$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5+r-2s \\ r \\ s \end{bmatrix}, \forall r,s \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 5

Να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα: $\begin{cases} 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 9x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 = 3 \end{cases}$ με απαλοιφή Gauss.

Επίσης να βρεθούν οι παραγοντοποιήσεις LU και LDU του πίνακα A των συντελεστών του.
Η απαλοιφή Gauss καθώς και ο πίνακας L να δοθούν και με τη χρήση στοιχειωδών πινάκων.

Λύση
Σε μορφή πινάκων το σύστημα γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -7 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -9 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$A \mid b = \left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -9 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right]$$

Βήμα 1
Ξεκινούμε από την πιο αριστερή μη μηδενική στήλη και εντοπίζουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της (οδηγός). Πρόκειται για την πρώτη στήλη με οδηγό το 5 (στην πρώτη θέση της στήλης).
Βήμα 2
Δεν απαιτείται εναλλαγή γραμμών καθώς ο οδηγός βρίσκεται στην πρώτη θέση της στήλης
Βήμα 3
Έπειτα μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό.

Μέσα στις παρενθέσεις φαίνονται οι **πολλαπλασιαστές** της απαλοιφής Gauss, οι οποίοι θα χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία του πίνακα L στις παραγοντοποιήσεις LU και LDU.
Ο συγκεκριμένος πολλαπλασιαστής (-2/5) θα τοποθετηθεί στη θέση 2,1 του πίνακα L.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -9 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \left(\frac{-2}{5}\right) r_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 3 & 0 & -9 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - \left(\frac{3}{5}\right) r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to r_4 - \left(\frac{2}{5}\right) r_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right]$$

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-3 αγνοώντας κάθε φορά και μία γραμμή επιπλέον από την κορυφή του πίνακα.
Έτσι τώρα θα επαναλάβουμε τα 3 βήματα αγνοώντας την πρώτη γραμμή του πίνακα.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right]$$

Βήμα 1
Η πιο αριστερή μη μηδενική στήλη τώρα είναι η δεύτερη στήλη με οδηγό το -7 στην πρώτη θέση της στήλης (δηλ. στη γραμμή 2 του πίνακα, αλλά επειδή σε αυτό το βήμα αγνοούμε την πρώτη γραμμή του πίνακα, θεωρούμε τη δεύτερη γραμμή του πίνακα ως πρώτη θέση).
Βήμα 2
Δεν απαιτείται εναλλαγή γραμμών καθώς ο οδηγός βρίσκεται στην πρώτη θέση της στήλης
Βήμα 3
Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{38}{5} & \frac{13}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to r_4 - \left(-\frac{4}{7}\right) r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{35} & \frac{42}{5} & \frac{139}{35} \end{array}\right]$$

Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-3 αγνοώντας τώρα τις δύο πρώτες γραμμές του πίνακα.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ \hline 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{35} & \frac{42}{5} & \frac{139}{35} \end{array}\right]$$

Βήμα 1

Η πιο αριστερή μη μηδενική στήλη τώρα είναι η τρίτη στήλη με οδηγό το $-\frac{39}{5}$ στην πρώτη θέση της στήλης.

Βήμα 2

Δεν απαιτείται εναλλαγή γραμμών καθώς ο οδηγός βρίσκεται στην πρώτη θέση της στήλης

Βήμα 3

Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{35} & \frac{42}{5} & \frac{139}{35} \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to r_4 - \left(-\frac{4}{91}\right) r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{110}{13} & \frac{347}{91} \end{array}\right]$$

Δεν απαιτείται κανένα άλλο βήμα καθώς ο επαυξημένος πίνακας έχει έρθει σε άνω κλιμακωτή μορφή.

Επομένως το αρχικό σύστημα γράφεται και ως

$$\left.\begin{aligned} 5x_1-2x_3+x_4&=1\\ -7x_2-\frac{4}{5}x_3+\frac{7}{5}x_4&=\frac{12}{5}\\ -\frac{39}{5}x_3+\frac{7}{5}x_4&=-\frac{18}{5}\\ \frac{110}{13}x_4&=\frac{347}{91}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} &x_1=\left(1+2x_3-x_4\right)/5\\ &x_2=\left(12+4x_3-7x_4\right)/(-35)\\ &x_3=\left(-18-7x_4\right)/(-18)\\ &x_4=347/770\end{aligned}$$

Με προς τα πίσω αντικατάσταση παίρνουμε την λύση

$$x_1=\frac{151}{462},\ x_2=-\frac{727}{2310},\ x_3=\frac{179}{330},\ x_4=\frac{347}{770}$$

Παραγοντοποίηση LU

Ο άνω τριγωνικός πίνακας U προκύπτει από την διαδικασία απαλοιφής του Gauss, επομένως είναι ο

$$U=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -7 & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & 0 & -\frac{39}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{110}{13}\end{bmatrix}$$

Η διαγώνιός του αποτελείται από τους οδηγούς κάθε γραμμής του μετασχηματισμένου πίνακα συντελεστών.

Ο κάτω τριγωνικός πίνακας L περιέχει τους πολλαπλασιαστές του κάθε βήματος της απαλοιφής Gauss και μονάδες στη διαγώνιό του:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0\\ \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{91} & 1\end{bmatrix}$$

Παραγοντοποίηση LDU

Ο πίνακας L είναι ο ίδιος με τον αντίστοιχο της παραγοντοποίησης LU:

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0\\ \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0\\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{91} & 1\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας D είναι διαγώνιος και περιέχει την διαγώνιο του πίνακα U της παραγοντοποίησης LU (στοιχεία οδηγών):

$$D=\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&-7&0&0\\0&0&-\frac{39}{5}&0\\0&0&0&\frac{110}{13}\end{bmatrix}$$

Ο νέος άνω τριγωνικός πίνακας U προκύπτει από τον πίνακα U της παραγοντοποίησης LU διαιρώντας κάθε στοιχείο του με το στοιχείο της διαγωνίου (δηλ. τον οδηγό) της ίδιας γραμμής:

$$U=\begin{bmatrix}\frac{5}{5}&\frac{0}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&\frac{-7}{-7}&-\frac{4}{5(-7)}&\frac{7}{5(-7)}\\0&0&-\frac{39}{5}:\left(-\frac{39}{5}\right)&\frac{7}{5}:\left(-\frac{39}{5}\right)\\0&0&0&\frac{110}{13}:\frac{110}{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&1&\frac{4}{35}&-\frac{7}{35}\\0&0&1&-\frac{7}{39}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Τελικά στη διαγώνιό του περιέχει παντού μονάδες.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι LDU=A.

Παράδειγμα 6

Να επιλυθεί το ακόλουθο σύστημα: $\begin{cases}x+y+2z=9\\2x+4y-3z=1\\3x+6y-5z=0\end{cases}$

α) Με απαλοιφή Gauss και b) Με απαλοιφή Gauss-Jordan

Λύση

Σε μορφή πινάκων το σύστημα γράφεται ως:

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&4&-3\\3&6&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\1\\0\end{bmatrix}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο:

$$A\,|\,b=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&2&9\\2&4&-3&1\\3&6&-5&0\end{array}\right]$$

α) Απαλοιφή Gauss

Θα έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - \frac{3}{2}r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

Επομένως το αρχικό σύστημα μετασχηματίστηκε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2y - 7z = -17 \\ -\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση, η οποία βρίσκεται με προς τα πίσω αντικατάσταση. Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε: $z = 3$. Αντικαθιστώντας την τιμή του z στη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε

$2y - 7(3) = -17 \Rightarrow y = 2$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις τιμές των y, z στη πρώτη εξίσωση παίρνουμε:

$x + 2 + 2(3) = 9 \Rightarrow x = 1$

Επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι η:

$x = 1,\ \ y = 2,\ \ z = 3$

b) Απαλοιφή Gauss-Jordan

Θα έχουμε διαδοχικά:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2}r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to -2r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 - \frac{11}{2}r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \frac{7}{2}r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Επομένως το αρχικό σύστημα μετασχηματίστηκε στο ισοδύναμο σύστημα:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

από το οποίο προκύπτει άμεσα η λύση του.