

## Φυλλάδιο 6

### 1. (Άσκηση 2.3.19 από Strang)

Υποθέστε ότι παίρνουμε  $n$  διανύσματα του  $\mathbb{R}^m$  σαν στήλες του πίνακα  $A$ . Εάν αυτά είναι ανεξάρτητα, ποια είναι η τάξη του  $A$ ; Εάν παράγουν τον  $\mathbb{R}^m$  ποια είναι η τάξη; Τι συμβαίνει όταν αυτά αποτελούν βάση του  $\mathbb{R}^m$ ;

### 2. (Άσκηση 2.4.4 από Strang)

Περιγράψτε τους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους του τριδιάστατου χώρου, που σχετίζονται με τον

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3. (Άσκηση 2.4.2 από Strang)

Βρείτε τη διάσταση και κατασκευάστε μια βάση των τεσσάρων υποχώρων των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 4. (Άσκηση 2.4.3 από Strang)

Βρείτε τη διάσταση και μια βάση των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 5.

#### a) (Άσκηση 2.4.9 από Strang)

Υποθέστε ότι η μόνη λύση του  $A \cdot x = 0$  ( $m$  εξισώσεις με  $n$  αγνώστους) είναι η  $x = 0$ . Ποια είναι η τάξη και γιατί;

#### b) (Άσκηση 2.4.11 από Strang)

Εάν το  $A \cdot x = b$  έχει πάντοτε μια τουλάχιστον λύση, δείξτε ότι η μόνη λύση του  $A^T \cdot y = 0$  είναι η  $y = 0$ . Υπόδειξη: Ποια είναι η τάξη;

6. Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 10 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ .

- Να βρεθεί βάση του μηδενόχωρου.
- Να βρεθεί βάση του υπόχωρου εκείνων των στοιχείων  $z$  του  $\mathbb{R}^4$  για τα οποία ισχύει ότι το σύστημα  $A \cdot x = z$  θα είχε τουλάχιστον μια λύση.
- Να βρεθεί βάση του υποχώρου εκείνων των στοιχείων του  $\mathbb{R}^4$  που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του  $A$

7. Έστω  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ .

- Να βρεθεί βάση εκείνων των  $x$  με την ιδιότητα ότι  $A \cdot x = 0$
- Να βρεθεί βάση του αριστερού μηδενόχωρου.