρηματίας θέλει να έχει

$$
\begin{array}{l}
\min\ b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccccc}
y_1a_{11} & + & y_2a_{21} & + & \cdots & + & y_ia_{i1} & \cdots & + & y_ma_{m1} & \geq & c_1 \\
y_1a_{12} & + & y_2a_{22} & + & \cdots & + & y_ia_{i2} & \cdots & + & y_ma_{m2} & \geq & c_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1a_{1j} & + & y_2a_{2j} & + & \cdots & + & y_ia_{ij} & \cdots & + & y_ma_{mj} & \geq & c_j \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1a_{1n} & + & y_2a_{2n} & + & \cdots & + & y_ia_{in} & \cdots & + & y_ma_{mn} & \geq & c_n
\end{array} \\
\\
y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{array}
\tag{1.11}
$$

Το γραμμικό πρόβλημα (1.10) θα ονομάζεται αρχικό ενώ το (1.11) θα ονομάζεται δυϊκό. Παρατηρείστε ότι στο δυϊκό πρόβλημα έχουμε μια μεταβλητή για κάθε περιορισμό του αρχικού και έναν περιορισμό για κάθε μεταβλητή του αρχικού.

Έστω μια εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Αφού είναι εφικτή θα ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$
b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.12}
$$

Έστω επίσης μια εφικτή λύση του δυϊκού, $y_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ η οποία ικανοποιεί τους

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - c_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες (1.12) με $y_i \geq 0$ και προσθέτωντας για όλα τα i έχουμε

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \geq 0 \tag{1.14}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j. \tag{1.15}$$

Παρόμοια, πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες (1.13) με $x_j \geq 0$ και προσθέτωντας για όλα τα j έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - c_j \right) \geq 0 \tag{1.16}$$

ή

$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j. \tag{1.17}$$

Από τις (1.15) και (1.17) συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i. \tag{1.18}$$

Συνεπώς η τιμή του κριτηρίου κάθε εφικτής λύσης του αρχικού προβλήματος είναι μικρότερη ή ίση από την τιμή του κριτηρίου κάθε εφικτής λύσης του δυϊκού προβλήματος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν x_j^* είναι η *βέλτιστη λύση* του αρχικού και y_i^* η *βέλτιστη λύση* του δυϊκού τότε η (1.18) ισχύει ως ισότητα, δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i. \tag{1.19}$$

Άμεση συνέπεια των ανωτέρω είναι ότι για την βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος και για την βέλτιστη λύση του δυϊκού ισχύουν οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας.

$$\text{Για κάθε } i = 1, \ldots, m \quad y_i^* > 0 \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i, \tag{1.20}$$

$$\text{Για κάθε } j = 1, \ldots, n \quad x_j^* > 0 \iff \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} = c_j. \tag{1.21}$$

1.7 Βρίσκοντας το δυϊκό πρόβλημα από το αρχικό

Στην γενική περίπτωση, προκειμένου να μετασχηματίσουμε το αρχικό πρόβλημα στο αντίστοιχο δυϊκό εφαρμόζουμε τους ακόλουθους κανόνες. Θεωρούμε ότι το αρχικό πρόβλημα έχει την ακόλουθη μορφή

$$
\begin{array}{l}
\begin{Bmatrix}\max\\ \min\end{Bmatrix} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kj}x_j & \cdots & + & a_{kn}x_n & \leq & b_k \\
a_{k+1,1}x_1 & + & a_{k+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{k+1,j}x_j & \cdots & + & a_{k+1,n}x_n & = & b_{k+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \\
\\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \quad x_j \text{ ελεύθερο } \; j = l+1, \ldots, n.
\end{array}
\tag{1.22}
$$

Παρατηρείστε ότι το ανωτέρω πρόβλημα έχει k ανισοτικούς και $m-k$ ισοτικούς περιορισμούς. Οποιοδήποτε πρόβλημα, πολλαπλασιάζοντας εν ανάγκη με -1 τους ανισοτικούς περιορισμούς του που έχουν την αντίθετη φορά μπορεί να τεθεί στην μορφή αυτή. Παρατηρείστε επίσης ότι το αρχικό έχει $l \leq n$ μεταβλητές με περιορισμό μη αρνητικότητας και $n - l$ ελεύθερες μεταβλητές.

1. Η μεγιστοποίηση γίνεται ελαχιστοποίηση και αντίστροφα.

2. Σε κάθε περιορισμό του αρχικού αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού και σε κάθε μεταβλητή του αρχικού αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού. (Στους περιορισμούς αυτούς *δεν περιλαμβάνονται* οι περιορισμοί μη αρνητικότητας.)

3. Οι συντελεστές του κριτηρίου προς βελιστοποίηση του δυϊκού είναι το δεξί μέλος των περιορισμών του αρχικού. Το δεξί μέλος των περιορισμών του δυϊκού είναι οι συντελεστές του κριτηρίου του αρχικού.

4. Σε κάθε στήλη του αρχικού αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού. Ο περιορισμός αυτός είναι ανισοτικός ($\geq$) αν η αντίστοιχη μεταβλητή του δυϊκού είναι μη αρνητική και είναι ισοτικός αν η αντίστοιχη μεταβλητή του αρχικού είναι ελεύθερη.

Με βάση τους παραπάνω κανόνες το δυϊκό του (1.22) γίνεται

$$
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{c}\min\\ \max\end{array}\right\} \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccccc}
y_1a_{11} & + & y_2a_{21} & + & \cdots & + & y_ia_{i1} & \cdots & + & y_ma_{m1} & \geq & c_1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1a_{1l} & + & y_2a_{2l} & + & \cdots & + & y_ia_{il} & \cdots & + & y_ma_{ml} & \geq & c_l \\
y_1a_{1,l+1} & + & y_2a_{2,l+1} & + & \cdots & + & y_ia_{i,l+1} & \cdots & + & y_ma_{m,l+1} & = & c_{l+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1a_{1m} & + & y_2a_{2m} & + & \cdots & + & y_ia_{im} & \cdots & + & y_ma_{mn} & = & c_m
\end{array} \\
\\
y_i \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad y_i \text{ ελεύθερο } \ i = k+1, \ldots, m.
\end{array}
\tag{1.23}
$$

Για να γίνουν σαφέστερα τα παραπάνω ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Το δυϊκό του

$$
\begin{array}{l}
\max \quad x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
s.t. \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 100
\end{array} \\
\\
x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

είναι το

$$
\begin{array}{l}
\min \quad 10y_1 + 100y_2 \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccc}
y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
y_1 & + & 2y_2 & \geq & 4 \\
y_1 & + & 4y_3 & \geq & -3
\end{array} \\
\\
y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.
\end{array}
$$

2. Το δυϊκό του

$$
\begin{array}{l}
\min \quad 2x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccc}
2x_1 & - & 3x_2 & + & 11x_3 & - & 14x_4 & \leq & 13 \\
5x_1 & + & 7x_2 & + & 12x_3 & & & \geq & 17 \\
8x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 19
\end{array} \\
\\
x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \text{ ελεύθερο.}
\end{array}
$$

είναι το

$$
\begin{array}{l}
\max \quad 13y_1 - 17y_2 + 19y_3 \\
s.t. \\
\begin{array}{rcrcrcr}
2y_1 & - & 5y_2 & + & 8y_3 & \geq & 2 \\
-3y_1 & - & 7y_2 & + & 4y_3 & \geq & -5 \\
11y_1 & - & 12y_2 & + & y_3 & \geq & -8 \\
-14y_1 & & & + & 5y_3 & = & 1
\end{array} \\
\\
y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \text{ ελεύθερο.}
\end{array}
$$

3. Το δυϊκό του παραδείγματος 1 είναι το ακόλουθο

$$
\begin{array}{l}
\max \ 4y_1 + 8y_2 + 10y_3 + 7y_4 + 12y_5 + 4y_6 \\
\quad s.t. \\
\quad \begin{array}{cccccccc}
y_1 & +y_2 & & & & & \leq & 95 \\
 & y_2 & +y_3 & & & & \leq & 80 \\
 & & y_3 & +y_4 & & & \leq & 75 \\
 & & & y_4 & +y_5 & & \leq & 85 \\
 & & & & y_5 & +y_6 & \leq & 90 \\
y_1 & & & & & +y_6 & \leq & 100
\end{array} \\
\quad y_i \geq 0 \ \ i = 1, \ldots, 6.
\end{array}
$$

4. Έστω το πρόβλημα μεταφοράς με 2 εργοστάσια και 3 πόλεις. Το εργοστάσιο $i = 1, 2$, έχει δυναμικότητα a_i το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να παράγει *το πολύ έως* a_i *μονάδες του προϊόντος*. Η πόλη j απαιτεί *κατ¨ ελάχιστον* b_j *μονάδες του προϊόντος*. Συνεπώς αυτό είναι ένα μη ισοσταθμισμένο πρόβλημα και έχει εφικτές λύσεις υπό την προϋπόθεση ότι $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b3$. Το κόστος μεταφοράς ενός προϊόντος από το εργοστάσιο i στην πόλη j έστω ότι είναι c_{ij}. Το γραμμικό πρόγραμμα που το περιγράφει είναι το

$$
\begin{array}{l}
\max \quad c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{11}x_{21} + c_{12}x_{22} + c_{13}x_{23} \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & \leq & a_1 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \leq & a_2 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & \geq & b_1 \\
 & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & \geq & b_2 \\
 & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & \geq & b_3
\end{array} \\
\\
x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.
\end{array}
$$

Για να βρούμε το δυϊκό πρόβλημα ονομάζουμε u_1, u_2, τις δυϊκές μεταβλητές που αντιστοιχούν στους δύο πρώτους περιορισμούς που αποτελούν το άνω όριο της δυναμικότητας των δύο εργοστασίων και v_1, v_2, v_3 τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στην ελάχιστη κατανάλωση της κάθε μίας από τις τρεις πόλεις. Έχουμε

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrr}
\min & \multicolumn{12}{l}{-a_1u_1 - a_2u_2 + v_1b_1 + v_2b_2 + v_3b_3} \\
s.t. \\
- & u_1 & & & + & v_1 & & & & & \geq & c_{11} \\
- & u_1 & & & & & + & v_2 & & & \geq & c_{12} \\
- & u_1 & & & & & & & + & v_3 & \geq & c_{13} \\
& & - & u_2 & + & v_1 & & & & & \geq & c_{21} \\
& & - & u_2 & & & + & v_2 & & & \geq & c_{22} \\
& & - & u_2 & & & & & + & v_3 & \geq & c_{23}
\end{array}$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1,2, \quad v_j \geq 0, \quad j = 1,2,3.$$

Το δυϊκό του δυϊκού ενός γραμμικού προγράμματος είναι το αρχικό. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί γενικά αλλά είναι εξίσου αποτελεσματικό να καταδειχθεί με δύο απλά παραδείγματα

4α. Έστω το γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{array}{lrrrcr}
\max & \multicolumn{5}{l}{3x_1 + 4x_2 - 5x_3} \\
s.t. \\
& x_1 & -10x_2 & +7x_3 & \leq & 30 \\
& & 15x_2 & -8x_3 & \leq & 40 \\
& 3x_1 & & +4x_3 & \leq & 20 \\
& 5x_1 & +8x_2 & & \leq & 25
\end{array} \tag{1.24}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0.$$

Το δυϊκό του προβλήματος αυτού είναι το

$$\begin{array}{lrrrrcr}
\min & \multicolumn{6}{l}{30y_1 + 40y_2 + 20y_3 + 25y_4} \\
s.t. \\
& y_1 & & +3y_3 & +5y_4 & \geq & 3 \\
& -10y_1 & +15y_2 & & +8y_4 & \geq & 4 \\
& 7y_1 & -8y_2 & +4y_3 & & \geq & -5
\end{array}$$

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \geq 0.$$

Το παραπάνω πρόγραμμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{array}{lrrrrcr}
\max & \multicolumn{6}{l}{-30y_1 - 40y_2 - 20y_3 - 25y_4} \\
s.t. \\
& -y_1 & & -3y_3 & -5y_4 & \leq & -3 \\
& 10y_1 & -15y_2 & & -8y_4 & \leq & -4 \\
& -7y_1 & 8y_2 & -4y_3 & & \leq & 5
\end{array}$$

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \geq 0.$$

και το δυϊκό αυτού του τελευταίου είναι το αρχικό πρόγραμμα (1.24).

4β. Έστω το αρχικό πρόβλημα

$$\begin{array}{lllcr} \max & 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 & & & \\ s.t. & & & & \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 10 \\ x_1 & +2x_2 & +8x_3 & \leq & 100 \\ & & 2x_3 & \geq & 5 \end{array} \tag{1.25}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ ελεύθερη},\ x_3 \geq 0.$$

Για την εύρεση του δυϊκού γράφουμε την τρίτη ανισότητα σε κανονική μορφή ως $-2x_3 \leq -5$ και, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι η x_2 είναι ελεύθερη μεταβλητή, πράγμα που σημαίνει ότι ο δεύτερος περιορισμός του δυϊκού προγράμματος θα είναι ισοτικός, έχουμε

$$\begin{array}{lllcr} \min & 10y_1 + 100y_2 - 5y_3 & & & \\ s.t. & & & & \\ y_1 & +y_2 & & \geq & 3 \\ y_1 & +2y_2 & & = & -2 \\ y_1 & +8y_2 & -2y_3 & \geq & -7 \end{array}$$

$$y_1 \text{ ελεύθερη},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Το πρόβλημα αυτό γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{array}{lllcr} \max & -10y_1 - 100y_2 + 5y_3 & & & \\ s.t. & & & & \\ -y_1 & -y_2 & & \leq & -3 \\ y_1 & +2y_2 & & = & -2 \\ -y_1 & -8y_2 & +2y_3 & \leq & 7 \end{array} \tag{1.26}$$

$$y_1 \text{ ελεύθερη},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Το δυϊκό του (1.26) είναι το

$$\begin{array}{lllcr} \min & -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 & & & \\ s.t. & & & & \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -10 \\ -x_1 & +2x_2 & -8x_3 & \geq & -100 \\ & & 2x_3 & \geq & 5 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0\ ,x_2 \text{ ελεύθερη},\ x_3 \geq 0.$$

Το παραπάνω πρόγραμμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$
\begin{array}{lrrcr}
\max & \multicolumn{4}{l}{3x_1 + 2x_2 - 7x_3} \\
s.t. & & & & \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 10 \\
x_1 & -2x_2 & +8x_3 & \leq & 100 \\
 & & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & & & & \\
\multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \text{ ελεύθερη, } \; x_3 \geq 0.}
\end{array}
\tag{1.27}
$$

Συγκρίνοντας το (1.27) με το (1.24) βλέπουμε ότι ταυτίζονται απόλυτα με την εξαίρεση ότι όπου στο (1.24) υπάρχει η μεταβλητή x_2, στο (1.27) υπάρχει η $-x_2$. Αν ορίσουμε την $x_2' = -x_2$ και εκφράσουμε το (1.27) ως προς τις μεταβλητές x_1, x_2' και x_3 τότε βλέπουμε ότι τα (1.24) και (1.27) ταυτίζονται. Αυτό είναι δυνατό επειδή η x_2 είναι *ελεύθερη μεταβλητή.* Αν υπόκειτο σε περιορισμό μη αρνητικότητας τότε ο μετασχηματισμός αυτός δεν θα οδηγούσε σε ισοδύναμο πρόγραμμα.

Κεφάλαιο 2

Γραμμικός Ακέραιος Προγραμματισμός

Τα προβλήματα γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού είναι προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με τον επιπλέον περιορισμό ότι οι μεταβλητές πρέπει να παίρνουν αποκλειστικά ακέραιες τιμές. Εν γένει τα προβλήματα αυτά είναι πιο δύσκολα μια και η μέθοδος Simplex δεν είναι εγγυημένο ότι θα καταλήξει στην βέλτιστη λύση ή ακόμα και σε μια προσεγγιστικά ικανοποιητική λύση. Εμείς θα εξετάσουμε δύο απλά προβλήματα γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού, το «πρόβλημα του σακκιδίου» και το πρόβλημα της αντιστοίχησης.

2.1 Το πρόβλημα του σακκιδίου (knapsack problem)

Έστω ότι έχουμε n διαφορετικούς τύπους αντικειμένων. Τα αντικείμενα τύπου j έχουν αξία v_j και βάρος w_j, $j = 1, 2, \dots, n$. Έστω ότι έχουμε επίσης ένα σακίδιο συνολικής χωρητικότητας W το οποίο θέλουμε να γεμίσουμε με αντικείμενα έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε την συνολική αξία των αντικειμένων στο σακίδιο χωρίς το συνολικό τους βάρος να υπερβαίνει το W. Αν συμβολίσουμε με x_j τον αριθμό των αντικειμένων τύπου i που τοποθετούμε στο σακίδιο έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \tag{2.1}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_j \leq W, \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x_j \text{ ακέραιοι.}$$

Αν δεν υπήρχε ο επιπλέον περιορισμός της ακεραιότητας των x_j το πρόβλημα αυτό θα ήταν ένα απλό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Έστω ότι έχουμε αριθμήσει τους τύπους των αντικειμένων έτσι ώστε

$$\mu := \frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{w_n}. \tag{2.3}$$

Συνεπώς ο τύπος 1 αντικειμένων έχει τον καλύτερο λόγο αξίας προς βάρος. Αν θέσουμε $x_1^* = W/w_1$, $x_j^* = 0$ για $j = 2, 3, \ldots, n$ δηλαδή να γεμίσουμε το σακκίδιο αποκλειστικά με αντικείμενα τύπου 1 η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται $v_1 x_1 = W\frac{v_1}{w_1} = W\mu$. Αντίθετα, για οποιαδήποτε άλλη εφικτή λύση x_j, εφ¨ όσον ισχύει η $\mu w_j \geq v_j$ σαν συνέπεια της (2.3), αντικαθιστώντας στην (2.2) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j \leq \mu W$$

δηλαδή η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μικρότερη από εκείνη που επιτυγχάνεται από την λύση x^*.

Η παραπάνω λύση είναι εφικτή μόνο αν ο λόγος W/w_1 είναι ακέραιος αριθμός ή αν μπορούμε να βάλουμε στο σακκίδιο κλασματικό αριθμό αντικειμένων. Γενικά ο περιορισμός της ακεραιότητας αλλάζει ουσιαστικά την φύση του προβλήματος. Σε πολλές περιπτώσεις η βέλτιστη λύση του ακεραίου προβλήματος είναι ριζικά διαφορετική. Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα με τρεις τύπους αντικειμένων, $W = 100$, και

$w_1 = 49$	$v_1 = 20$	$v_1/w_1 = 0.408$
$w_2 = 50$	$v_2 = 75$	$v_2/w_2 = 1.5$
$w_3 = 51$	$v_3 = 102$	$v_3/w_3 = 2$

Βλέπουμε από τα παραπάνω δεδομένα ότι τα αντικείμενα του τύπου 3 είναι τα πλέον πολύτιμα. Συνεπώς, χωρίς τον περιορισμό ακεραιότητας θα βάζαμε $W/w_3 = 100/51 = 1.96$ μονάδες του τύπου 3 στο σακκίδιο και η συνολική αξία των αντικειμένων θα ήταν $v_3 \times (W/w_3) = 200$. Με τους περιορισμούς ακεραιότητας, θα σκεπτόταν κανείς να επιλέξει την πλησιέστερη δυνατή ακέραια λύση στην βέλτιστη μη ακέραια. Αφού δεν είναι δυνατόν να βάλουμε 2 αντικείμενα τύπου 3 στο σακκίδιο θα μπορούσαμε να στρογγυλέψουμε προς τα κάτω το 1.96 και να βάλουμε ένα, συμπληρώνοντας με ένα επιπλέον αντικείμενο του τύπου 1. Η συνολική αξία σ′ αυτή την περίπτωση θα ήταν $102 + 20 = 122$. Όμως, όπως μπορεί εύκολα να δει κανείς, με τον ακέραιο περιορισμό, η βέλτιστη λύση είναι να βάλει κανείς δύο αντικείμενα τύπου 2 στο σακκίδιο με συνολικό βάρος 100 και συνολική αξία 150.

2.2 Το πρόβλημα της αντιστοίχησης

Το πρόβλημα της αντιστοίχησης είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος της μεταφοράς. Έστω ότι έχουμε n εργασίες τις οποίες θέλουμε να αντιστοιχίσουμε (ή να αναθέσουμε) σε n μηχανές. Το κόστος της ανάθεσης της εργασίας i στη μηχανή j είναι c_{ij} και ο σκοπός μας είναι να αναθέσουμε κάθε εργασία σε μια διαφορετική μηχανή με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό (αθροιστικό) κόστος. Γενικά θα πρέπει να εξετάσουμε τις $n!$ διαφορετικές μεταθέσεις που αντιστοιχούν στις δυνατές αναθέσεις και επομένως ακόμη και για σχετικά μικρά προβλήματα (π.χ. 10 εργασίες και 10 μηχανές) η απλή εξέταση όλων των δυνατοτήτων είναι υπολογιστικά επίπονη. Το πρόβλημα της αντιστοίχησης είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δεδομένου ότι μπορεί να γραφεί ως

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.4}$$

$s.t.$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.6}$$

Στο παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα η μεταβλητή x_{ij} είναι 1 αν η εργασία i αντιστοιχίζεται στην μηχανή j και 0 διαφορετικά. Συνεπώς εδώ έχουμε το επιπλέον χαρακτηριστικό ότι οι μεταβλητές x_{ij} εκτός από μη αρνητικές πρέπει να είναι και ακέραιες. Μπορεί να δείξει κανείς ότι αν χρησιμοποιήσει την μέθοδο Simplex αγνοώντας τον τελευταίο αυτό περιορισμό η λύση θα είναι πάντα ακέραια. Υπάρχει πάντως απλούστερος και αποτελεσματικότερος αλγόριθμος σ΄ αυτή την περίπτωση, η λεγόμενη Ουγγρική μέθοδος.

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι, αν αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα από όλα τα στοιχεία μιας γραμμής το κόστος της βέλτιστης ανάθεσης μπορεί να αλλάξει αλλά *η ίδια η βέλτιστη ανάθεση δεν αλλάζει.* Για τον ίδιο λόγο, αν αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα από όλα τα στοιχεία μιας στήλης η βέλτιστη ανάθεση δεν αλλάζει. Γενικά, αν εξετάσουμε το πρόβλημα αντιστοίχισης με κόστος $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - p_j$ για κάποια συγκεκριμένη ανάθεση x_{ij} έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{m} p_i.
\end{aligned}$$

Είναι σαφές από την παραπάνω εξίσωση ότι η αντιστοίχιση που ελαχιστοποιεί το $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ ελαχιστοποιεί και το $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c'_{ij} x_{ij}$ αφού οι δύο ποσότητες διαφέρουν κατά μια σταθερά που δεν εξαρτάται από τα x_{ij}.

Συνεπώς μπορούμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα αντιστοίχησης αφαιρώντας από κάθε γραμμή το μικρότερο κόστος της γραμμής (δημιουργώντας έτσι n μηδενικά στον πίνακα) και στην συνέχεια αν είναι αναγκαίο το ελάχιστο στοιχείο κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία της στήλης. Για παράδειγμα, αν έχουμε τον πίνακα με κόστη

5	7	9
14	10	12
15	13	16

αφαιρώντας από κάθε γραμμή το ελάχιστο κόστος της γραμμής έχουμε

0	2	4
4	0	2
2	0	3

.

Αφαιρώντας από κάθε στήλη το ελάχιστο της στήλης παίρνουμε τον πίνακα

0	2	2
4	0	0
2	0	1

.

Στον παραπάνω πίνακα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις εργασίες σε μηχανές έτσι ώστε να έχουμε μηδενικό κόστος

$\boxed{0}$	2	2
4	0	$\boxed{0}$
2	$\boxed{0}$	1

.

Το πραγματικό κόστος αυτής της αντιστοίχησης είναι βεβαίως $5 + 13 + 12 = 30$.

Η παραπάνω διαδικασία δεν είναι βέβαια υποχρεωτικό να οδηγήσει σε πίνακα κοστών που να επιδέχεται αντιστοίχιση με μηδενικό κόστος. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα με 4 εργασίες και 4 μηχανές.

1	4	6	3
9	7	10	9
4	5	11	7
8	7	8	5

.

Αφαιρώντας τα ελάχιστα των γραμμών έχουμε

0	3	5	2
2	0	3	2
0	1	7	3
3	2	3	0

.

Επαναλαμβάνοντας με τις στήλες έχουμε

0	3	2	2
2	0	0	2
0	1	4	3
3	2	0	0

.

Παρ΄ ότι ο τελευταίος πίνακας έχει έξι μηδενικά δεν είναι δυνατόν να βρούμε αντιστοίχηση με μηδενικό κόστος. Ο κανόνας σ¨ αυτή την περίπτωση είναι ο εξής:

1. Διαγράφουμε όλα τα μηδενικά με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό οριζοντίων και καθέτων γραμμών.

2. Αφαιρούμε τον ελάχιστο μη διαγεγραμμενο αριθμό από όλους τους μή διαγεγραμμένους αριθμούς και τον προσθέτουμε στις διασταυρώσεις των οριζοντίων και καθέτων γραμμών.

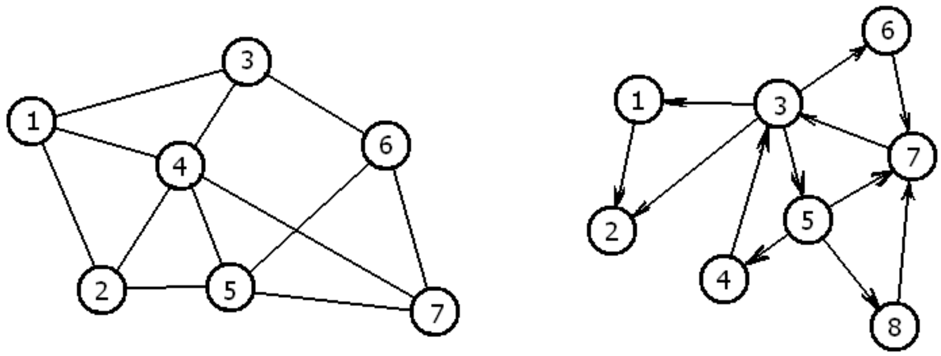
3. Επιχειρούμε να βρούμε αντιστοίχηση με μηδενικό κόστος στον καινούργιο πίνακα. Αν η προσπάθεια είναι επιτυχής έχουμε βρει αντιστοίχιση με ελάχιστο κόστος. Άλλως διαγράφουμε πάλι όλα τα μηδενικά με τον ελάχιστο αριθμό οριζοντίων και καθέτων γραμμών και επαναλαμβάνουμε την όλη διαδικασία.

Κεφάλαιο 3

Προβλήματα Δικτύων

3.1 Γράφοι

Ένας γράφος είναι ένα απλό μαθηματικό αντικείμενο που περιγράφει ένα δίκτυο. Ο γράφος αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών, V, και ένα σύνολο ακμών $\mathscr{E}$ που αποτελείται από ζεύγη κορυφών του V. Ανάλογα με το αν τα ζεύγη αυτά είναι διατεταγμένα ή όχι έχουμε προσανατολισμένους γράφους ή μη. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο γράφους. Ο ένας είναι μη προσανατολισμένος με σύνολο κορυφών $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και σύνολο ακμών $\mathscr{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$ οι οποίες παριστάνονται ως γραμμές που ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές. Ο δεύτερος είναι προσανατολισμένος, με σύνολο κορυφών $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και σύνολο ακμών $\mathscr{E} = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 4), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (7, 3), (8, 7)\}$. Εδώ οι ακμές παριστάνονται ως βέλη που ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές για να υποδηλώσουν την φορά (ή τον *προσανατολισμό*) της κάθε ακμής. Από μαθηματική άποψη στη μία περίπτωση έχουμε δυσύνολα (ή *απλά ζεύγη* $\{i, j\}$) και στη δεύτερη *διατεταγμένα ζεύγη* (i, j).



Μη προσανατολισμένος γράφος Προσανατολισμένος γράφος

Έστω $(V, \mathscr{E})$ ένας μη προσανατολισμένος γράφος. Μια αλληλουχία από κορυφές του γράφου $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k$ ονομάζεται μονοπάτι αν $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\} \in \mathscr{E}$, αν δηλαδή οι διαδοχικές κορυφές συνδέονται μεταξύ τους με ακμές. Το μονοπάτι ονομάζεται απλό αν $v_i \neq v_j$ για $i \neq j$, αν δηλαδή καμμία κορυφή δεν επαναλαμβάνεται (δηλαδή κάθε κορυφή είναι διαφορετική από κάθε άλλη). Ένας γράφος ονομάζεται *συνεκτικός* αν κάθε ζεύγος κορυφών του γράφου συνδέεται με κάποιο απλό μονοπάτι. Ένα μονοπάτι ονομάζεται *κύκλος* αν κάθε κορυφή του είναι διαφορετική από κάθε άλλη εκτός από την πρώτη και την τελευταία. Ένας γράφος ονομάζεται *δένδρο* αν είναι συνεκτικός και δεν περιλαμβάνει κανένα κύκλο. Μπορεί να δει κανείς ότι ένα δένδρο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι αν του αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ακμή τότε παύει να είναι συνεκτικός γράφος, χωρίζεται δηλαδή σε δύο τμήματα.

Ένας υπογράφος ενός γράφου είναι ένας γράφος που έχει όλες τις κορυφές του αρχικού γράφου και ένα υποσύνολο των ακμών του. *Δένδρο επικάλυψης* (spanning tree) ενός γράφου είναι ένας υπογράφος του γράφου που είναι ταυτόχρονα και δένδρο.

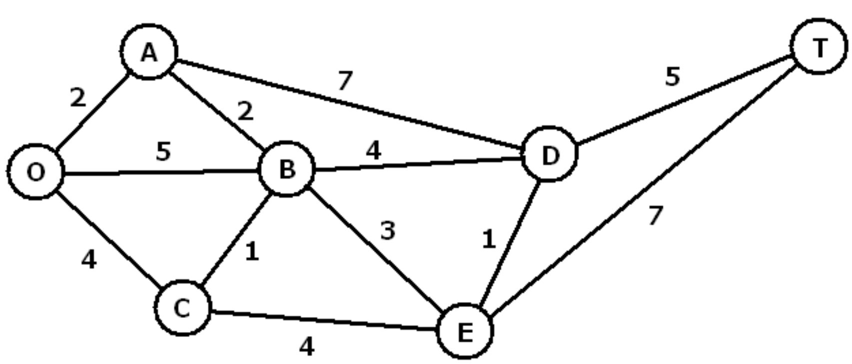
3.2 Ελάχιστα δένδρα επικάλυψης

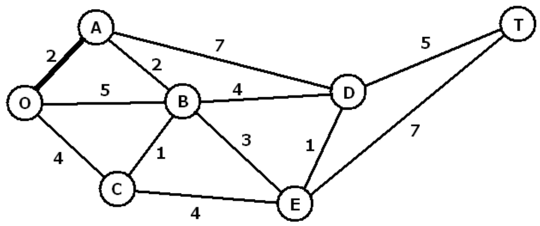
Έστω ότι έχουμε ένα γράφο $(V, \mathscr{E})$ του οποίου οι ακμές χαρακτηρίζονται από αριθμούς. Για παράδειγμα οι κορυφές του γράφου θα μπορούσαν να είναι κτίρια μέσα σε ένα πάρκο, οι ακμές δρόμοι που ενώνουν τα κτίρια μεταξύ τους, και οι αριθμοί που χαρακτηρίζουν τις ακμές τα μήκη των δρόμων. Έτσι, στο παρακάτω σχήμα, w_{ij} είναι το μήκος του δρόμου που ενώνει το κτίριο i και το κτίριο j. Έστω ότι θέλουμε να ενώσουμε όλα τα κτίρια με οπτικές ίνες (τοποθετώντας τις υπογείως και σκάβοντας κατά μήκος του δρόμου). Τότε μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα δένδρο επικάλυψης το οποίο να έχει ελάχιστο συνολικό μήκος. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ένα *άπληστο* αλγόριθμο (greedy algorithm) ως εξής.

Έστω S το σύνολο των κορυφών τις οποίες έχω συνδέσει μεταξύ τους (αρχικά $S = \emptyset$). Σε κάθε βήμα διαλέγω από το $V \setminus S$ (δηλαδή από το σύνολο των κορυφών του γράφου που δεν ανήκει στο S) την κορυφή εκείνη που απέχει ελάχιστη απόσταση από το S. Την προσθέτω στο S και επιλέγω και την ακμή εκείνη που εξασφαλίζει την ελάχιστη απόσταση. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου το S να περιλάβει όλες τις κορυφές του γράφου. Για να ξεκινήσει ο αλγόριθμος αρκεί να διαλέξουμε μια οποιαδήποτε κορυφή και να την τοποθετήσουμε στο S το οποίο αρχικά είναι κενό.

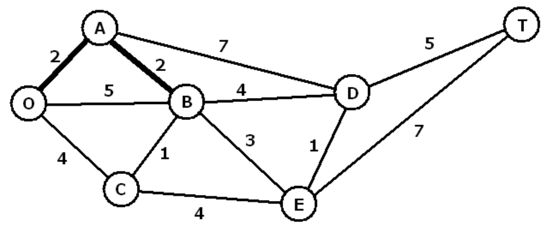
Ο αλγόριθμος αυτός (γνωστός και ως αλγόριθμος του Prim) είναι ένα κλασσικό δείγμα άπληστου αλγορίθμου ο οποίος συμπεριφέρεται μυωπικά (δηλαδή επιλέγει ανά πάσα στιγμή το βραχυπρόθεσμο βέλτιστο) αλλά βρίσκει την συνολικά βέλτιστη λύση.

Το ακόλουθο παράδειγμα αποσαφηνίζει την εφαρμογή του αλγορίθμου. Επτά κτίρια (O, A, B, C, D, E, T,) βρίσκονται διεσπαρμένα σε ένα πάρκο και συνδέονται με δρόμους όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Οι ακμές του γράφου απεικονίζουν τους δρόμους και οι αριθμοί δίπλα στις ακμές τις αντίστοιχες αποστάσεις. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου του Prim. Αρχικά $S = \emptyset$ και τοποθετώντας την κορυφή O έχουμε $S = \{O\}$. Στο πρώτο βήμα βλέπουμε ότι από τις ακμές που συνδέονται με στοιχεία του S και που είναι οι OA, OB, OC, εκείνη που έχει το μικρότερο μήκος είναι η OA. Άρα $S = \{O, A\}$ και η ακμή OA προστίθεται στο ελάχιστο δένδρο επικάλυψης. Στο δεύτερο βήμα παρατηρούμε ότι οι ακμές που συνδέουν στοιχεία που δεν ανήκουν στο S με στοιχεία που ανήκουν στο S είναι οι OB, OC, AB και AD. Από αυτές η AB έχει ελάχιστο μήκος και επομένως το S γίνεται $S = \{O, A, B\}$ και η AB προστίθεται στο ελάχιστο δένδρο επικάλυψης. Στο βήμα 3 παρατηρούμε ότι οι ακμές που συνδέουν στοιχεία που δεν ανήκουν στο S με στοιχεία που ανήκουν στο S είναι οι OC, BC, BE, BD και AD. Από αυτές το ελάχιστο μήκος το έχει η BC. Έτσι η κορυφή C προστίθεται στο S το οποίο γίνεται $S = \{O, A, B, C\}$ και η ακμή BC στο ελάχιστο δένδρο επικάλυψης. Στα βήματα 4, 5 και 6 προσθέτουμε διαδοχικά την κορυφή E και την ακμή BE, την κορυφή D και την ακμή ED, και την κορυφή T και την ακμή DT αντίστοιχα συμπληρώνοντας έτσι το δένδρο ελάχιστης επικάλυψης.

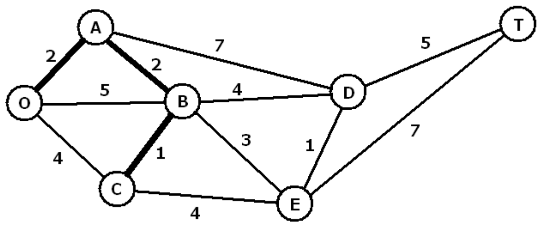




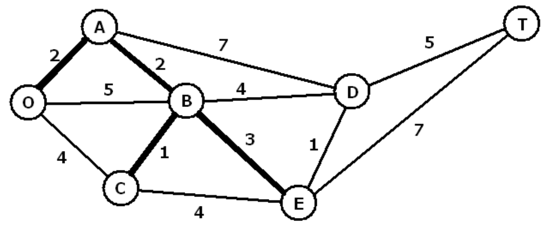
Βήμα 1



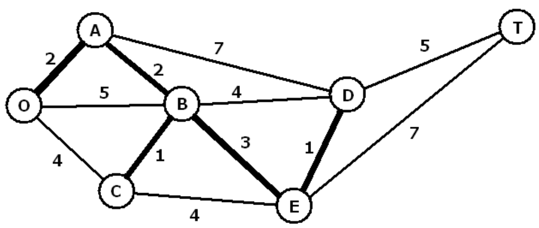
Βήμα 2



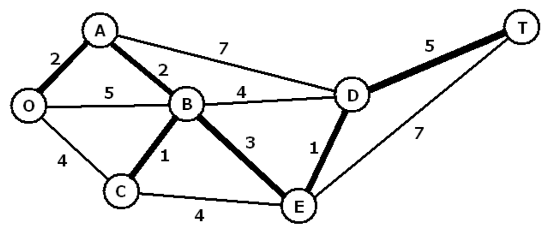
Βήμα 3



Βήμα 4



Βήμα 5



Βήμα 6

3.3 Πρόβλημα μέγιστης ροής σε προσανατολισμένους γράφους

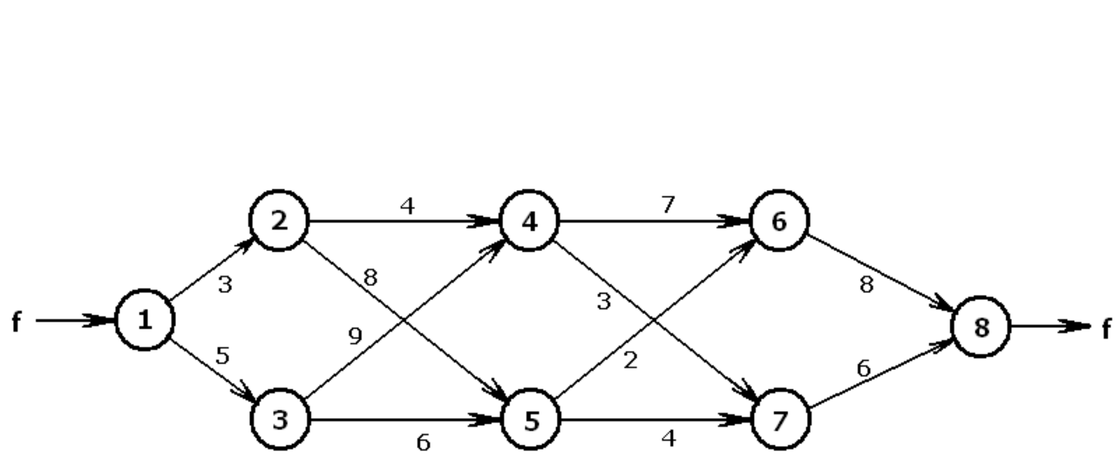
Στο παρόν Ένας προσανατολισμένος γράφος μπορεί να περιγραφεί από τον λεγόμενο πίνακα πρόσπτωσης ο οποίος κατασκευάζεται ως εξής. Αν υποθέσουμε ότι $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ δηλαδή ότι έχουμε αριθμήσει τις κορυφές του γράφου τότε οι ακμές είναι ένα υποσύνολο του $V \times V$. Αν $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι οι ακμές του γράφου τότε έχουμε ένα πίνακα $m \times n$ του οποίου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια κορυφή (ή κόμβο) και κάθε στήλη σε μια ακμή. Η στήλη που αντιστοιχεί στην ακμή (k, l) είναι η

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

όπου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν εκτός από το στοιχείο k που είναι -1 και το στοιχείο l που είναι $+1$. Για παράδειγμα ο πίνακας πρόσπτωσης που αντιστοιχεί στον γράφο του σχήματος είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & & & & & & & & & & \\ 1 & & -1 & -1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & -1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & -1 & -1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & -1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & -1 & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & -1 \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι οι χωρητικότητες των αγωγών είναι u_j για την ακμή j τότε έχουμε το γραμμικό πρόγραμμα που λύνει το πρόβλημα της μέγιστης ροής.



Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

$$\max f \tag{3.1}$$
$$s.t.$$

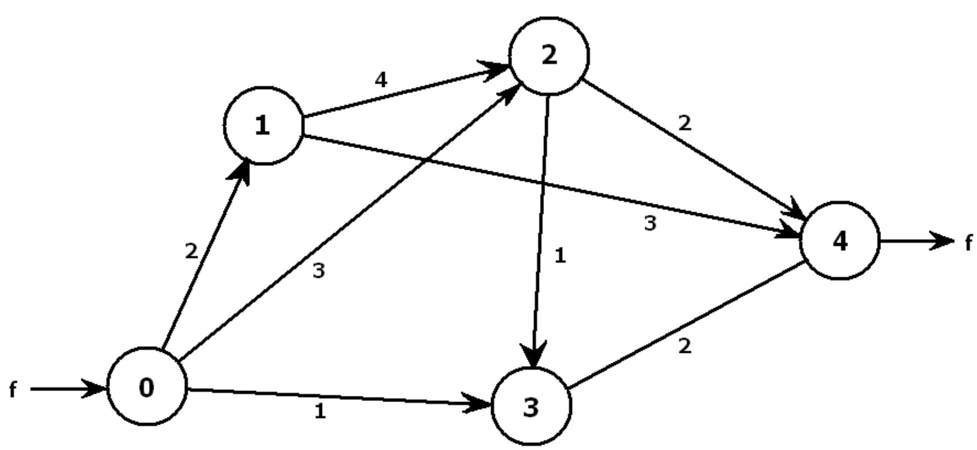
$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrcr}
-x_{12} & -x_{13} & & & & & & & & & & & = & -f \\
x_{12} & & -x_{24} & -x_{25} & & & & & & & & & = & 0 \\
 & x_{13} & & & -x_{34} & -x_{35} & & & & & & & = & 0 \\
 & & x_{24} & & +x_{34} & & -x_{46} & -x_{47} & & & & & = & 0 \\
 & & & x_{25} & & +x_{35} & & & -x_{56} & -x_{57} & & & = & 0 \\
 & & & & & & x_{46} & & +x_{56} & & -x_{68} & & = & 0 \\
 & & & & & & & x_{47} & & +x_{57} & & -x_{78} & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & x_{68} & +x_{78} & = & f \\
x_{12} & & & & & & & & & & & & \leq & 3 \\
 & x_{13} & & & & & & & & & & & \leq & 5 \\
 & & x_{24} & & & & & & & & & & \leq & 4 \\
 & & & x_{25} & & & & & & & & & \leq & 8 \\
 & & & & x_{34} & & & & & & & & \leq & 9 \\
 & & & & & x_{35} & & & & & & & \leq & 6 \\
 & & & & & & x_{46} & & & & & & \leq & 7 \\
 & & & & & & & x_{47} & & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & & & & x_{56} & & & & \leq & 2 \\
 & & & & & & & & & x_{57} & & & \leq & 4 \\
 & & & & & & & & & & x_{68} & & \leq & 8 \\
 & & & & & & & & & & & x_{78} & \leq & 6
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 12.$$

Στη συνέχεια δίνουμε ένα δεύτερο παράδειγμα

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrcr}
\multicolumn{10}{l}{\max f} & (3.2) \\
\multicolumn{11}{l}{s.t.} \\
x_{01} & +x_{02} & +x_{03} & & & & & & & = & -f \\
-x_{01} & & & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & = & 0 \\
 & -x_{02} & & -x_{12} & & & +x_{23} & +x_{24} & & = & 0 \\
 & & -x_{03} & & -x_{13} & & -x_{23} & & +x_{34} & = & 0 \\
 & & & & & -x_{14} & & -x_{24} & -x_{34} & = & 0 \\
x_{01} & & & & & & & & & \leq & 2 \\
 & x_{02} & & & & & & & & \leq & 3 \\
 & & x_{03} & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_{12} & & & & & & \leq & 4 \\
 & & & & x_{13} & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_{14} & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & & x_{23} & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_{24} & & \leq & 2 \\
 & & & & & & & & x_{34} & \leq & 2
\end{array}
$$

$x_{ij} \geq 0.$



3.4 Το πρόβλημα της ροής ελαχίστου κόστους

Ας θεωρήσουμε ότι το κόστος ροής μιας μονάδας στην ακμή j είναι c_j. Τότε η βέλτιστη ροή που ελαχιστοποιεί το κόστος κάτω από τους περιορισμούς ότι η συνολική ροή πρέπει να είναι ίση με μια δεδομένη ποσότητα f είναι

$$\min \sum_{j=1}^{12} c_j x_j \tag{3.3}$$

s.t.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrcr}
-x_1 & -x_2 & & & & & & & & & & & = & -f \\
x_1 & & -x_3 & -x_4 & & & & & & & & & = & 0 \\
 & x_2 & & & -x_5 & -x_6 & & & & & & & = & 0 \\
 & & x_3 & & x_5 & & -x_7 & -x_8 & & & & & = & 0 \\
 & & & x_4 & & x_6 & & & -x_9 & -x_{10} & & & = & 0 \\
 & & & & & & x_7 & & x_9 & & -x_{11} & & = & 0 \\
 & & & & & & & x_8 & & x_{10} & & -x_{12} & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & x_{11} & x_{12} & = & f \\
x_1 & & & & & & & & & & & & \leq & 3 \\
 & x_2 & & & & & & & & & & & \leq & 5 \\
 & & x_3 & & & & & & & & & & \leq & 4 \\
 & & & x_4 & & & & & & & & & \leq & 8 \\
 & & & & x_5 & & & & & & & & \leq & 9 \\
 & & & & & x_6 & & & & & & & \leq & 6 \\
 & & & & & & x_7 & & & & & & \leq & 7 \\
 & & & & & & & x_8 & & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & & & & x_9 & & & & \leq & 2 \\
 & & & & & & & & & x_{10} & & & \leq & 4 \\
 & & & & & & & & & & x_{11} & & \leq & 8 \\
 & & & & & & & & & & & x_{12} & \leq & 6
\end{array}
$$

$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 12.$