

Θεωρια Μέτρου : Ασκήσεις

Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, ΟΠΑ

Παραδώστε όλες τις ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το λήμμα του Fatou αποδείξτε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.
2. Δείξτε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα της χαρακτηριστικής συνάρτησης για τυχαίες μεταβλητές με κατάλληλο αριθμό ροπών, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.
3. Δείξτε ότι το όριο μιας ακολουθίας μετρησιμων συναρτήσεων εφόσον υπάρχει είναι μετρησιμη συνάρτηση.
4. Κατασκευάστε ένα παράδειγμα που θα δείχνει το ότι η θετικότητα είναι απαραίτητη για να ισχύει το λήμμα του Fatou
5. Δίνεται η ακολουθία $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} n & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x < 1. \end{cases}$$

Τι έχετε να πείτε σχετικά με την σύγκλιση της ς.π. και στους χώρους L^p ;