

Αντίστροφοι πίνακες

Ορισμός Αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα A λέγεται ο πίνακας A^{-1} όπου $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Ορισμός Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται ορθογώνιος αν πολλαπλασιαζόμενος με τον ανάστροφό του δίνει τον μοναδιαίο πίνακα $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$

Βασικό κριτήριο: Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$

Εφαρμογή

Για ποιά a ο $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος;

Λύση

Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (ή στηλών) θα φέρουμε τον πίνακα σε άνω τριγωνική μορφή. Η ορίζουσα τότε είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων. Στα παρακάτω, ο συμβολισμός $\Gamma_2 - 2\Gamma_1$ σημαίνει ότι από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα αφαιρούμε το διπλάσιο της πρώτης γραμμής.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 + 2\Gamma_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Συνεπώς } \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix} = 3(a+4)(a-3). \text{ Άρα ο}$$

αρχικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $a \neq -4, 3$.

Ιδιότητες Αντιστρόφων Πινάκων

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(\lambda \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε οι πίνακες $A^n, n=1,2,\dots$, είναι αντιστρέψιμοι και $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο A^t είναι αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, δηλαδή ο αντίστροφος του αναστρέφου ισούται με τον ανάστροφο του αντιστρέφου.

Αν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Τρόποι υπολογισμού αντίστροφου πίνακα

1) Με την βοήθεια του ορισμού. Πρέπει $A \cdot B = I$ όπου ο B έχει τη μορφή $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ αν ο $A = (2 \times 2)$

2) Με τη βοήθεια των τύπων

i) Πίνακες (2×2)

$$\text{Εάν } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ τότε } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ είναι ο *adjoint* ($\text{adj}(A)$) του πίνακα A .

Παράδειγμα

$$\text{Δίνεται ο πίνακας } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -30. \text{ Άρα ο πίνακας } A \text{ έχει αντίστροφο τον } A^{-1} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ 1/5 & -1/30 \end{pmatrix}.$$

ii) Πίνακες (3×3)

ii) Για πίνακες (3×3) και πάνω με τον τύπο:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} [\text{adj}(A_{ij})]$$

Το πλήθος των $\text{adj}(A_{ij})$ είναι ίσο με το γινόμενο των διαστάσεων του αρχικού πίνακα.

Πρόσημο οριζουσών εναλλάξ ξεκινώντας από (+).

Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα στήλης και τα βάζουμε γραμμή.

Αν θέλουμε να επαληθεύσουμε χρησιμοποιούμε τον ορισμό.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Για να βρούμε τον *adjoint* του πίνακα A

ακολουθούμε τα εξής βήματα :

Κατασκευάζουμε έναν καινούργιο πίνακα $(C_{3 \times 3})$ ο οποίος έχει ως στοιχεία του τα αλγεβρικά συμπληρώματα του πίνακα A (εννέα το σύνολο), συνυπολογιζομένου και των προσήμων που αντιστοιχούν για κάθε αλγεβρικό συμπλήρωμα. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & c_{12} &= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & c_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ c_{21} &= - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & c_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & c_{23} &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ c_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & c_{32} &= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & c_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$.

Υπολογίζοντας τώρα τον ανάστροφο του πίνακα C θα πάρουμε τον *Adjoint* του πίνακα A . Δηλαδή,

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Σημείωση : Η παραπάνω διαδικασία για την εύρεση του *adjoint* ενός πίνακα ισχύει για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες όποιο και να είναι το μέγεθός τους.

(**προσαρτημένος πίνακας**) Έστω A $n \times n$ πίνακας. Με A_{ij} συμβολίζουμε τον πίνακα που σχηματίζεται όταν παραλείψουμε από τον A την i γραμμή και j στήλη. Ορίζουμε τον **προσαρτημένο πίνακα** του A ,

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \dots & (-1)^n \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \dots & (-1)^{n-1} \det A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n-1} \det A_{2n} & \dots & \det A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Τότε ισχύει $A(\text{adj}A) = (\text{adj}A)A = (\det A)I$. Στην περίπτωση που $\det A \neq 0$, ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right)\text{adj}A = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \dots & (-1)^n \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & \dots & (-1)^{n-1} \det A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n-1} \det A_{2n} & \dots & \det A_{nn} \end{pmatrix}$$

+ - + ...

Προσοχή: 1) Τα πρόσημα ακολουθούν τη διάταξη

- + - ...

+ - + ...

...

$\det A_{ij}$ (με το κατάλληλο πρόσημο) υπάρχει όχι στη θέση (i, j) , αλλά στη θέση

(j, i) . [Εφαρμογή](#)

Να βρεθεί αν υπάρχει ο αντίστροφος του $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Λύση

Επειδή $\det A = -2 \neq 0$, ο A είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det A_{11} = 4, \det A_{12} = 8, \det A_{13} = 6,$$

$$\det A_{21} = 3, \det A_{22} = 4, \det A_{23} = 3,$$

$$\det A_{31} = 1, \det A_{32} = 2, \det A_{33} = 1.$$

Συνεπώς

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών) Έστω A τετραγωνικός $n \times n$

πίνακας. Σχηματίζουμε τον $n \times 2n$ πίνακα $C = A|I$ τοποθετώντας δίπλα στον A

τον μοναδιαίο πίνακα I . Στον C εφαρμόζουμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς

γραμμών (ήτοι, πρόσθεση σε μια γραμμή αριθμητικού πολλαπλασίου άλλης

γραμμής ή/και πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό ή/και εναλλαγή θέσης

δύο γραμμών) με σκοπό να προκύψει πίνακας της μορφής $I|B$. Αν αυτό είναι

δυνατό, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και το αντίστροφό του είναι το B . Σε

διαφορετική περίπτωση, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. [Εφαρμογή](#)

1) Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή αρχικά σε ένα πολύ απλό παράδειγμα. Έστω

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

έχουμε

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Άρα ο $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (Στο τελευταίο βήμα των πράξεων, το $\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2$ σημαίνει ότι η

δεύτερη γραμμή πολλαπλασιάζεται με το $-\frac{1}{2}$.)

2) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις

μετασχηματισμούς γραμμών έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 - 3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Άρα } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

4) Με διαμέριση πινάκων (Αντίστροφος σύνθετου πίνακα) με τη χρήση των τύπων.

Αν οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι, οι σύνθετοι πίνακες

$$\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ N & B \end{bmatrix} \text{ είναι αντιστρέψιμοι και ισχύουν τα εξής:}$$

$$\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1} \cdot M \cdot B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ N & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1} \cdot N \cdot A^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις

Εστω πίνακας A ώστε $A^n = 0$. Αποδείξτε ότι ο $B = I - A$ είναι αντιστρέψιμος και $B^{-1} = A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I$. Εφαρμόστε τη μέθοδο αυτή για να υπολογίσετε τον

$$\text{αντίστροφο του } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$(I - A)(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I) = A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I - (A^n + A^{n-1} + \dots + A) = I$$

$$(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I)(I - A) = A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + A + I - (A^n + A^{n-1} + \dots + A) = I.$$

Συνεπώς ο $I - A$ είναι αντιστρέψιμος και $(I - A)^{-1} = A^{n-1} + \dots + A + I$.

$$\text{Επειδή } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ έχουμε } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Υπολογίζουμε}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = 0. \text{ Τελικά,}$$

$$B^{-1} = (I - A)^{-1} = A^2 + A + I$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$