Tutorial 11

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση: $f(1,1)=(2,3)$, $f(0,1)=(-1,1)$

a) Ν.Β το διάνυσμα $f(x,y)$ e) ΝΒ ο A της γραμ. απεικ.

• Τα $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ είναι γραμ. ανεξ. άρα βάση του $\mathbb{R}^2$

$(x,y) = a(1,1) + b(0,1)$ γραμ. συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης του $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = x \\ b = y-x \end{array}$$

$(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$

$$f(x,y) = f[x(1,1) + (y-x)(0,1)] \overset{\text{γραμ.}}{=} f[x(1,1)] + f[(y-x)(0,1)] =$$

$$= x f(1,1) + (y-x) f(0,1) = x(2,3) + (y-x)(-1,1) =$$

$$= (2x - y + x, 3x + (y-x)) = (3x-y, 2x+y)$$

$$f(x,y) = (3x-y, 2x+y)$$

$$f(1,1) = (3-1, 2\cdot 1+1) = (2,3)$$ σωστό.

N3 A.

$$V = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array}$$
$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \end{array}$$
$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab-c^2}\begin{bmatrix} b & -c \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = B \cdot V^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Χ1) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$T(1,0) = 2 \quad , \quad T(1,1) = -3$

α) Να προσδιορίσετε την τιμή $T(a,b)$ $\quad a,b \in \mathbb{R}$

β) να προσδιορίσετε την τιμή $T(2,5)$

Τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι γραμ. ανεξ. $\to$ βάση του $\mathbb{R}^2$

Το τυχόν (a,b) = γραμμ. συνδυασμός των $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$= \lambda(1,0) + \mu(1,1) \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = \lambda + \mu \\ b = \mu \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = a - b \\ \mu = b \end{array} \qquad (a,b) = (a-b)(1,0) + b(1,1)$$

Η $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική Άρα

$$\boxed{T(a,b)} = T\left[(a-b)(1,0) + b(1,1)\right] =$$

$$= (a-b)\,T(1,0) + b\,T(1,1) = (a-b)(2) + b(-3) =$$

$$= 2a - 2b - 3b = \boxed{2a - 5b} \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

b) $T(2,5)$

$$T(2,5) = 2\cdot 2 - 5\cdot 5 = \underline{-21}$$

$A\,(m \times n)$

$R(A)$ (χώρος στηλών) $\dim R(A) = r$ (rank A)(τάξη του A)

$= \#$ β.μ $= \#$ οδηγών $\quad n_A - r$

$N(A)$ (μηδενοχώρος) $\dim N(A) =$ (στήλες − τάξη A)

$= \dim V - \text{rank } A = \#$ ε.μ

A

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\dim V = 4$

$\dim R(A) = 2$

$\dim N(A) = 4 - 2 = 2$

$R(A^T)$ (χώρος γραμμών A) $\dim R(A^T) = r =$ μη-μηδενικές γραμμές

$= \#$ γραμμών με οδηγό

$N(A^T)$ (αριστερός μηδενόχωρος) $\dim N(A^T) = m - r = \#$ μηδενικών γραμμών

Χ2) Να βρείτε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $f(1,0,1) = (1,0,0)$

$f(0,1,1) = (0,1,0)$

$f(0,0,1) = (1,1,1)$

$$V = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

x_1, x_2, x_3 β/Γ.

a) v_1, v_2, v_3 είναι γραμ. ανεξ.

G.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 \leftarrow r_3 + (-1) r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 \leftarrow r_3 + (-1) r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

$\dim V = 3$

$\dim(N(A)) = 0$

b1) $V = \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \end{array}$
$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

b2) $$B = \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \end{array}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V \mid I \xrightarrow{G-J} I \mid V^{-1}$$

$$A = B \cdot V^{-1}$$

G-J

$$V^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{r_3 \leftarrow r_3 + (-1) r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3 \leftarrow r_3 + (-1) r_2}{\sim}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right.$$
$$\underbrace{}_{I} \qquad \underbrace{}_{V^{-1}}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B \cdot V^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης

$$f(x) = Ax$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ο.ε.δ.

Χ3) Έστω μια βάση του $\mathbb{R}^3$

$v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,0)$, $v_3=(1,1,1)$ και

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ μια γραμμική απεικόνιση που ορίζεται

ως εξής $f(v_1)=(3,2)$, $f(v_2)=(-1,2)$, $f(v_3)=(0,1)$

α) Ν.Υ. $f(5,3,1)$

β) Ν.Υ. Α

$$V=\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

όντως γραμ. ανεξ. αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$

$\forall \overset{\text{τυχαίο}}{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^3$ γραμμ. συνδ. των v_1, v_2, v_3

$(u_1, u_2, u_3) = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

$(u_1, u_2, u_3) = k_1(1,0,0) + k_2(1,1,0) + k_3(1,1,1) =$

$= (k_1 + k_2 + k_3, k_2 + k_3, k_3)$

$\begin{cases} u_1 = k_1 + k_2 + k_3 \\ u_2 = k_2 + k_3 \\ u_3 = k_3 \end{cases} \Rightarrow$

$k_1 = u_1 - u_2, \quad k_2 = u_2 - u_3, \quad k_3 = u_3$

$(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2) v_1 + (u_2 - u_3) v_2 + u_3 v_3$

$$f(5,3,1) = f(2v_1 + 2v_2 + v_3) \quad \text{γραμμική}$$

$$= 2f(v_1) + 2f(v_2) + f(v_3) \overset{\text{υποθ}}{=} 2(3,2) + 2(-1,2) + (0,1) =$$

$$= (6,4) + (-2,4) + (0,1) = (6-2+0,\ 4+4+1) =$$

$$= (4,9)$$

$$f(5,3,1) = (4,9)$$

$$\underset{\mathbb{R}^3}{f\begin{bmatrix}5\\3\\1\end{bmatrix}} = \underset{\mathbb{R}^2}{\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix}}$$

$$A = B \cdot V^{-1}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$V^{-1} \overset{G-J}{:} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 + (-1) r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 + (-1) r_3 \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} r_1 \leftarrow r_1 + (-1) r_2 \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\qquad\qquad\qquad\quad I \qquad\qquad\quad V^{-1}$$

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B \cdot V^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} A$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

מ.ש.ל.