Θεωρία μέτρου: Συμπληρωματικές σημειώσεις
Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

1 Θεώρημα Radon-Nikodym

1.1 Προσημασμένα μέτρα

Ορισμός 1.1. *Έστω $(X, \mathcal{F})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια απεικόνιση $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ονομαζεται προσημασμένο μετρο αν*

(i) $\nu(\emptyset) = 0$,

(ii) Για κάθε $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, με $A_i \cap A_j = \emptyset$, ισχύει ότι $\nu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \nu(A_i)$.

Αν ορίσουμε το $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ θα πρέπει να συμπληρώσουμε στον παραπάνω ορισμό ότι το ν παίρνει το πολύ μία απο τις τιμες $\pm\infty$.

Παράδειγμα 1.2. *Αν $f : X \to \mathbb{R}$, μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη τότε $A \mapsto \nu(A) := \iint_A f d\mu$ είναι ένα προσημασμένο μέτρο. Αν $f \geq 0$ τότε είναι μετρο.*

Τα προσημασμένα μέτρα μας επιτρέπουν να ορισουμε γραμμικούς συνδιασμούς μέτρων. Αν μ_1, μ_2 είναι δύο μέτρα και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε $\nu = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$, ως $\nu(A) = \lambda_1\mu_1(A) + \lambda_2\mu_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Το ν είναι εν γένει ένα προσημασμένο μέτρο. Με την επέκταση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε τον χώρο τον προσημασμένων μέτρων σαν ένα διανυσματικό χώρο.

Ένα προσημασμένο μετρο μοιάζει να έχει όλες τις ιδιότητες ενός μέτρου εκτός απο το να είναι θετικό! Όμως χρειάζεται προσοχή επειδή εν γένει τα προσημασμένα μέτρα δεν έχουν την ιδιότητα της μονοτονίας δηλαδή δεν ισχυει απαραίτητα ότι αν $A_1 \subset A_2$ έχουμε και $\nu(A_1) \leq \nu(A_2)$! Ευτυχώς όμως διατηρούν την ιδιότητα της συνέχειας ως προς την μονότονη συγκλιση ακολουθιών μετρησιμων συνόλων (η απόδειξη της ιδιότητας αυτής παραμένει σχεδόν ίδια με τα κανονικά μέτρα).

Για να μπορέσουμε να διατηρήσουμε ορισμένες ιδιότητες μονοτονίας στα προσημασμένα μέτρα χρειάζεται να ορίσουμε κατάλληλα υποσύνολα του $\mathcal{F}$.

Ορισμός 1.3. *Έστω $(X, \mathcal{F}, \nu)$ ένας προσημασμένος χώρος μέτρου.*

(ι) Ένα σύνολο $E \in \mathcal{F}$ ονομάζεται θετικό σύνολο για το ν αν $\nu(E_0) \geq 0$ για κάθε $E_0 \subset E$, μετρήσιμο.

(ιι) Ένα σύνολο $E \in \mathcal{F}$ ονομάζεται αρνητικό σύνολο για το ν αν $\nu(E_0) \leq 0$ για κάθε $E_0 \subset E$, μετρήσιμο.

(ιιι) Ένα σύνολο $E \in \mathcal{F}$ ονομάζεται μηδενοσύνολο για το ν αν $\nu(E_0) = 0$ για κάθε $E_0 \subset E$. μετρήσιμο.

Μπορεί κανείς να δειξει ότι η ενωση θετικων (αρνητικών) συνόλων παραμένει θετικό (αρνητικό) σύνολο.

Παράδειγμα 1.4. *Αν $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μετρου $f : X \to \mathbb{R}$ μετρησιμη συναρτηση και $A \mapsto \nu(A) := \int_A f d\mu$ το προσημασμένο μέτρο που ορίζεται απο την συνάρτηση αυτή, τότε $E_+ = \{x \in X \ : \ f(x) \geq 0\}$ είναι θετικό σύνολο για το ν και $E_- = \{x \in X \ : \ f(x) \leq 0\}$ είναι αρνητικό σύνολο για το ν.*

1.2 Διάσπαση Hahn και διάσπαση Jordan

Σε ότι ακολουθεί θα θεωρήσουμε έναν προσημασμένο χώρο με μέτρο $(X, \mathcal{F}, \nu)$.

Ορισμός 1.5 (Διάσπαση Hahn)**.** *Το ζευγος μετρησιμων συνόλων $\{A_{+,-}\}$ ονομάζεται διάσπαση Hahn για το προσημασμένο μέτρο ν, αν*

(i) $A_+ \cap A_- = \emptyset$ και $A_+ \cup A_- = X$, και

(ii) A_+ θετικό σύνολο και A_- αρνητικό σύνολο.

Πρίν ορίσουμε την διάσπαση Jordan χρειάζεται να ορίσουμε την έννοια των αμοιβαία ιδιόμορφων μέτρων (mutually singular measures.)

Ορισμός 1.6 (Αμοιβαια ιδιόμορφα μέτρα)**.** *Δύο προσημασμένα μετρα ν_1, ν_2, είναι αμοιβαία ιδιόμορφα, και θα συμβολίζουμε αυτό με $\nu_1 \perp \nu_2$ αν υπάρχουν μετρησιμα συνολα $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ με τις ιδιότητες* (*i*) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ *και* $A_1 \cup A_2 = X$,

(*ii*) A_1 *μηδενοσύνολο για το* ν_2 *και* A_2 *μηδενοσύνολο για το* ν_1.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την διάσπαση Jordan.

Ορισμός 1.7 (Διάσπαση Jordan)**.** *Μία διάσπαση Jordan για το προσημασμένο μέτρο* ν *είναι ένα ζεύγος μέτρων* $\{\nu_+, \nu_-\}$ *τέτοια ώστε* $\nu_+ \perp \nu_-$ *και* $\nu = \nu_+ - \nu_-$.

Η φύση της διάσπασης Hahn και της διάσπασης Jordan είναι διαφορετική: Η πρώτη είναι μια διάσπαση του X σε δυο υποσύνολα που συνδέονται με το μέτρο μέσω θετικότητας και αρνητικότητας, ενώ η δεύτερη είναι μια διάσπαση του προσημασμένου μέτρου σε δυο αμοιβαία ιδιόμορφα μετρα που η διαφορά τους αναπαριστά το μέτρο. Όμως, οι δύο αυτές διασπάσεις συνδέονται μεταξύ τους και είναι υπο μία έννοια ισοδύναμες, δεδομένου ότι αν έχουμε μια διάσπαση Hahn μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διάσπαση Jordan και αντίστροφα.

Πρόταση 1.8 (Ισοδύναμία των διασπάσεων Hahn και Jordan)**.** *Έστω* $(X, \mathcal{F}, \nu)$ *ένας προσημασμένος χώρος μέτρου, με* $\{A_+, A_-\}$ *και* $\{\nu_+, \nu_-\}$ *μία διάσπαση Hahn και Jordan αντιστοίχως.*

(*i*) *Το ζεύγος* $\{\nu'_+, \nu'_-\}$ *με* $\nu'_+(A) := \nu(A \cap A_+)$ *και* $\nu'_-(A) := -\nu(A \cap A_-)$ *για κάθε* $A \in \mathcal{F}$ *αποτελεί μια διάσπαση Jordan για το προσημασμένο μέτρο* ν.

(*ii*) *Το ζεύγος* $\{A'_+, A'_-\}$ *όπου* $A'_+ \cap A'_- = \emptyset$ *και* $A'_+ \cup A'_- = X$, *με* A'_+ *μηδενοσύνολο για το μέτρο* ν_- *και* A'_- *μηδενοσύνολο για το μέτρο* ν_+ *είναι διάσπαση Hahn για το προσημασμένο μέτρο* ν.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (*ii*). Αν A'_+ μηδενοσύνολο για το μέτρο ν_- τότε για κάθε $A \subset A'_+$ έχουμε ότι $\nu_-(A) = 0$. Συνεπώς $\nu(A) = \nu_+(A) - \nu_-(A) = \nu_+(A) \geq 0$, οπότε A'_+ θετικό σύνολο για το ν. Ομοίως το A'_- είναι αρνητικό σύνολο για το ν. Εφόσον $\nu_+ \perp \nu_-$, μπορεί να υπάρχουν τα σύνολα A'_+, A'_-. □

Παράδειγμα 1.9. *Έστω* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *χώρος μέτρου,* $f : X \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμη συνάρτηση και* ν *το προσημασμένο μέτρο* $A \mapsto \nu(A) := \int_A f d\mu$, *για κάθε* $A \in \mathcal{F}$. *Αν* $A_+ = \{x \in X \ : \ f(x) \geq 0\}$ *και* $A_- = \{x \in X \ : \ f(x) \leq 0\}$ *τότε* $\{A_+, A_-\}$ *είναι διάσπαση Hahn για το μέτρο* ν. *Επίσης αν* ν_+, ν_- *τα μέτρα που ορίζονται ως* $A \mapsto \nu_\pm(A) := \int_A f^\pm d\mu$, *για κάθε* $A \in \mathcal{F}$ *όπου* $f^+ = \max(f, 0)$ *και* $f^- = \max(-f, 0)$ *τότε* $\{\nu_+, \nu_-\}$ *είναι διάσπαση Jordan για το μέτρο* ν.

Θα δειξουμε ότι οποιοδήποτε προσημασμένο μέτρο επιδέχεται διάσπαση Hahn και απο τα παραπάνω προκύπτει ότι επιδέχεται και μοναδική διάσπαση Jordan.

Θεώρημα 1.10 (Hahn)**.** *Ένα προσημασμένο μέτρο* ν *επιδέχεται μια διάσπαση Hahn* (A_+, A_-) *η οποία είναι μοναδική υπο την έννοια ότι αν* (A'_+, A'_-) *είναι μία εναλλακτικη διάσπαση Hahn τότε τα σύνολα* $A_+ \Delta A'_+$ *και* $A_- \Delta A'_-$ *είναι μηδενοσύνολα για το* ν.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικα ότι $\nu(A) < +\infty$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$ και ας συμβολίσουμε με $\mathcal{A}_+$ το σύνολο των θετικων συνόλων του ν. Ορίζουμε $m := \sup\{\nu(A) \ : \ A \in \mathcal{A}_+\}$ και κατά συνέπεια εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μια ακολουθία συνόλων $\{A_i, \ i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{A}_+$, τέτοια ώστε $\lim_i \nu(A_i) = m$. Ορίζουμε $A_+ = \bigcup_i A_i$ και $A_- = X \setminus A_+$, και θα δείξουμε ότι τα A_+, A_- είναι η διάσπαση Hahn που χρειαζόμαστε.

Θα δείξουμε πρώτα ότι $A_+ \in \mathcal{A}$ και $\nu(A_+) = m < \infty$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε $\bigcup_i A_i = \bigcup_i B_i$ με $B_i = A_i \setminus (\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k)$, τα οποία είναι ανα δυο ξένα και ικανοποιούν $B_i \subset A_i \in \mathcal{A}_+$ (εφόσον $A_i \in \mathcal{A}_+$. Για οποιοδήποτε $A \subset A_+$ έχουμε $A = A \cap A_+ = A \cap \left(\bigcup_i B_i\right) = \bigcup_i (A \cap B_i)$, με τα $A \cap B_i$ ανα δύο ξένα και θετικά σύνολα (εφόσον $A \cap B_i \subset B_i$) συνεπώς $\nu(A) = \sum_i \nu(A \cap B_i) \geq 0$. Άρα, $A_+ \in \mathcal{A}_+$. Επειδή $A_+ = \bigcup_i A_i$ έχουμε οτι $\nu(A_+) = \nu(\bigcup_i A_i) = \lim_i \nu(A_i) = m$ (τα προσημασμένα μέτρα είναι συνεχή ως προς την μονότονη συγκλιση ακολουθιών συνόλων – αυτό αποδεικνύεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως και για τα θετικα μέτρα).

Θα δειξουμε τώρα ότι $A_- \in \mathcal{A}_-$, όπου $\mathcal{A}_-$ είναι το σύνολο των αρνητικών συνόλων για το ν.

Έστω πως όχι. Τότε μπορεί να υπάρχουν υποσύνολα $A \subset A_-$ για τα οποία ισχύει $\nu(A) \geq 0$. Επιλέγουμε ένα τέτοιο υποσύνολο A. Ισχυριζόμαστε ότι για το σύνολο αυτο θα υπάρχει ένα υποσύνολο $A_0 \subset A_-$ το οποίο να είναι θετικό σύνολο για το ν, και να ικανοποιεί την συνθήκη $\nu(A_0) > 0$. Την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού παραθέτουμε στο Λήμμα 1.11 Αλλά τότε αν $B = A_0 \cup A_+$ επειδή $A_0 \cap A_+ = \emptyset$ (επειδή $A_0 \subset A_- = X \setminus A_+$) θα έχουμε $\nu(A_0 \cup A_+) = \nu(A_0) + \nu(A_+) > \nu(A_+) = m$ το οποίο είναι άτοπο εφόσον το $A_0 \cup A_+ \in \mathcal{A}_+$ (ως ένωση θετικων συνόλων). Συνεπώς, $A_- \in \mathcal{A}_-$.

Τέλος, αν $\{A_+, A_-\}$ και $\{A'_+, A'_-\}$ δύο διασπάσεις Hahn έχουμε ότι $A_+ \setminus A'_+ = A_+ \cap (A'_+)^c \subset A_+$, αρα $A_+ \setminus A_+$ θετικό σύνολο. Απο την άλλη, $A_+ \setminus A'_+ = A_+ \cap (A'_+)^c = A_+ \cap A'_- \subset A'_-$, αρα $A_+ \setminus A_+$ αρνητικό σύνολο. Εφόσον το $A_+ \setminus A_+$ είναι ταυτόχρονα και θετικό και αρνητικό σύνολο είναι μηδενοσύνολο. Όμοια για το $A'_+ \setminus A_+$, συνεπώς το $A_+ \Delta A'_+$ είναι μηδενοσύνολο. □

Λήμμα 1.11. *Έστω $(X, \mathcal{F}, \nu)$ προσημασμένος χώρος μέτρου. Αν $A \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $0 < \mu(A) < \infty$ τότε υπάρχει θετικό σύνολο A_0 για το μέτρο ν, τέτοιο ώστε $A_0 \subset A$ και $\nu(A_0) > 0$.*

Απόδειξη. Αν A θετικό σύνολο για το ν τότε για κάθε $A' \subset A$ ισχύει $\nu(A') \geq 0$. Αν $\nu(A') > 0$ τότε $A_0 = A'$. Αν $\nu(A') = 0$, και ορίσουμε $A_0 = A \setminus A'$, τότε $\nu(A) = \nu(A \setminus A') + \nu(A')$ έχουμε ότι $\nu(A_0) > 0$.

Μένει να ελέγξουμε την περίπτωση όπου το A δεν είναι θετικό σύνολο. Τότε, υπάρχει κάποιο $B_1 \subset A$ με την ιδιότητα $\nu(B_1) < 0$, και ας θέσουμε

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists\, B_1 \subset A, \text{ τέτοιο ώστε } \ \nu(B_1) < -\frac{1}{n}\}.$$

Αν το $A \setminus B_1$ είναι θετικό σύνολο τότε με το ίδιο επιχείρημα όπως και παραπάνω, έχουμε δείξει το ζητούμενο. Αν το $A \setminus B_1$ δεν είναι θετικό σύνολο, τοτε υπάρχει $B_2 \subset A \setminus B_1$ τέτοιο ώστε $\nu(B_2) < 0$ και έστω

$$n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists\, B_2 \subset A \setminus B_1, \text{ τέτοιο ώστε } \nu(B_2) < -\frac{1}{n}\}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε μια ακολουθία συνόλων $\{B_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ και μία ακολουθία φυσικών αριθμών $\{n_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ με την ιδιότητα $B_i \setminus (\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k)$ και $\nu(B_i) < -\frac{1}{n_i}$, $i \in \mathbb{N}$, με

$$n_i = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists\, B_i \subset A \setminus (\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k), \text{ τέτοιο ώστε } \nu(B_i) < -\frac{1}{n}\}.$$

Αν σε κάποιο βήμα $i \in \mathbb{N}$, το σύνολο $B_i \setminus (\bigcup_{k=1}^{i-1} B_k)$ είναι θετικό σύνολο έχουμε τελειώσει, αλλιώς μπορούμε να πάρουμε το $A_0 = A \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$ το οποίο έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Πράγματι, απο κατασκευή τα B_i είναι ανα δυο ξένα, και ξένα με το B, οπότε

$$\nu(A) = \nu(A_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i),$$

και επειδή $\nu(A) < \infty$ και $\nu(A_0) < \infty$ θα πρέπει η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i)$ να συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο πραγματικό αριθμό. Απο τη κατασκευή των συνόλων $\{B_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i} < -\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i)$ οπότε, εφόσον η $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i)$ να συγκλίνει σε κάποιο πεπερασμένο πραγματικό αριθμό, ομοίως και η σειρά $\sum_{i=1} \frac{1}{n_i}$ θα συγκλίνει συνεπώς $n_i \to \infty$. Επιπλέον, εφόσον $\nu(B_i) < 0$ θα έχουμε και $\sum_{i=1}^{\infty} \nu(B_i) < 0$ και $0 < \nu(A) < \nu(A_0)$.

Αν δειξουμε ότι το A_0 είναι και θετικό σύνολο για το μέτρο ν τότε είναι ένα συνολο που έχει τις ιδιότητες που ζητάμε. Για να το δείξουμε αυτό, ας υποθέσουμε πως δεν ισχύει οπότε υπάρχει υποσύνολο $A'_0 \subset A_0$ με μέτρο $\nu(A'_0) < 0$. Ας θέσουμε $K = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \nu(A'_0) < -\frac{1}{n}\}$. Επειδή η ακολουθία $n_i \to \infty$ και υπάρχει k τέτοιο ώστε $n_k > K$ πράγμα που σημαίνει ότι $-\frac{1}{n_k} > -\frac{1}{K} > \nu(A'_0)$. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $A_0 = A \setminus (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = A \cap \Bigg(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c) \subset A \cap (\bigcap_{i=1}^{m} B_i^c) = A \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} B_i)$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Με βάση αυτή την παρατήρηση, $A'_0 \subset A_0 \subset A \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i)$ οπότε το σύνολο A'_0 είναι ένα υποσύνολο που ικανοποιεί $A'_0 \subset A \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} B_i)$ με $-\frac{1}{K} > \nu(A'_0)$ για $K < n_k$, το οποίο όμως ερχεται σε αντιθεση με τον ορισμό του n_k (βλ. παραπάνω). Αυτό μας οδηγεί σε άτοπο άρα το A_0 είναι και θετικό σύνολο. □

Θεώρημα 1.12. *Αν $(X, \mathcal{F}, \nu)$ προσηασμένος χώρος μέτρου, το ν έχει μοναδική διάσπαση Jordan $\nu = \nu_+ - \nu_-$.*

Απόδειξη. Το Θεώρημα 1.10 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας διάσπασης Hahn. Η Πρόταση 1.8 μας εξασφαλίζει απο αυτή την ύπαρξη μιας διάσπασης Jordan. Για να δείξουμε την μοναδικότητα παρατηρούμε ότι απο το Θεώρημα 1.10 αν $\{A_+, A_-\}$, $\{A'_+, A'_-\}$ δύο διασπάσεις Hahn τότε τα $A_+ \Delta A'_+$ και $A_- \Delta A'_-$ είναι μηδενοσύνολα. Αν συγκρίνουμε τα μέτρα ν_+ και ν'_+ που ορίζονται ως $A \mapsto \nu_+(A) := \nu(A \cap A_+)$ και $A \mapsto \nu'_+(A) := \nu(A \cap A'_+)$ θα δούμε οτι ταυτίζονται γιατι το $A_+ \Delta A'_+$ είναι μηδενοσύνολο.Όμοια για τα ν_- και ν'_i. □

1.3 Η συνολική μεταβολή (total variation) ενός προσημασμένου μέτρου

Έστω $(X, \mathcal{F}, \nu)$ προσημασμένος χώρος μέτρου με διάσπαση Jordan $\nu = \nu_+ - \nu_-$. Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε συνολο $A \in \mathcal{F}$ και μια (πεπερασμένη) διαμέριση του $P_A = \{A_1, \cdots, A_n\}$ (δηλ. σύνολα ανα δυο ξένα που η ένωση τους είναι το A), και ας ονομάσουμε $\mathcal{P}_A$ το σύνολο των διαμερίσεων του A (για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$).

Ορισμός 1.13. *Το μέτρο $|\nu| : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ το οποίο ορίζεται ως*

$$|\nu|(A) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| \ : \ \{A_1, \cdots, A_n\} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } A\} \ \forall A \in \mathcal{F},$$

όπου το sup λαμβάνεται επάνω στο σύνολο $\mathcal{P}_A$ ονομάζεται συνολική μεταβολή του προσημασμένου μέτρου ν.

Η συνολική μεταβολή ενός προσημασμένου μέτρου ν, μπορεί να εκφραστεί σε πιο απλή μορφή κάνοντας χρήση της διάσπασης Jordan.

Πρόταση 1.14. *Αν το προσημασμένο μέτρο ν, έχει διάσπαση Jordan $\nu = \nu_+ - \nu_-$, τότε $|\nu| = \nu_+ + \nu_-$.*

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{F}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $P_A = \{A_1, \cdots, A_n\}$ είναι οποιαδηποτε διαμέριση του A, τότε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\nu_+(A_i) + \nu_-(A_i)| &\le \sum_{i=1}^{n} \Big(|\nu_+(A_i)| + |\nu_-(A_i)| \Big) \\ = \sum_{i} (\nu_+ + \nu_-)(A_i) &= (\nu_+ + \nu_-)(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = (\nu_+ + \nu_-)(A),\end{aligned}$$

όπου στην δευτερη γραμμή χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά το ότι τα ν_+, ν_- είναι μέτρα, οπότε και το $\nu_+ + \nu_-$ είναι μέτρο συνεπώς εχει την ιδιότητα της αθροιστικότητας. Εφόσον για οποιαδήποτε $P_A \in \mathcal{P}_A$ ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| \le (\nu_+ + \nu_-)(A)$ η ανισότητα θα ικανοποιείται και για το supremum επάνω σε όλες διαμερίσεις συνεπώς,

$$|\nu(A)| := \sup\{\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| \ : \ P_A \in \mathcal{P}_A\} \le (\nu_+ + \nu_-)(A).$$

Απομένει να αποδείξουμε την αντίστροφη ανισότητα.

Για να δειξουμε την αντίστροφη ανισοτητα ας πάρουμε μια διάσπαση Hahn (A_+, A_-) του μέτρου ν. Για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{F}$ ορίζουμε τα $A_1 = A \cap A_+$ και $A_2 = A \cap A_-$ και παρατηρούμε ότι $P_A = \{A_1, A_2\}$ αποτελεί μια διαμέριση του A. Απο τον ορισμό του $|\nu|$ ως sup επάνω στο σύνολο $\mathcal{P}_A$ και δεδομένου οτι η παραπάνω διαμέριση που κατασκευάσαμε με την βοήθεια της διάσπασης Hahn είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{P}_A$ βλέπουμε ότι

$$|\nu|(A) \ge |\nu(A_1)| + |\nu(A_2)| = |\nu(A \cap A_+)| + |\nu(A \cap A_-)| = \nu(A \cap A_+) - \nu(A \cap A_-), \tag{1}$$

δεδομένου ότι το A_+ είναι θετικό σύνολο για το ν, οπότε εφοσον $A \cap A_+ \subset A_+$ ισχύει πως $\nu(A \cap A_+ \ge 0$ (με παρόμοια επιχειρήματα για το $\nu(A \cap A_-) \le 0$). Όμως ας θυμηθούμε ότι αν έχουμε μια διάσπαση Hahn (A_+, A_-) για το ν, μπορούμε απο αυτή να κατασκευάσουμε μια διάσπαση Jordan για το ν (η οποία είναι και μοναδική) ως $\nu = \nu_+ - \nu_-$, με $\nu_+(A) = \nu(A \cap A_+)$, και $\nu_-(A) = -\nu(A \cap A_-)$, οπότε η (1) δίνει ότι

$$|\nu(A)| \ge \nu_+(A) + \nu_-(A) = (\nu_+ + \nu_-)(A),$$

που είναι και η αντίστροφη ανισότητα που ζητάμε. $\square$

Πρόταση 1.15. *Έστω $(X, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, και $A \mapsto \nu(A) := \int_A f d\mu$ το προσημασμένο μέτρο που παράγεται απο την f. Τότε*

$$\begin{aligned}|\nu|(A) = \int_A |f| d\mu &= \int_A (f^+ + f^-) d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F}, \\ \nu_+(A) &= \int_A f^+ d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F}, \\ \nu_-(A) &= \int_A f^- d\mu, \ \forall A \in \mathcal{F}.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

1.4 Αναπαράσταση οποιουδήποτε προσημασμένου μέτρου σαν ένα ολοκλήρωμα

Θεώρημα 1.16. *Έστω $(X, \mathcal{F}, \nu)$ προσημασμένος χώρος μέτρου και $\{A_+, A_-\}$ μία διάσπαση Hahn για το ν. Αν $|\nu|$ είναι η συνολική μεταβολή του προσημασμένου μέτρου ν τότε*

$$\nu(A) = \int_A (\mathbf{1}_{A_+} - \mathbf{1}_{A_-}) d|\nu|, \quad \forall\, A \in \mathcal{F}.$$

Απόδειξη. Απο την διάσπαση Hahn μπορούμε να πάρουμε την διάσπαση Jordan $\{\nu_+, \nu_-\}$, ως $A \mapsto \nu_+(A \cap A_+)$ και $A \mapsto -\nu_-(A \cap A_-)$, και γνωρίζουμε επίσης ότι $|\nu| = \nu_+ + \nu_-$. Κατά συνέπεια, για κάθε $A \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A (\mathbf{1}_{A_+} - \mathbf{1}_{A_-}) d|\nu| &= \int_X \mathbf{1}_{A\cap A_+} d|\nu| - \int_X \mathbf{1}_{A\cap A_-} d|\nu| \\ = |\nu(A \cap A_+)| - |\nu(A \cap A_-)| &= \nu_+(A \cap A_+) + \nu_-(A \cap A_+) - \nu_+(A \cap A_-) - \nu_-(A \cap A_-) \\ &= \nu(A \cap A_+) - \nu(A \cap A_+ \cap A_-) - \nu(A \cap A_+ \cap A_-) + \nu(A \cap A_-) \\ &= \nu(A \cap A_+) + \nu(A \cap A_-) = \nu(A).\end{aligned}$$

□

1.5 Απόλυτη συνεχεια μέτρων και παραγώγιση Radon-Nikodym

Ορισμός 1.17 (Απόλυτη συνέχεια μέτρων)**.** *Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν ένα μέτρο και ένα προσημασμένο μέτρο αντιστοίχως σε αυτόν. Θα λέμε ότι το προσημασμένο μέτρο ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο μ και θα συμβολίζουμε $\nu << \mu$ αν για κάθε $A \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) = 0$ ισχύει $\nu(A) = 0$.*

Παράδειγμα 1.18. *Αν $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $A \mapsto \nu(A) := \int_A f d\mu$ το προσημασμένο μέτρο που παράγεται απο αυτή τότε $\nu << \mu$.*

Θεώρημα 1.19 (Lebesgue-Radon-Nikodym)**.** *Έστω $(X, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρας και ν,μ, σ-πεπερασμένα προσημασμένο μέτρο και μέτρο αντίστοιχα. Τότε υπάρχουν μοναδικά σ-πεπερασμένα προσημασμένο μέτρο ν' και μέτρο μ' στον $(X, \mathcal{F})$ τέτοια ώστε*

$$\nu' \perp \mu, \;\; \mu' << \mu, \;\; \text{και } \nu = \nu' + \mu'.$$

Επίσης υπάρχει μοναδική (ς.π) μετρησιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mu'(A) = \int_A f d\mu, \;\; \forall\, A \in \mathcal{F}.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ν και μ θετικά πεπερασμένα μέτρα. Ορίζουμε το σύνολο

$$\Phi := \{f : X \to [0, \infty] \;:\; \int_A f d\mu \le \nu(A), \;\; \forall\, A \in \mathcal{F}\},$$

το οποίο δεν είναι κενό (εφόσον η μηδενική συνάρτηση ανήκει σε αυτό).

Το σύνολο αυτό έχει την ιδιότητα αν $f_1, f_2 \in \Phi$ τότε $h = \max(f_1, f_2) \in \Phi$. Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα γιατί αν $B = \{x \in X \;:\; f_1(x) > f_2(x)\}$ τότε

$$\int_A h d\mu = \int_{A\cap B} f_1 d\mu + \int_{A\setminus B} f_2 d\mu \le \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A).$$

Ορίζουμε $m = \sup\{\int f d\mu \;:\; f \in \Phi\}$ για το οποίο ισχυει $m \le \nu(X) < \infty$. Απο τον ορισμό του sup υπάρχει μια ακολουθία $\{f_n \;:\; n \in \mathbb{N}\} \subset \Phi$ τέτοια ώστε $\int f_n d\mu \to m$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $g_n = \max(f_1, \cdots, f_n)$ και την συνάρτηση $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ για την οποία ισχυει $g_n \uparrow f$, $\int g_m d\mu \ge \int f_n d\mu$, και επίσης $g_n \in \Phi$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια $\lim_n \int g_n d\mu = m$ και απο το θέωρημα μονότονης σύγκλισης $f \in \Phi$ και $\int f d\mu = m$.

Θα δείξουμε ότι το μέτρο ν' που ορίζεται ως $A \mapsto \nu(A) - \int_A f d\mu$ είναι θετικό μέτρο και $\nu' \perp \mu$. Το ότι είναι θετικό μετρο απορρέει απο το ότι $f \in \Phi$. Αν δεν ισχύει $\nu' \perp \mu$, υπάρχει $E \in \mathcal{F}$ και $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\mu(E) > 0$ και $\nu'(E) \ge \epsilon\mu(E)$. Τότε όμως, $\epsilon\mathbf{1}_E d\mu \le d\nu' = d\nu - f d\mu$, οπότε $(f + \epsilon\mathbf{1}_E)d\mu \le d\nu$, άρα $f + \epsilon\mathbf{1} \in \Phi$ και συνεπώς $\int(f + \epsilon\mathbf{1}_E)d\mu = m + \epsilon\mu(E) > m$ το οποίο είναι άτοπο. □