ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
DEPARTMENT OF STATISTICS

Ευάγγελος Ιωαννίδης

Σημειώσεις για το μάθημα:

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΑΘΗΝΑ 2015-16

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές **δεν είναι** συγγραφικό πόνημα του «συγγραφέα».

Έκανα απλά μια **περίληψη** --για να βοηθηθούν οι φοιτητές-- των κεφαλαίων του βιβλίου του Strang που μας αφορούν σε αυτό το μάθημα. (Στην αρχή κάθε κεφαλαίου υπάρχουν αναφορές στα αντίστοιχα κεφάλαια του Strang.)

Οι ασκήσεις των Φυλλαδίων είναι και αυτές στο μεγαλύτερό τους μέρος από το βιβλίο του Strang.

Ευχαριστώ τον Τάσο Πλατανιώτη και τη Μαρία Χονδροκούκη για την δακτυλογράφηση των σημειώσεων και των ασκήσεων.

Ε. Ιωαννίδης

Εισαγωγικά στοιχεία

Περιγραφή

Το μάθημα κατ' αρχάς γενικεύει τα διανύσματα του επιπέδου σε διανύσματα n διαστάσεων. Αυτά αποτελούν τον $\mathbb{R}^n$. Μελετάμε υποσύνολα αυτού του χώρου (υπόχωρους) και γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ υποχώρων. Αυτές εκφράζονται με πίνακες, οι οποίοι επίσης αποτελούν αντικείμενο εκτενούς μελέτης στο μάθημα. Τέλος επικεντρωνόμαστε σε κάποια από τα παραπάνω ζητήματα που έχουν σημαντικές εφαρμογές στη στατιστική: προβολές και ελάχιστα τετράγωνα, καθώς και ορθογώνιοι πίνακες και πίνακες με ορθοκανονικές στήλες.

Σκοπός

Σκοπός του μαθήματος είναι να γίνουν σε βάθος κατανοητές οι παραπάνω έννοιες, να αποκτήσουν οι φοιτητές στοιχεία μιας γεωμετρικής εποπτείας εννοιών όπως η προβολή και να είναι σε θέση να τις εφαρμόζουν πρακτικά.

Συνοπτικά Περιεχόμενα

- Ο $\mathbb{R}^n$ και οι εξισώσεις της ευθείας και του επιπέδου, γραμμικά συστήματα, πίνακες και ο αλγόριθμος Gauss (6 βδομάδες).
- Υπόχωροι, θεμελιώσεις υπόχωροι ενός πίνακα, γραμμικοί μετασχηματισμοί (4 βδομάδες).
- Ορθογωνιότητα, προβολές και ελάχιστα τετράγωνα (3 βδομάδες).

Αναλυτικά Περιεχόμενα

Στοιχεία και πράξεις στον $\mathbb{R}^n$, ευθείες και επίπεδα στον $\mathbb{R}^n$. Πίνακες και πολλαπλασιασμός πινάκων, στοιχειώδεις πίνακες. Γραμμικά συστήματα: απαλοιφή Gauss και η παραγοντοποίηση PA=LDU. Αντίστροφοι και ανάστροφοι πίνακες, αλγόριθμος Gauss-Jordan. Συμμετρικοί πίνακες και η παραγοντοποίηση Cholesky. Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι. Γραμμικά συστήματα: λύση m εξισώσεων με n αγνώστους και τάξη πίνακα. Γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις και διάσταση. Οι 4 θεμελιώδεις υπόχωροι ενός πίνακα. Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας. Γραμμικοί μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^n$ και πίνακες. Ορθογώνιοι υπόχωροι, ορθογώνιο συμπλήρωμα υπόχωρου. Προβολές και προσεγγίσεις ελάχιστων τετραγώνων. Ορθογώνιοι πίνακες, η ορθογωνιοποίηση Gramm-Schmidt και η παραγοντοποίηση A=QR.

Εβδομαδιαίο Πρόγραμμα και διάρθρωση μαθήματος

ΕΒΔΟΜΑΔΑ	ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
$1\text{-}2^{η}$	**1. Στοιχεία και πράξεις στον R^n.** στοιχεία: σημεία και διανύσματα, γεωμετρικός και αλγεβρικός ορισμός πράξεις: κανόνες και γεωμετρική ερμηνεία **2. Ευθείες και επίπεδα στον R^n.** αλγεβρικός ορισμός των εξισώσεων της ευθείας και του επιπέδου και γεωμετρική ερμηνεία **3. Μήκος, εσωτερικό γινόμενο και ορθογωνιότητα . (Πηγές: Strang 3.2)** Πυθαγόρειο, ορισμός και πράξεις εσωτερικού γινομένου, ορθογωνιότητα, γωνία διανυσμάτων

	Προβολή σε ευθεία, Γεωμετρική και αλγεβρική λύση της εξίσωσης $\langle a, x \rangle = b$, ανισότητα Cauchy-Schwartz, τριγωνική ανισότητα
3-4η	**4. Γεωμετρική ερμηνεία συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. (Πηγές: Strang 1.2)** Παράδειγμα R3 : λύση συστήματος εξισώσεων ως τομή επιπέδων και λύση ως γραμμικός συνδυασμός στηλών, ιδιαίτερα: συζήτηση της ιδιόμορφης περίπτωσης **5. Συμβολισμός και πολλαπλασιασμός πινάκων. (Πηγές: Strang 1.4)** Ορισμός πίνακα, διανύσματα στηλών, γραμμών, γραφή γραμμικού συστήματος, Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα, με πίνακα, πολ./μος διαμερισμένων πινάκων, Κανόνες, στοιχειώδεις πίνακες, γραφή βήματος Gauss με πίνακες.

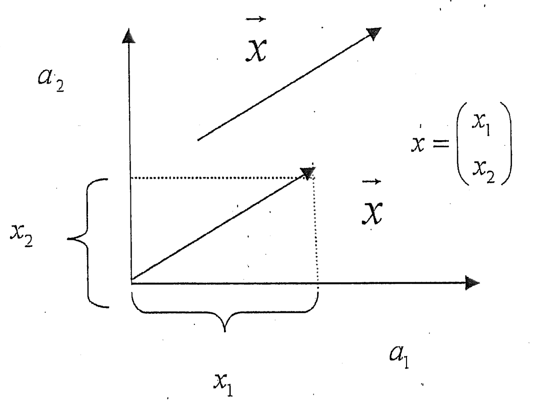
5-7η	**6. Γραμμικά συστήματα: απαλοιφής Gauss και η παραγοντοποίηση PA=LDU (Πηγές: Strang 1.3, 1.5)** Παράδειγμα απαλοιφής Gauss, οδηγοί, θεραπεύσιμη & μη θεραπεύσιμη περίπτωση, Τριγωνικοί παράγοντες και εναλλαγές γραμμών, η παραγοντοποίηση A=LU (κάτω τριγωνικός * άνω τριγωνικός), γραμμικό σύστημα=2 τριγωνικά, μη ιδιόμορφη περίπτωση PA=LDU (P μεταθέσεις γραμμών) **7. Αντίστροφοι και ανάστροφοι. (Πηγές: Str 1.6)** Αντίστροφοι: ορισμός, κανόνες, υπολογισμός με στοιχειώδεις μετατροπές (Gauss-Jordan), αντιστρέψιμος = μη ιδιόμορφος, Ανάστροφοι, κανόνες, συμμετρικός πίνακας και η παραγοντοποίηση $A=LDL^T$ **8. (συνέχεια) Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι. (Πηγές: Strang 2.1)** διανυσματικοί χώροι-υπόχωροι: ορισμοί παραδείγματα, Χώρος στηλών του Α και λύσεις γραμμικού συστήματος, Μηδενόχωρος του Α **9. Λύση m εξισώσεων με n αγνώστους. (Πηγές: Strang 2.2)** γενική κλιμακωτή μορφή, PA=LU, στήλες με οδηγούς και χωρίς, ελεύθερες και βασικές μεταβλητές, τάξη πίνακα, λύση ειδική και ομογενούς, διάκριση περιπτώσεων: προϋποθέσεις για ύπαρξη και μονοσήμαντο της λύσης

8-10η	**10. Γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις και διάσταση. (Πηγές: Strang 2.3)** ορισμός, ανεξαρτησία για στήλες και γραμμές κλιμακωτού πίνακα, έλεγχος ανεξαρτησίας με λύση γραμμικού συστήματος, παραγωγή υπόχωρου, παραγωγή και χώρος στηλών πίνακα, βάση, παραγωγή και στήλες πίνακα με οδηγούς, διάσταση, συμπλήρωση βάσης **11. Οι 4 θεμελιώδεις υπόχωροι. (Πηγές: Strang 2.4)** μηδενόχωρος και χώρος στηλών του A και του A^T: κατασκευή βάσεων από στοιχεία (στήλες, οδηγούς) της διάσπασης A=LU. Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας I (Διαστάσεις των 4 υποχώρων) **12. Γραμμικοί μετασχηματισμοί. (Πηγές: Strang 2.6)** ορισμός, ο πίνακας που αντιστοιχεί σε γραμ. μετασχημ. από R^m στον R^n. γινόμενο / αντιστροφή πινάκων = σύνθεση / αντιστροφή απεικονίσεων Παραδείγματα: στροφή, προβολή, αντανάκλαση. **13. Ορθογωνιότητα. (Πηγές: Strang 3.1)** Ορθογώνιοι υπόχωροι, ορθογώνιο συμπλήρωμα, διάσπαση διανύσματος σε άθροισμα από ορθογώνια. Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας II (Ορθογωνιότητα των 4 υποχώρων)
11-13η	**14. Προβολές και προσεγγίσεις ελάχιστων τετραγώνων. (Πηγές: Strang 3.3)** προβολή σε μία και πολλές μεταβλητές, ελάχιστα τετράγωνα, ο πίνακας A^TA, πίνακας προβολών **15. Ορθογώνιοι πίνακες και Gramm-Schmidt. (Πηγές: Strang 3.4)** ορισμός, αντίστροφος, ισομετρία, πίνακες με ορθοκανονικές στήλες, σχέση με προβολές. ορθογωνιοποίηση Gramm-Schmidt, παραγοντοποίηση A=QR.

Σημειώσεις μαθήματος

1. Στοιχεία και πράξεις στον R^n

Ας θεωρήσουμε το επίπεδο και ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες a_1, a_2 καθώς και τα διανύσματα $\vec{x}$ στο επίπεδο.



Ας θυμηθούμε ότι διανύσματα που προκύπτουν το ένα από το άλλο με παράλληλη μετατόπιση, έχουν δηλαδή ίδια φορά και μήκος, δε διακρίνονται αλλά <u>θεωρούνται ένα και το αυτό διάνυσμα</u>. Μπορούμε, λοιπόν, πάντα να διαλέγουμε ένα διάνυσμα ως «κανονικό εκπρόσωπο» όλων όσων ταυτίζονται με αυτό, και αυτό θα είναι το διάνυσμα που έχει ως <u>σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων</u>. Για να προσδιορίσουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ αρκεί λοιπόν να γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο καταλήγει το διάνυσμα, σημείο το οποίο ονομάζουμε $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

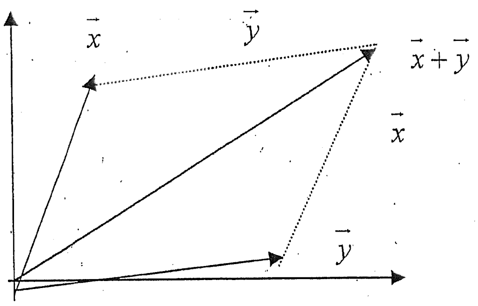
Σε κάθε διάνυσμα λοιπόν αντιστοιχεί ένα σημείο και σε κάθε σημείο του επιπέδου ένα διάνυσμα (το διάνυσμα που πάει από την αρχή των αξόνων στο σημείο αυτό).

Όσον αφορά τις μεταξύ τους πράξεις:

Στα μεν διανύσματα έχω δύο πράξεις:

<u>πολλαπλασιασμό</u> διανύσματος με πραγματικό αριθμό, όπου το $\lambda\vec{x}$ ορίζεται ως το διάνυσμα με (λ)-πλάσιο μήκος και ίδια φορά με το $\vec{x}$ αν $\lambda > 0$ και αντίθετη αν $\lambda < 0$.

<u>πρόσθεση</u> μεταξύ διανυσμάτων όπου το $\vec{x}+\vec{y}$ προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου:



Αντιστοίχως μπορώ να ορίσω πράξεις για τα σημεία $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ του επιπέδου και να ορίσω ότι τα σημεία του επιπέδου εξοπλισμένα με αυτές τις πράξεις αποτελούν τον R^2:

<u>Ορισμός:</u> R^2 είναι το σύνολο των δυάδων $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ πραγματικών αριθμών $x_1, x_2 \in R$, [με σύμβολα $R^2 := \left\{ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in R, x_2 \in R \right\}$]

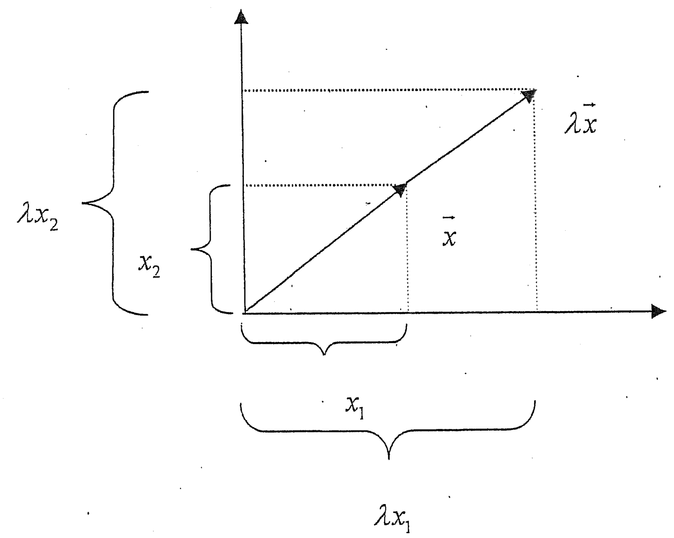
εφοδιασμένων με τις παρακάτω πράξεις:

- ***πρόσθεση:*** Αν $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ και $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2$ ορίζω το άθροισμα $x+y$ ως $\boxed{x+y := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}} \in R^2$.

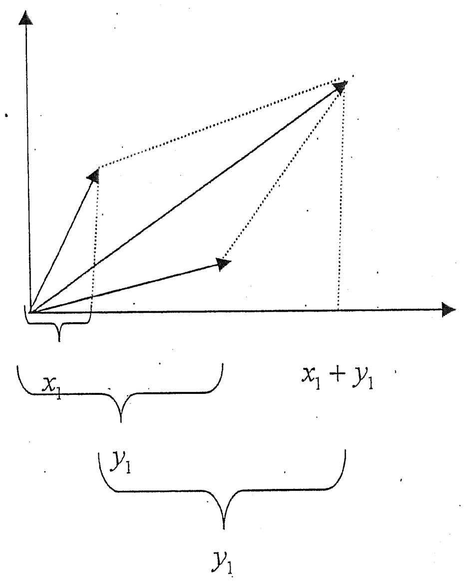
- ***πολλαπλασιασμό με πραγματικό:*** Αν $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2$ και $\lambda \in R$ τότε ορίζω το γινόμενο λx ως $\boxed{\lambda x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}} \in R^2$, δηλ. πολλαπλασιάζω και προσθέτω <u>κατά συντεταγμένη</u>.

Οι πράξεις στον R^2 έχουν οριστεί έτσι ώστε <u>η αντιστοιχία</u> που είδαμε μεταξύ διανυσμάτων και στοιχείων του R^2 (σημείων του επιπέδου) <u>να διατηρείται και στα αποτελέσματα των εκάστοτε μεταξύ τους πράξεων</u>.

Έτσι μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα ότι: αν $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{x}$, τότε το $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$ είναι το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\lambda \vec{x}$:



Το ίδιο ισχύει για το άθροισμα: Το σημείο που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ (που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου) είναι ακριβώς το $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$.



Αφού λοιπόν υπάρχει μια πλήρης αντιστοιχία ανάμεσα στα διανύσματα και στα σημεία του επιπέδου (στοιχεία του R^2) καθώς και στο τι μπορώ να κάνω με αυτά (πράξεις), μπορώ να τα ταυτίσω, δηλ. να τα βλέπω σαν δύο όψεις του ίδιου πράγματος, να μη διακρίνω πια μεταξύ διανυσμάτων και R^2.

Οι δύο όψεις είναι η γεωμετρική (διανύσματα) και η αλγεβρική (στοιχεία του R^2), δηλ. αυτή στην οποία κάνω πράξεις με σύμβολα και αριθμούς.

Η γεωμετρική όψη των πραγμάτων με βοηθάει να φανταστώ καλύτερα ορισμένες ιδιότητες ή καταστάσεις και έτσι να τις κατανοώ καλύτερα.

Η αλγεβρική θεώρηση όμως έχει το πλεονέκτημα ότι μπορώ πιο εύκολα να γενικεύσω και να επεκτείνω αυτά που κάνουμε με διανύσματα σε χώρους περισσότερων διαστάσεων, τον R^n, στους οποίους δεν έχω γεωμετρική εποπτεία (δεν μπορώ να φανταστώ πάνω από 3 διαστάσεις).

Ωστόσο η γεωμετρική εποπτεία του R^2 και του χώρου (R^3) μας βοηθάει (με αναλογίες) να καταλάβουμε ιδιότητες των χώρων περισσότερων διαστάσεων, να αποκτήσουμε μια στοιχειώδη γεωμετρική κατανόηση των όσων αποδεικνύουμε αλγεβρικά σε αυτούς τους χώρους.

Ο R^n

Η αλγεβρική θεώρηση μας επιτρέπει άμεσα να ορίσουμε τέτοιους χώρους κατ' αναλογία του ορισμού του R^2:

Ορισμός: Για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό $n \in N$ ορίζουμε τον R^n ως το σύνολο των (διατεταγμένων) n-αδων πραγματικών αριθμών

συντεταγμένες του x

$$R^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \cdots, x_n \in R \right\}$$

(σύμβαση: γράφουμε αυτές τις n-αδες ως στήλες)

- <u>πρόσθεση:</u> Για $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ και $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n$ ορίζω το άθροισμα $x + y$ ως εκείνο

το στοιχείο του R^n που έχει ως συντεταγμένες το άθροισμα των συντεταγμένων των x και y:

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

- <u>πολλαπλασιασμός με πραγματικό:</u> Αν $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ και $\lambda \in R$

$$\text{τότε } \lambda \cdot x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Προσθέτουμε και πολλαπλασιάζουμε κατά συντεταγμένες.

Ποιος είναι ο R^3?

Κανόνες πράξεων στον R^n

Έστω $x, y, z \in R^n$ και $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n$.

Επίσης για $x \in R^n$ ορίζουμε $-x := \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$.

Έχουμε:

• $x+y=y+x$
• $(x+y)+z=x+(y+z)$
• $x+0=x$ (υπάρχει μηδέν της πρόσθεσης)
• $x+(-x)=0$
• $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\cdot\mu)\cdot x$
• $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
• $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

Οι αποδείξεις είναι εύκολες: περνάμε σε συντεταγμένες και εκεί χρησιμοποιούμε αντίστοιχες ιδιότητες πραγματικών αριθμών.

π.χ. τελευταία:

$$(\lambda+\mu)x=\begin{pmatrix}(\lambda+\mu)x_1\\ \vdots\\ (\lambda+\mu)x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1+\mu x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n+\mu x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mu x_1\\ \vdots\\ \mu x_n\end{pmatrix}=\lambda x+\mu x$$

2. Ευθείες και επίπεδα στον R^n

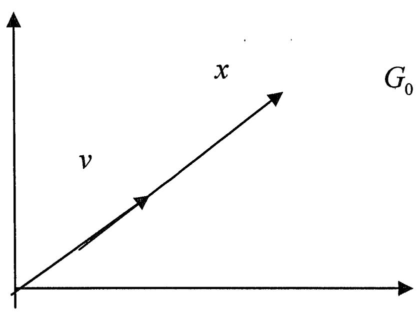
Ευθεία στον R^2

Η ευθεία είναι ένα σύνολο σημείων x. Θέλουμε να περιγράψουμε αυτό το σύνολο με τη μορφή μιας εξίσωσης σημείων/διανθσμάτων. Να πούμε δηλαδή ότι η ευθεία είναι όλα εκείνα τα σημεία του επιπέδου που οκανοποιούν την τάδε εξίσωση (σημείων/διανυσμάτων)

***Ευθεία που διέρχεται από μηδέν*.**

Για να ορίσω μια ευθεία G_0 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων χρειάζεται άλλο ένα προκαθορισμένο σημείο $v \in R^2$, $v \neq \mathbf{0}$ από το οποίο να διέρχεται η ευθεία. Όλα τα υπόλοιπα σημεία x της ευθείας θα είναι ακριβώς **εκείνα τα x που γράφονται ως πολλαπλάσια του v.**

$$\boxed{x \in G_0 \Leftrightarrow \exists \lambda : x = \lambda v}$$



Άρα για να είναι ευθεία που διέρχεται από το 0 η G_0 πρέπει να

το σύνολο των σημείων x για τα οποία

τέτοιο ώστε

υπάρχει $v \in R^2 : G_0 = \{x \in R^2 | \exists \lambda : x = \lambda v\}$

υπάρχει

Σε αυτή την εξίσωση το ρόλο του v μπορεί να τον παίξει και οποιοδήποτε άλλο (αυθαίρετα επιλεγμένο) σημείο της ευθείας.

Το σύνολο των πολλαπλασίων ενός στοιχείου / διανύσματος / σημείου $v \in R^2$ το γράφουμε και ως $\mathrm{Span}(v)$. Δηλαδή

$$G_0 = \left\{ x \in R^2 \middle| \exists \lambda : x = \lambda v \right\} = Span(v)$$

Δέστε ότι για κάθε συγκεκριμένη τιμή του λ παίρνω και ένα άλλο συγκεκριμένο σημείο x της G_0. Όταν αφήσω το λ να «τρέχει» στους πραγματικούς αριθμούς τότε το x τρέχει πάνω στη G_0.

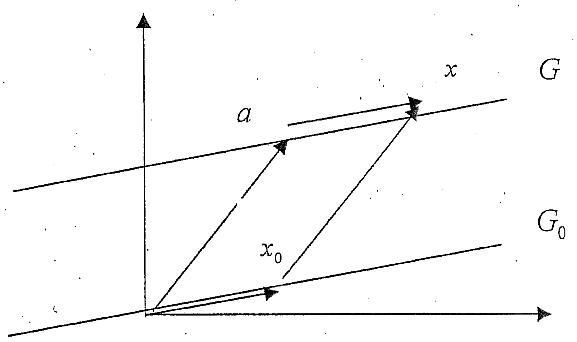
Ευθεία που δε διέρχεται από μηδέν.

Ας προσδιορίσω ορίσω μια ευθεία G που δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων ως εκείνη που διέρχεται από κάποιο προκαθορισμένο σημείο $a \in R^2$ και είναι παράλληλη κάποιας G_0 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Τότε όλα τα υπόλοιπα σημεία x της ευθείας G θα είναι ακριβώς **εκείνα τα x που γράφονται ως άθροισμα κάποιο σημείου** $x_0 \in G_0$. Άρα

$$G = \left\{ x \in R^2 \middle| \exists x_0 \in G_0 : x = a + x_0 \right\}$$

Καθώς τα σημεία της G_0 είναι τα πολλαπλάσια κάποιου $v \in R^2$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε αυτή την ιδιότητα στη παραπάνω εξίσωση:

$$G = \left\{ x \in R^2 \middle| \exists \lambda \in R : x = a + \lambda v \right\}$$



Τα παραπάνω μπορούν να γραφτούν και ως εξίσωση συνόλων

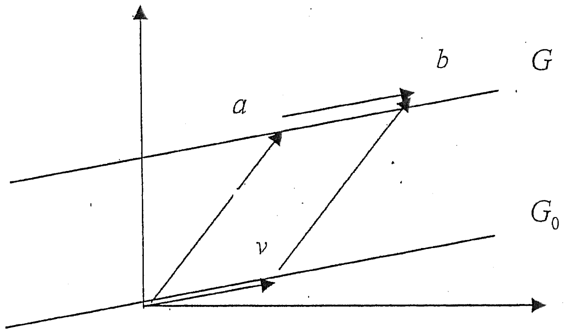
$$G = a + G_0 = a + Span(v)$$

Δηλαδή: κάθε σημείο της G προκύπτει ως άθροισμα κάποιου σημείου της G_0 με το α. Αυτό σημαίνει ότι η G **προκύπτει από μετατόπιση της** G_0 .

Το ρόλο του α σε αυτές τις εξισώσεις μπορεί να τον παίξει οποιοδήποτε άλλο στοιχείο $a' \in G$. Δηλαδή έχουμε

$$G = a' + G_0 \text{ για οποιοδήποτε } a' \in G.$$

Εάν προτιμάμε τώρα να προδιορίσουμε εναλλακτικά την ευθεία G ως εκείνη που διέρχεται από δύο σημεία $a, b \in R^2$, τότε αυτή θα πρέπει να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από το 0 και το $v = b - a$



Άρα:

$$G = \left\{ x \in R^2 \middle| \exists \lambda : x = a + \lambda(b - a) \right\}$$

Αν προτιμώ μπορώ να πάρω σε αυτό τον ορισμό οποιαδήποτε δύο (μη ταυτόσημα) σημεία της G a', b' στη θέση των a, b

Ευθεία στον R^n

Το υποσύνολο $G \subset R^n$ ονομάζεται ευθεία αν υπάρχουν $a, b \in R^n$ τέτοια ώστε όλα τα σημεία x της G να γράφονται ως $x = a + \lambda(b - a)$, για κάποιο λ.

$$G = \left\{ x \in R^n \middle| \exists \lambda \in R : x = a + \lambda(b - a) \right\}$$

γράφω και

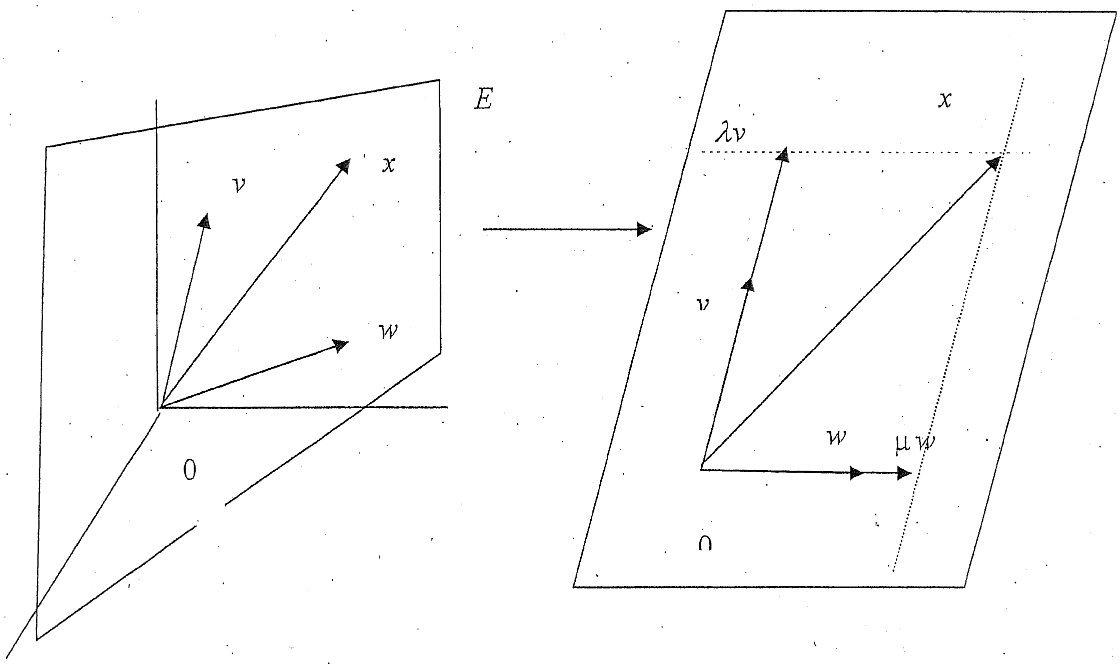
$$G = \left\{ a + \lambda(b - a), \lambda \in R \right\}$$

Επίπεδο στον R^3

Ας θεωρήσουμε διανύσματα στο χώρο, που ακριβώς όπως τα διανύσματα του επιπέδου μπορούν να ταυτιστούν με τα σημεία του επιπέδου, του R^2, έτσι και τα διανύσματα στο χώρο ταυτίζονται με τα σημεία του χώρου, που περιγράφονται από τον R^3..

Επίπεδο που διέρχεται από 0

Ας προσπαθήσουμε πάλι να περιγράψουμε με μια εξίσωση τα σημεία του επιπέδου που διέρχονται από το 0 και κάποια σημεία v και w του χώρου.



Ένα σημείο x αυτού του επιπέδου διακρίνεται από την ιδιότητα ότι μπορώ να το γράψω σαν

$$x = \text{πολ/σιο του } v + \text{πολ/σιο του } w$$

ή υπάρχουν κατάλληλα λ και μ τέτοια ώστε

$$x = \lambda v + \mu w$$

<u>Λέμε:</u> το x γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των v & w με συντελεστές τα λ, μ.

Για να βεβαιωθώ για την παραπάνω ιδιότητα μπορώ να φέρω παράλληλο του w μέσα από το x · αυτή θα τμήσει κάπου την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το v. Εκεί θα βρίσκεται το ζητούμενο πολλαπλάσιο του v. Παρομοίως μπορώ να βρω και το πολλαπλάσιο του w.

Το επίπεδο E_0 δίνεται από το σύνολο των σημείων που έχουν αυτή την ιδιότητα:

$$E_0 = \left\{ x \in R^3 \middle| \exists \lambda, \mu \in R : x = \lambda v + \mu w \right\}$$

<u>Δηλαδή</u> το E_0 είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των v και w.

Αυτό το σύνολο γράφεται και ως $Span(v, w)$.

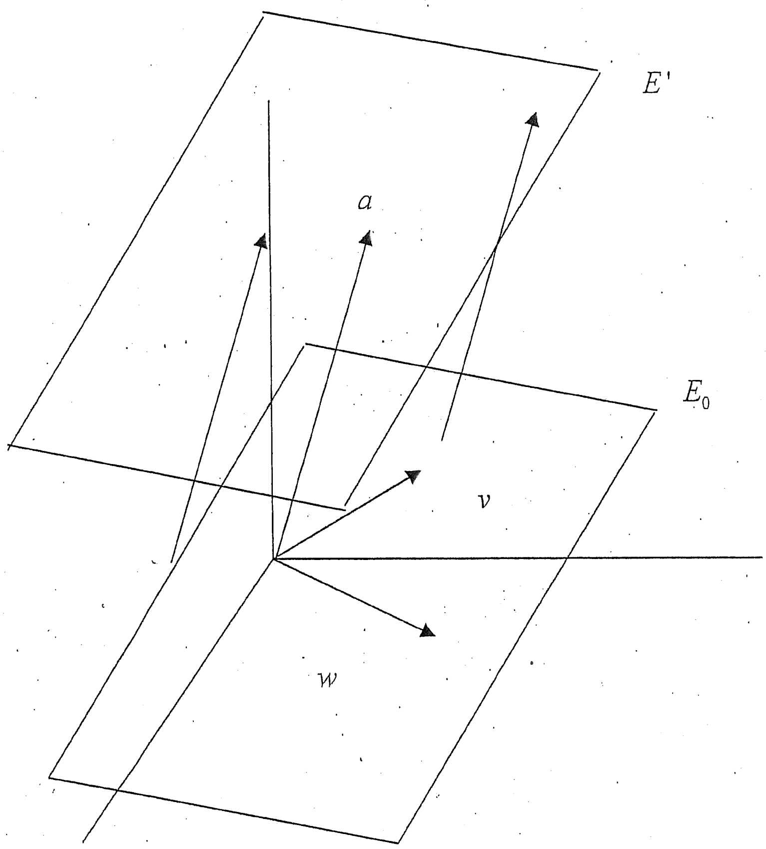
Δηλαδή $E_0 = Span(v, w)$

Αντίστοιχα με την ευθεία μπορούμε τώρα να πούμε ότι αφήνοντας <u>δύο</u> πραγματικούς αριθμούς λ, μ <u>να «τρέχουν» πάνω στον R</u> (και χρησιμοποιώντας αυτούς τους δύο ως συντελεστές σε γραμμικούς συνδυασμούς των v, w) τα σημεία που παίρνουμε $x = \lambda v + \mu w$ <u>«τρέχουν» πάνω σε ένα επίπεδο</u> (ή απλώνουν ένα επίπεδο, εξού και "Span").

Και πάλι η γραφή του επιπέδου E_0 ως $Span(v, w)$ δεν είναι μοναδική: θα μπορούσα στη θέση των v & w να χρησιμοποιήσω δύο οποιαδήποτε άλλα μη συγγραμικά στοιχεία του E_0.

Επίπεδο που δε διέρχεται από το 0

Έστω E' το επίπεδο που διέρχεται από κάποιο a και είναι παράλληλο του $E = Span(v, w)$.



Τα σημεία του επιπέδου αυτού προκύπτουν αν προσθέσω a στα σημεία του E_0.

Αν δηλαδή «μετατοπίσω» το E_0 κατά a.

$$\boxed{\begin{aligned} E' &= \left\{x' \in R^3 \middle| x' = x + a, x \in E_0\right\} \\ &= a + E_0 \\ &= \left\{x' \in R^3 \middle| \exists \lambda, \mu \in R : x' = a + \lambda v + \mu w\right\} \end{aligned}}$$

Σημείωση: Αν θέλω το επίπεδο που περνά από τα σημεία $a,b,c \in R^3$, αυτό θα είναι παράλληλο με το επίπεδο $Span(b-a,c-a)$. Περιγράφεται λοιπόν εναλλακτικά ως ως:

$$E' = \left\{ x' \in R^3 \middle| \exists \lambda, \mu \in R : x' = a + \lambda(b-a) + \mu(c-a) \right\}$$

Σημείωση: Και πάλι η γραφή αυτή δεν είναι μοναδική και οποιαδήποτε 3 άλλα σημεία του επιπέδου θα έδιναν το ίδιο επίπεδο.

Επίπεδο στον R^n

Άμεση είναι η γενίκευση στον ορισμό του επιπέδου στον R^n:

Ορισμός: Ένα υποσύνολο $E \subset R^n$ ονομάζεται επίπεδο αν υπάρχουν $a, v, w \in R^n$ τέτοια πού να ισχύει

$$E = \left\{ x \in R^n \middle| \exists \lambda, \mu : x = a + \lambda v + \mu w \right\}$$

δηλ. το E ταυτίζεται με τη μετατόπιση κατά a του $Span(v,w)$: $E = a + Span(v,w)$.

3. Μήκος, εσωτερικό γινόμενο και ορθογωνιότητα στον R^n

Εσωτερικό γινόμενο

Έστω $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ και $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in R^n$.

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των x και y ως:

$$< x, y >:= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \in R \ !$$

Κανόνες πράξεων

- $< x, y >=< y, x >$
- $< x + x', y >=< x, y > + < x', y >$
- $< \lambda x, y >= \lambda < x, y >$ για $\lambda \in R$

Μήκος

Στον R^2 έχω ότι το μήκος ενός διανύσματος $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ δίνεται από $\| x \| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$.

Αυτό όμως ισούται με $\sqrt{< x, x >}$. Αυτό χρησιμοποιώ ως ορισμό του μήκους και στον R^n.

Αν $x \in R^n$ τότε το μήκος του x δίνεται από $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$.

Ιδιότητες

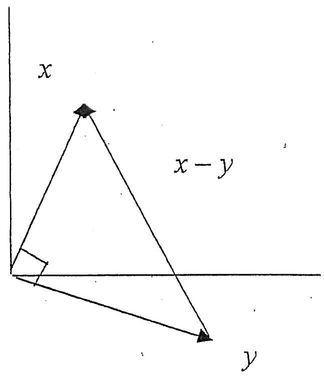
- $\| x \| \geq 0$
- $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \| \quad \forall \lambda \in R$

Ορθογωνιότητα

Στον R^2 έχουμε $\| x - y \|^2 = < x - y, x - y >$

$= < x, x > - < x, y > - < y, x > + < y, y >$

$= \| x \|^2 + \| y \|^2 - 2 < x, y >$



Από το πυθαγόρειο γνωρίζουμε ότι αν $\varphi = 90^o$ τότε $\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$ και επομένως πρέπει $\underline{< x, y > = 0}$. Αυτό χρησιμοποιούμε και ως ορισμό της ορθογωνιότητας στον R^n.

<u>Ορισμός:</u> Για $x, y \in R^n$ λέμε ότι x & y ορθογώνια και γράφουμε $x \perp y$ όταν $< x, y > = 0$.

Εφαρμογή: προβολή σε ευθεία

Έστω η ευθεία $L_a = Span(a)$ και ένα σημείο $x \notin L_a$. Θέλω να υπολογίσω την προβολή του x στην L_a, την $P_a x$.

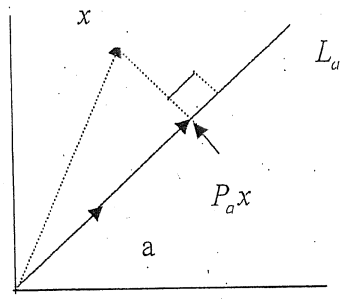
Κατ' αρχάς: αφού $P_a x \in L_a \Rightarrow \exists \lambda_0 : P_a x = \lambda_0 a$

<u>Επίσης:</u> $< a, x - P_a x >= 0$

$$\Leftrightarrow < a, x - \lambda_0 a >= 0$$

$$\Leftrightarrow < a, x > - \lambda_0 < a, a >= 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_0 = \frac{< a, x >}{< a, a >}$$



Άρα $\boxed{P_a x = \lambda_0 a = \frac{< a, x >}{< a, a >} \cdot a}$

Εφαρμογή: οι λύσεις μιας εξίσωσης σε πολλούς αγνώστους

Ενδιαφερόμαστε (ψάχνουμε τις λύσεις) για εξισώσεις της μορφής

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

όπου $a_1, \dots, a_n, b$ γνωστές σταθερές και $x_1, \dots, x_n$ άγνωστοι.

π.χ. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 1x_4 = 6.$

Αυτές οι εξισώσεις γράφονται πάντα στη μορφή

$$< a, x > = b$$

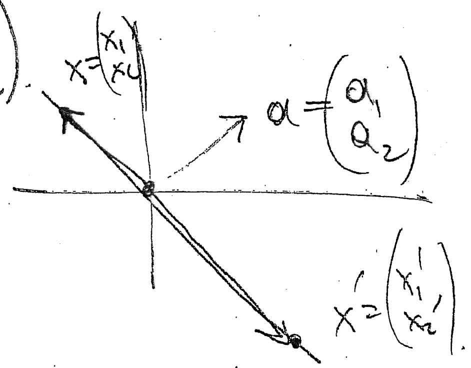
με $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ και $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ας πάρουμε τη περίπτωση $n=2$, δηλαδή εξίσωση σε δύο αγνώστους x_1, x_2, με $\boxed{b=0}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

ή ισοδύναμα $\langle a, x \rangle = 0 \rightarrow$ δηλαδή $a \perp x$

<u>Γεωμετρική λύση</u>: Όλα τα σημεία $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ που ανήκουν στην ευθεία που περνά από το 0 και είναι $\perp$ στο γνωστό διάνυσμα $a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.



<u>Αλγεβρική λύση</u>

Όλα τα σημεία $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ που ικανοποιούν την $x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2$, και είναι δηλαδή της μορφής

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

για οποιοδήποτε $x_2 \in \mathbb{R}$.

Αυτά είναι ακριβώς η ευθεία

$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ που περνά από το 0

* Αν $\boxed{b \neq 0}$.

<u>Αλγεβρική λύση</u>. Όλα τα $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ που ικανοποιούν την

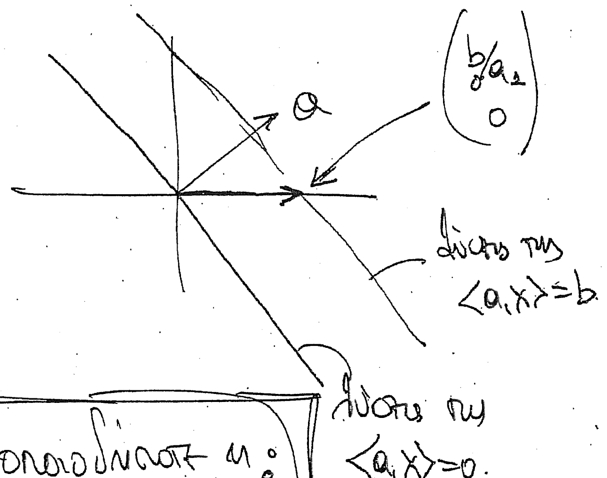
$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2,$$

και είναι δηλαδή της μορφής

$$x = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αυτά ανήκουν ακριβώς στην ευθεία $\begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

που είναι ακριβώς οι λύσεις της $\langle a, x\rangle = b$ μετατοπισμένες κατά $\begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Αυτό ισχύει και γενικότερα για οποιοδήποτε n:

$\{$λύσεις της $\langle a,x\rangle=b\}$ = $\{$λύσεις της $\langle a,x\rangle=0\}$ + κάποια (οποιαδήποτε) λύση της $\langle a,x\rangle=b$.

Δηλ. αν ξέρω μία λύση της $\langle a,x\rangle=b$ και όλες τις λύσεις της $\langle a,x\rangle=0$, τότε ξέρω όλες τις λύσεις της $\langle a,x\rangle=b$

οποιαδήποτε!

Απόδειξη: Έστω x_0 μία λύση της $\langle a,x\rangle=b$.

x οποιαδήποτε " " "

" " " $\langle a,x\rangle=0$.

& z "

αν $x \in \{$λύσεις της $\langle a,x\rangle=b\}$ τότε θέτω $z = x - x_0$ και

έχω $\langle a,z\rangle = \langle a, x-x_0\rangle = \langle a,x\rangle - \langle a,x_0\rangle = 0$

δηλ. $z \in \{$λύσεις της $\langle a,x\rangle=0\}$

Άρα: $x = x_0 + z$, με $z \in \{$λύσεις της $\langle a,x\rangle=0\}$

Αντίστροφα αν για κάποιο z έχω $\langle a,z\rangle=0$ τότε

θέτω $x = x_0 + z$ και βλέπω ότι $\langle a,x\rangle=b$:

$\langle a,x\rangle = \langle a, x_0+z\rangle = \langle a,x_0\rangle + \langle a,z\rangle = b+0 = b$

Για $n=3$ & $\boxed{b=0}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

$\Rightarrow$ Λύσεις τα $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ με $x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3$.

Άρα τα x της μορφής $\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

για οποιαδήποτε $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

Δηλαδή το $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Πρόκειται για το επίπεδο $\in \mathbb{R}^3$ που είναι κάθετο στο $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Αν } b \neq 0}$

Λύσεις τα x με $x_1 = \frac{b}{a_1} - \frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3$.

δηλαδή

$$x = \begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -a_2/a_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_3/a_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} b/a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \{\text{Λύσεις της } \langle a, x\rangle = 0\}.$$

Εφαρμογή: Η ανισότητα Cauchy-Schwartz

Έστω $x, a \in R^n$ και η προβολή του x στην $L_a : P_a x$.

Έχουμε: $x = (x - P_a x) + P_a x$ και άρα

$$\| x \|^2 = < x, x > = < (x - P_a x) + P_a x, (x - P_a x) + P_a x >$$

$$= \| x - P_a x \|^2 + \| P_a(x) \|^2 + 2 \underbrace{< x - P_a x, P_a x >}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad \| P_a(x) \| \leq \| x \|$$

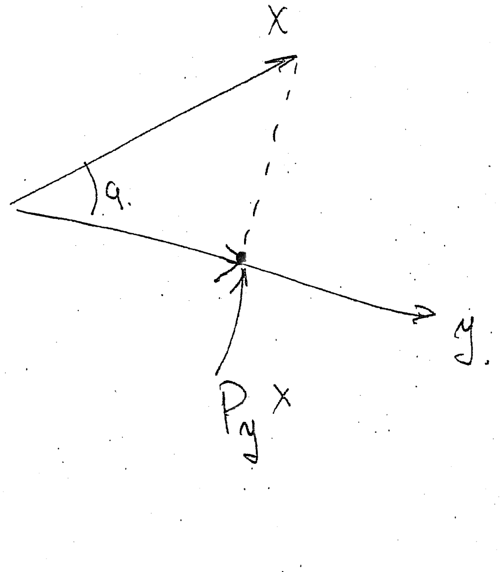
$$\Rightarrow \quad \left\| \frac{< a, x >}{< a, a >} \cdot a \right\| \leq \| x \| \quad \Rightarrow \quad |< a, x >| \cdot \frac{\| a \|}{\| a \|^2} \leq \| x \|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|< a, x >| \leq \| x \| \cdot \| a \|}$$

με ισότητα αν $x = P_a(x) \Leftrightarrow x, a$ συγγραμικά.

Γωνία δύο διανυσμάτων στον R^n

Έστω δύο διανύσματα $x, y \in R^4$. και παίρνουμε την $P_y x$



Τότε !

$$|\sigma\upsilon\nu(\varphi)| = \frac{\|P_y x\|}{\|x\|} = \frac{\left\| \frac{\langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \|y\| \right\|}{\|x\|} = \frac{|\langle y, x\rangle|}{\|y\| \cdot \|x\|}$$

$\Rightarrow$ Ορίζω ως φ εκείνη τη γωνία μεταξύ x, y που έχει ως συνημίτονο τη τιμή $\frac{\langle y, x\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$,
$\varphi \in (-\pi, \pi)$

Σημ. Η ανισότητα Cauchy-Schwartz εγγυάται ότι αυτή η τιμή (του συν) είναι απολύτως μικρότερη του 1.

Τριγωνική ανισότητα:

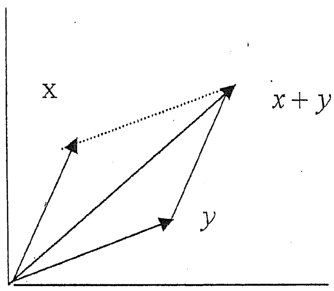
Για $x, y \in R^n$ έχουμε:

$\| x+y \|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle$

$= \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\langle x, y \rangle$

$\leq \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\| x \| \cdot \| y \|$

Cauchy-Schwartz



$= [\| x \| + \| y \|]^2$

$\Rightarrow \boxed{\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|}$

4. Γενική γεωμετρική ερμηνεία συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

4. ~~Γραμμικές εξισώσεις: εισαγωγή~~ και ~~γεωμετρική ερμηνεία~~

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 1.2)

<u>Υπενθύμιση</u>: Εξισώσεις της μορφής $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$ γράφονται και ως $\langle a,x\rangle=b$ με $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ και $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

Τέτοιες εξισώσεις ικανοποιούνται από "πολλά" $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

Το σύνολο των x που λύνουν την εξίσωση σχηματίζουν ένα επίπεδο (κάθε σημείο x του επιπέδου είναι μία λύση).

Το επίπεδο αυτό είναι κάθετο στο a. Η απόσταση του σε σχέση με το 0 αυξάνει με το b.

Στο κεφάλαιο αυτό ενδιαφερόμαστε για συστήματα τέτοιων γραμμικών εξισώσεων: Έχω π.χ 3 τέτοιες εξισώσεις και ψάχνω για $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ που να λύνουν και τις τρεις:

π.χ. (στον $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 5\\ 4x_1 - 6x_2 &= -2\\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 9.\end{aligned}$$

γενικότερα αυτές γράφονται ως

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}\right\} *$$

όπου συμβολίσαμε τους συντελεστές a_{ij} με δυο δείκτες που ο πρώτος μας δίνει τη γραμμή και ο δεύτερος τη στήλη.

Έτσι π.χ. στο παράδειγμά μας $a_{11}=2$, $a_{21}=4$, $a_{22}=-6$ κλπ.

Ας συμβολίσω με a^{1^T} το διάνυσμα που αντιστοιχεί στης πρώτης γραμμής "ξαπλωμένο" (εξού και το "T", που διαβάζεται ανάστροφο. Δηλαδή

$$a^{1^T} = (a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (2, 1, 1)$$

Χωρίς το T θα έπρεπε να γράψουμε το a^1 ως στήλη: $a^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$

Τότε η πρώτη εξίσωση γράφεται $\boxed{\langle a^1, x\rangle = b_1}$

Αν κάνω το ίδιο με τις υπόλοιπες γραμμές το σύστημά μου γράφεται ως:

$$\left.\begin{cases} \langle a^1, x\rangle = b_1 \\ \langle a^2, x\rangle = b_2 \\ \langle a^3, x\rangle = b_3 \end{cases}\right\} *$$

Οί λύσεις του συστήματος:

Α! οπτική γωνία: "των γραμμών".

Στή μορφή που γράψαμε τό σύστημα μπορούμε νά σκεφτούμε τίς λύσεις ως εξής:

Κάθε μια από τις τρείς εξισώσεις (κάθε γραμμή του συστήματος) έχει ως λύση ένα επίπεδο. (Κάθε σημείο του επιπέδου είναι λύση της εξίσωσης).

Έτσι τά X που ικανοποιούν καί τίς τρείς εξισώσεις θά πρέπει νά ανήκουν ταυτόχρονα καί στά τρία επίπεδα δηλαδή στη τομή τους. Πλην εξαιρέσεων (που θά εξετάσουμε αναλυτικά σέ λίγο) ή τομή τριών επιπέδων στό χώρο είναι ένα σημείο. Σε αυτή τή περίπτωση τό σύστημά μας θά έχει μία ακριβώς λύση $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, τήν τομή των επιπέδων.

Β! οπτική γωνία: "των στηλών"

Ας δώσουμε τώρα ονόματα στίς στήλες των συντελεστών

Έστω
$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

πρώτη στήλη — δεύτερη στήλη — τρίτη στήλη

Τώρα το σύστημα γράφεται και ως:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

ή και

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$$

<u>Προσοχή:</u> Εδώ τα x_1, x_2, x_3 είναι αριθμοί $\in \mathbb{R}$
ενώ τα a_1, a_2, a_3 είναι διανύσματα $\in \mathbb{R}^3$!

Σε αυτή την οπτική γωνία το $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ είναι λύση τότε όταν τα x_1, x_2, x_3 μας δίνουν (ως συντελεστές) ένα γραμμικό συνδυασμό των a_1, a_2, a_3 ο οποίος να ισούται με b.

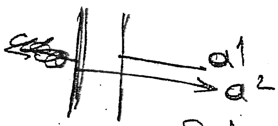
Έτσι, σε αυτή τη <u>περίπτωση</u> όπου υπάρχει δηλαδή μια ακριβώς λύση του <u>συστήματος</u>*, αυτή ταυτίζεται αφενός με την τομή των τριών επιπέδων και αφετέρου μας δίνει γραμμικό συνδυασμό των στηλών που ισούται με τη δεξιά πλευρά του συστήματος.

* η περίπτωση αυτή ονομάζεται "<u>μη-ιδιόμορφη</u>".

Ιδιόμορφη περίπτωση είναι όταν έχω είτε άπειρες λύσεις είτε καμμία.

Ιδιόμορφη περίπτωση στην ~~...~~ οπτική γωνία των γραμμών

Πότε τα τρία επίπεδα δεν τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο

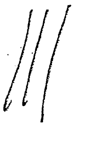
π.χ. όταν δύο επίπεδα είναι παράλληλα 

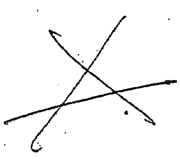
Αυτό ισοδυναμεί με a^1 και a^2 συγγραμμικά, δηλ. $\boxed{a^1=\lambda a^2}$

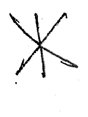
Αν η ίδια αναλογία ισχύει για τα b, δηλαδή $\boxed{b_1=\lambda b_2}$ τότε οι δύο εξισώσεις είναι πολλαπλάσιο η μία της άλλης, άρα είναι ταυτόσημες εξισώσεις και οι λύσεις τους τα δύο επίπεδα ταυτίζονται. Αν όμως $\boxed{b_1\neq\lambda b_2}$ τότε οι δύο εξισώσεις είναι ασύμβατες $\Rightarrow$ καμμία λύση δεν ικανοποιεί και τις δύο, τα επίπεδα είναι παράλληλα και δε τέμνονται.

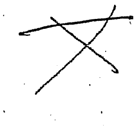
Έτσι μπορεί να έχουμε περιπτώσεις όπως:

α) δύο επίπεδα παράλληλα  $a^1=\lambda a^2$ αν και $b_1=\lambda b_2$ άπειρες λύσεις, αν $b_1\neq\lambda b_2$ καμμία λύση

β) τρία επίπεδα παράλληλα  $a^1=\lambda a^3$, $a^2=\mu a^3$ αν και $b_1=\lambda b_3$ και $b_2=\mu b_3$ άπειρες λύσεις, αν $b_1\neq\lambda b_3$ ή $b_2\neq\mu b_3$ καμμία λύση.

γ) τρίτο επίπεδο παράλληλο στη τομή των δύο πρώτων  $a^3=\lambda a^1+\mu a^2$

αν και $b_3=\lambda b_1+\mu b_2$ άπειρες λύσεις 

αν $b_3\neq\lambda b_1+\mu b_2$ καμμία λύση 

Γενικώς: Ιδιόμορφη είναι η περίπτωση όταν κάποια στήλη γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ανάλογα με το αν τα ίδια ισχύουν για τις δεξιές πλευρές θα έχω άπειρες ή καμμία λύση.

Ιδιόμορφη περίπτωση στην οπτική γωνία των στηλών.

Λύση έχω όταν υπάρχουν x_1, x_2, x_3 τέτοια που $x_1 \cdot a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = b$.

όταν δηλαδή $\boxed{b \in \text{Span}(a_1, a_2, a_3)}$.

Ας σκεφτούμε το εξής:

Το Span ενός διανύσματος είναι μια ευθεία και το Span δύο διανυσμάτων είναι ένα επίπεδο (εκτός και τα δύο διανύσματα είναι συγγραμμικά).

Επίσης το Span τριών διανυσμάτων (του $\mathbb{R}^3$) είναι ολόκληρος χώρος, άρα όλος ο $\mathbb{R}^3$. Πως γίνεται λοιπόν ~~ένα b~~ να υπάρχουν b που δεν ανήκουν στο Span;;!

Απάντηση: Το Span 3 διανυσμάτων δεν είναι όλος ο $\mathbb{R}^3$ όταν κάποιο από τα διανύσματα ανήκει στο επίπεδο των άλλων δύο (γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους). Τότε το Span των 3 διανυσμάτων θα είναι αυτό το επίπεδο.

π.χ.

π.χ. $$x_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{a_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{a_2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}}_{a_3}$$

Εδώ έχουμε $a_1 = \frac{1}{3} a_2 + \frac{2}{3} a_3$. και επομένως

$\mathrm{Span}(a_1, a_2, a_3) = \mathrm{Span}(a_2, a_3)$.

Το $b = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}$ για παράδειγμα δεν ανήκει σ' αυτό το επίπεδο και το σύστημα θα είναι αδύνατο (καμμία λύση)

Ενώ το $b = \begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$ ανήκει στο επίπεδο και μπορεί να βεβαιωθεί κανείς ότι θα υπάρχουν πολλοί τρόποι να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των a_1, a_2, a_3 (άπειρες λύσεις)

<u>Πάντως</u>: ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση όταν κάποια στήλη γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων

και αυτό θα συμβαίνει ακριβώς όταν

όταν μια γραμμή γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων

5. Συμβολισμός πινάκων και πράξεις με πίνακες

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 1.4)

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων σε «πολλούς αγνώστους», όπως για παράδειγμα το παρακάτω:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 6x_2 + 0x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Συνήθως αναρωτιόμαστε ποια $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ λύνουν ταυτόχρονα και τις δύο εξισώσεις.

Αλλά με την επίλυση γραμμικών συστημάτων θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τα συστήματα ως κίνητρο για να εισάγουμε τους «πίνακες».

Η γενική μορφή ενός συστήματος με m εξισώσεις και n αγνώστους είναι

$$(*)\ \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right\}$$

όπου τα a_{ij} είναι οι συντελεστές των x_j.

δείκτης γραμμής δείκτης στήλης

Στο παράδειγμά μας:

$$\begin{array}{l}
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} \\
2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 5 \\
4x_1 + (-6)x_2 + 0x_3 = -2 \\
\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{matrix}
\end{array}$$

Ψάχνω πιο σύντομη γραφή του συστήματος $(*)$:

Αν συμβολίσω με $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n$ και με a^{i^T} την «ξαπλωμένη» (εξ ου και το T που διαβάζεται «ανάστροφο») i-γραμμή των συντελεστών $a^{i^T} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ με $a^i \in R^n$

π.χ. $a^{1^T} = (2,1,1)$ και $a^{2^T} = (4,-6,0)$

<u>τότε</u> η i-εξίσωση γράφεται $\boxed{\langle a^i, x \rangle = b_i}$ και το σύστημα γράφεται

$$(*) \begin{Bmatrix} \langle a^1, x \rangle = b_1 \\ \langle a^2, x \rangle = b_2 \\ \vdots \\ \langle a^m, x \rangle = b_m \end{Bmatrix}$$

Θέλω ακόμα «πιο σύντομη» γραφή του συστήματος. Θέλω να πιάσω όλους τους συντελεστές a_{ij} σε ένα «τετραγωνικό αντικείμενο» A και να γράφω το σύστημα ως

$\boxed{A \cdot x = b}$ με $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ π.χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

Αντικείμενα σαν τον A τα ονομάζω «πίνακες» και τα ορίζω παρακάτω:

Ορισμός (Πίνακας): Πίνακας $m\times n$ είναι ένα σύνολο $m\cdot n$ πραγματικών αριθμών a_{ij}, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$ διατεταγμένων σε m γραμμές και n στήλες.

Ο $m\times n$ πίνακας $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ γράφεται και ως $A=\left[a_{ij}\right]_{\substack{i=\ldots \\ j=\ldots}}$

- **Πρόσθεση δύο $m\times n$ πινάκων:** Έστω $A=\left[a_{ij}\right]$ και $B=\left[b_{ij}\right]$ δύο $m\times n$ πίνακες.

Τότε ορίζω $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$ (αθροίζω κατά συντεταγμένες).

- **Πολλαπλασιασμός με $\lambda\in R$.** Ορίζω τον πίνακα $\lambda\cdot A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$.

Κανόνες πράξεων

Αν A, B, C $m\times n$ πίνακες, και $\lambda,\mu\in R$,

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $\exists$ $m\times n$ O: $A+O=A$ $\forall$ $m\times n$ A $\qquad O=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{m}\left.\vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} n$
-
- $\forall A$ $\exists(-A)$: $A+(-A)=O$
- $\lambda\cdot(\mu\cdot A)=(\lambda\cdot\mu)\cdot A$
- $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$
- $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$

<u>Σύμβαση:</u> Τα διανύσματα του R^n τα γράφουμε ως πίνακες με μια στήλη, δηλαδή ως $n\times 1$ πίνακες, όχι ως γραμμές. Αν θέλουμε να γράψουμε το $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ως γραμμή το συμβολίζουμε με x^T. $x^T=(x_1,\ldots,x_n)$ (διαβάζουμε x ανάστροφο)

Θέλω η αριστερή πλευρά γραμμικού συστήματος να γράφεται ως $A\cdot x$. Άρα πρέπει να ορίσω πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα, τέτοιο που το αποτέλεσμα να δίνει την αριστερή πλευρά του συστήματος.

<u>Ορισμός (Πολλαπλασισαμός πίνακα με διάνυσμα):</u> Έστω $A=\left[a_{ij}\right]$ ένας $m\times n$ πίνακας με i-γραμμή την $a^{i^T}=(a_{i1},\ldots a_{in})$. Και έστω $x\in R^n$ $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

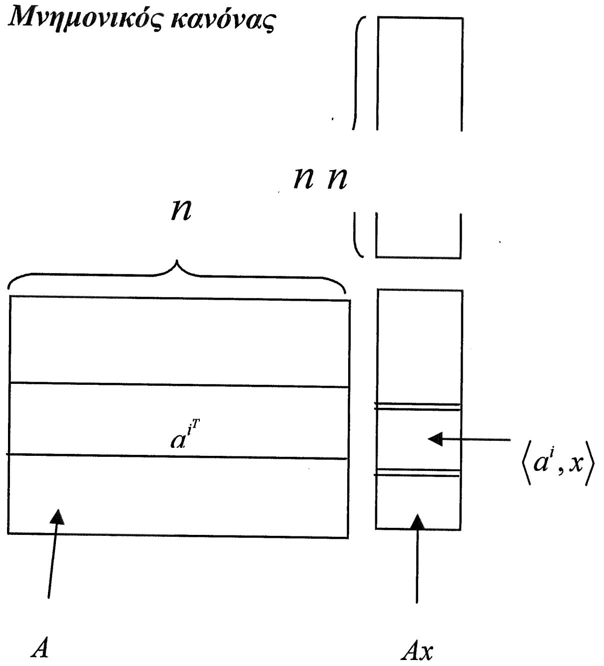
Ορίζουμε $A\cdot x\in R^m$ ως

$$A\cdot x=\underbrace{\begin{pmatrix} \langle a^1,x\rangle \\ \langle a^2,x\rangle \\ \vdots \\ \langle a^m,x\rangle \end{pmatrix}}_{m \text{ συντεταγμένες}}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots \end{pmatrix}}_{R^m}$$

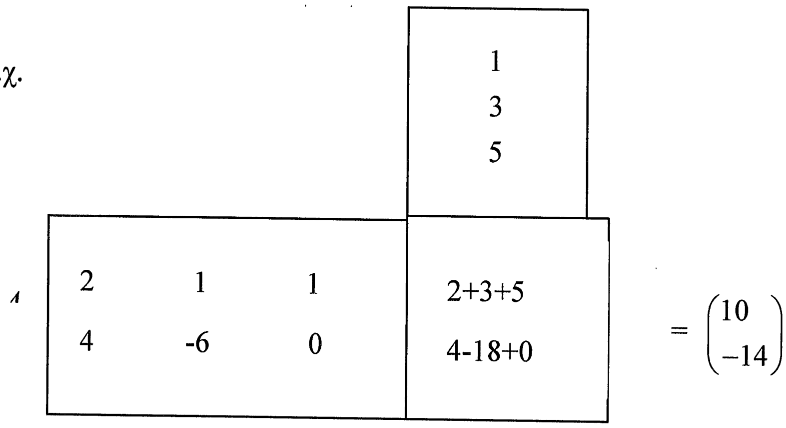
<u>Σημείωση:</u> Για να μπορώ να πολλαπλασιάσω A και x πρέπει:

 # στηλών του A = # συντεταγμένων του x

Μνημονικός κανόνας



π.χ.



Τί σχέση έχει το Ax με τις στήλες του A;

Αν ονομάσουμε $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in R^m$ την i-στήλη του A τότε

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \dots = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots$$

$$= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots$$

Δηλ. Το Ax **είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του** A **με συντελεστές τις συντεταγμένες του** x.

Κανόνες πράξεων

- $A \cdot (x + y) = Ax + Ay$
- $A \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot (Ax)$
- $(A + B) \cdot x = Ax + Bx$
- $(\lambda A) \cdot x = \lambda \cdot (Ax)$

Παραδείγματα:

Μοναδιαίος

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad I_n \cdot x = x \quad \forall x$$

Ταυτοτικός, μοναδιαίος

Διαγώνιος

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix}$$

Στοιχειώδης Ε(λ)

$$\begin{array}{c c} & \\ i - & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots\lambda & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \begin{array}{cccc} & & & \,\,| \\ & & & \,\,i \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i + \lambda x_j \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Επίσης ορίζουμε πολλαπλασιασμό πινάκων μεταξύ τους.

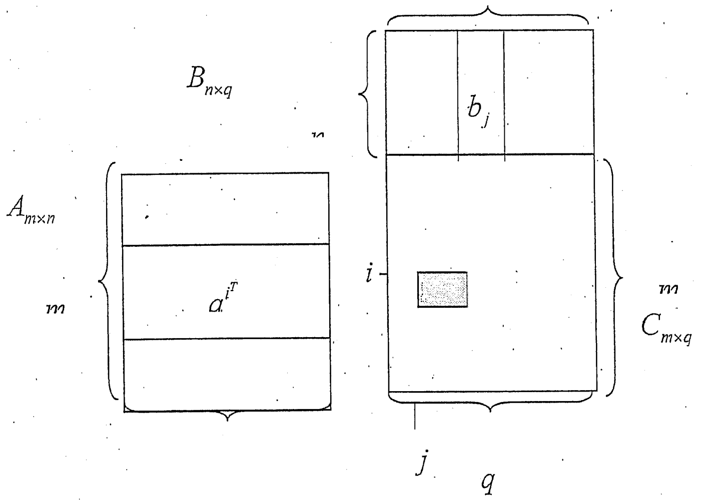
Ορισμός (Πολλαπλασισαμός πίνακα με πίνακα): Έστω A $m \times n$ πίνακας και B ένας $n \times q$ πίνακας. Ο πίνακας $C = A \cdot B$ θα είναι $m \times q$ και ορίζεται ως $C_{ij} = \langle a^i, b_j \rangle$ (εσωτερικό γινόμενο i-γραμμής του A με j-στήλη του B.

Σημείωση: Για να πολλαπλασιάσω A με B πρέπει

 # στηλών A = **# γραμμών** B

Μνημονικός κανόνας

Για να πολλαπλασιάσω $A \cdot B$:



Παράδειγμα:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} B \\ A \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad C = A\cdot B \end{array}$$

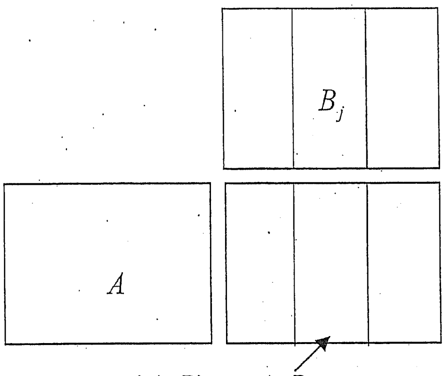
$$1\cdot 0+0\cdot 2+2\cdot 1 \qquad\qquad 3\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1$$

Παράδειγμα:

- $x^T y = \langle x, y\rangle \in R$
- $xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$

<u>Παρατήρηση:</u> Η «j-στήλη του $A\cdot B$» ισούται με $A\cdot$ «j-στήλη του B».

$(A\cdot B)_j = A\cdot B_j$



$(A\cdot B)_j = A\cdot B_j$

Κανόνες πράξεων

- Έστω $A_{m\times n}$, $B_{n\times q}$, $C_{q\times s}$, $D_{n\times q}$, $E_{m\times n}$
- $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$
- $A\cdot(B+D) = A\cdot B + A\cdot D$
- & $(A+E)\cdot B = A\cdot B + E\cdot B$
- $(\lambda\cdot \mathrm{A})\cdot(\mu\cdot B) = \lambda\cdot\mu\cdot A\cdot B$

<u>Προσοχή:</u> Ισχύει $A\cdot B \neq B\cdot A$ $n\times n$!!!

π.χ.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

ενώ

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Παραδείγματα:

Μοναδιαίος.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (I_n \cdot A)_j = I_n \cdot a_j = a_j \Rightarrow \boxed{I_n \cdot A = A}$$

$$\text{και} \quad (A \cdot I_n)'_j = A \cdot e_j = a_j \Rightarrow \boxed{A \cdot I_n = A}$$

Διαγώνιος

<u>*Από αριστερά*</u>

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

Το λ_i συντελεστής της <u>*i*-γραμμής</u>

<u>*Από δεξιά*</u>

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \dots \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

Το λ_i συντελεστής της <u>*i*-στήλης</u>

Στοιχειώδης Ε(λ)

<u>*Από αριστερά*</u>

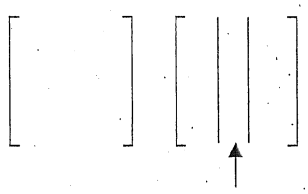
$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & a_2 & \cdots \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & \end{bmatrix} \\ a_1 \end{array}$$

$$i-\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1}+\lambda\alpha_{j1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i+1,1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \\ i \end{array} = \begin{bmatrix} \vdots \\ a^{i-1^T} \\ a^{i^T} + \lambda a^{j^T} \\ a^{i+1^T} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Προσθέτει λ-πλάσιο της <u>j-γραμμής</u> στην <u>i-γραμμή</u>.

<u>*Από δεξιά*</u>

$$i-\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$



$a_j + \lambda a_i$

Προσθέτει λ-πλάσιο της <u>i-στήλης</u> στην <u>j-στήλη</u>.

Πίνακες μεταθέσεων

Έστω P προκύπτει από μοναδιαίο με εναλλαγή i- και j-γραμμής.

Τότε $P \cdot A$ εναλλάσσει i- & j-γραμμή του A και $A \cdot P$ εναλλάσσει i- & j-στήλη του A.

6. Γραμμικά Συστήματα: Ο Αλγόριθμος Gauss και η παραγοντοποίηση PA=LDU

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 1.3 και 1.5)

Έστω το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 6x_2 &= -2 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

<u>Στόχος:</u> Να βρω τις λύσεις, δηλαδή τα $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ που ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις.

Η διαδικασία επίλυσης **βασίζεται στην αρχή ότι:**

Οι **λύσεις του συστήματος δεν αλλάζουν** αν

- αλλάξω τη σειρά των εξισώσεων
- πολλαπλασιάσω μία εξίσωση με λ

$$\langle a, x \rangle = b \Leftrightarrow \langle \lambda a, x \rangle = \lambda b$$

- προσθέσω σε μία εξίσωση πολλαπλάσιο μίας άλλης εξίσωσης

$$\left.\begin{aligned} \langle a^1, x \rangle &= b_1 \\ \langle a^2, x \rangle &= b_2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &\langle a^1, x \rangle = b_1 \\ &\langle a^1 + \lambda a^2, x \rangle = b_1 + \lambda b_2 \end{aligned}\right.$$

Ο αλγόριθμος Gauss προτείνει ένα συγκεκριμένο τρόπο να κάνω τέτοιες <u>«γραμμοπράξεις»</u> ώστε να καταλήξω σε λύση.

Κατ' αρχάς το σύστημα γράφεται ως $Ax=b$ με $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ και $b=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Αλγόριθμος Gauss

Πρώτα παίρνουμε τον A και κολλάμε από δεξιά το b.

$\to [A \mid b]$. Στο παράδειγμά μας σχηματίζεται ο $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right]$.

Ακολούθως κάνουμε γραμμοπράξεις στον «διευρυμένο» A με την εξής σειρά:

<u>1^o βήμα:</u>

Αν $a_{11} \neq 0$ το ονομάζουμε πρώτο οδηγό. Προσθέτουμε κατάλληλα <u>πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής</u> (την οποία κρατάμε αναλλοίωτη) στις επόμενες, έτσι ώστε <u>να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από τον πρώτο οδηγό</u>.

<u>Δηλαδή:</u> στην i γραμμή προσθέτω $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\cdot$ της πρώτης γραμμής.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\gamma_2' = \gamma_2 - 2\gamma_1 \\ \gamma_3' = \gamma_3 + \gamma_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right]$$

<u>2^o βήμα:</u>

Αν το δεύτερο στοιχείο της διαγωνίου (που προέκυψε μετά το 1^o βήμα) $a_{22}' \neq 0$ το ονομάζω δεύτερο οδηγό. Κρατάω τις δύο πρώτες γραμμές και προσθέτω κατάλληλα <u>πολλαπλάσια της δεύτερης γραμμής</u> (της <u>γραμμής του οδηγού</u>!!) στις επόμενες ώστε <u>να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από το δεύτερο οδηγό</u>.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow[\gamma_3''=\gamma_3'+\gamma_2']{} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Η διάδικασία αυτή συνεχίζεται (υπό την προϋπόθεση ότι τα διαγώνια στοιχεία που συναντώ είναι $\neq 0$) **μέχρι να φθάσω δεξιά σε άνω τριγωνικό πίνακα** (τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι 0) και πάνω στη διαγώνιο έχει τους οδηγούς. Αυτόν τον ονομάζω U.

Στο παράδειγμά μας, όπου ο A είναι 3×3 άρκεσαν δύο βήματα. Αν $A_{n\times n}$ χρειάζονται $n-1$ βήματα του Αλγορίθμου Gauss.

Παράλληλα το b έχει μετασχηματιστεί σε κάποιο c:

$$\boxed{[A \quad b] \to [U \quad c].}$$

Οι λύσεις του $\boxed{Ax=b}$ είναι ακριβώς οι λύσεις του $\boxed{Ux=c}$. Το πλεονέκτημα είναι τώρα ότι μετατρέποντας το σύστημα σε τριγωνικό, μπορούμε να το λύσουμε εύκολα με «ανάδρομη αντικατάσταση»:

$\boxed{Ux=c}$: $\quad 2x_1+1x_2+1x_3=5$

$-8x_2-2x_3=-12$

$x_3=2$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην προτελευταία παίρνουμε:

$-8x_2-4=-12 \Leftrightarrow x_2=1$

και αντικαθιστώντας αυτά στην πρώτη:

$2x_1+1+2=5 \Leftrightarrow x_1=1$

<u>Συμπέρασμα:</u> Αν για κάποιο $n\times n$ πίνακα A κατά την εφαρμογή του Αλγορίθμου Gauss δε συναντήσω μηδενικό και βρω, λοιπόν, ένα **πλήρες σύστημα οδηγών** (δηλ. n οδηγούς $\neq 0$), τότε **το σύστημα** $Ax=b$ **θα έχει** **<u>ακριβώς μία λύση</u>** για **<u>οποιοδήποτε b</u>. Ονομάζω αυτή την περίπτωση μη – ιδιόμορφη.**

Η διάσπαση A=L·U

Στο 1^{o} βήμα του Gauss μετατρέψαμε με γραμμοπράξεις τον A σε A'. Οι γραμμοπράξεις αυτές μπορούν να εκφραστούν με πολλαπλασιασμούς του A με στοιχειώδεις πίνακες από αριστερά:

$$A'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}A$$

$\gamma_3'=\gamma_3+\gamma_1$ $\qquad$ $\gamma_2'=\gamma_2-2\gamma_1$

Στο 2^{o} βήμα πήραμε από τον A' τον U πάλι με γραμμοπράξεις

$$U=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}A'$$

$\gamma_3''=\gamma_3'+\gamma_2'$

Συνολικά λοιπόν παίρνουμε:

$$U=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\cdot A=L'A$$

Στο γινόμενο $L'=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$ οι συντελεστές <u>«χάνονται» γενικώς</u>. (Εδώ είναι σύμπτωση ότι κάποιοι διατηρήθηκαν).

Για να αντιστρέψω ένα μετασχηματισμό $a^i \to a^i + \lambda a^j$ αρκεί να τον «ξανακάνω» με αντίθετο πρόσημο του λ: $a^i + \lambda a^j - \lambda a^j \to a^i$.

Αν ακυρώσω τον τελευταίο μετασχηματισμό που έκανα παίρνω

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

και αν ακυρώσω έναν – έναν και τους υπόλοιπους

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} U = A$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες εμφανίζονται με ανάποδη σειρά και περιέχουν τα αντίθετα των συντελεστών του αλγορίθμου Gauss.

Αν σχηματίσω τώρα το γινόμενο $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ θα δω ότι:

τα αντίθετα των συντελεστών διατηρούνται στον L και βρίσκονται στην ίδια θέση με το στοιχείο που «μηδένισαν» στον A (για να προκύψει ο U).

Αυτό δεν είναι σύμπτωση: αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά. Επομένως:

> Αν για κάποιο $n \times n$ πίνακα A κατά τον Αλγόριθμο Gauss δε συναντήσω μηδενικά, αν έχω δηλαδή πλήρες σύστημα οδηγών, τότε θα υπάρχουν
>
> - κάτω τριγωνικός πίνακας L $n \times n$ με «1» στη διαγώνιο και τα αντίθετα των συντελεστών κάτω από τη διαγώνιο και
>
> - άνω τριγωνικός U $n \times n$ με τους οδηγούς στη διαγώνιο, τέτοιοι ώστε $A = L \cdot U$.

Κατασκευή του L:

Τον φτιάχνω παράλληλα με τον αλγόριθμο Gauss θέτοντας το αντίθετο του συντελεστή που χρησιμοποιώ για να μηδενίσω ένα στοιχείο του A στην αντίστοιχη θέση του L.

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & -4 & -10 \end{bmatrix} \qquad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \left(L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Επίλυση του Ax=b όταν γνωρίζω τη διάσπαση A=LU

Αν αφού έχω κάνει τη διάσπαση $A = LU$ μου δοθεί η δεξιά πλευρά b του συστήματος, δεν αξίζει να «ξανακάνω» αλγόριθμο Gauss.

Λύνω το σύστημα $Ax = b$ στα εξής δύο βήματα:

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{LU}_{A}x = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{c} = b$$

1) Βρες c: $Lc = b$

2) Βρες x: $Ux = c$

Και τα δύο συστήματα είναι τριγωνικά και λύνονται εύκολα.

π.χ. Να λυθεί το $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Βρες c: $Lc = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{c_1 = 1}$

$2c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = -2}$

$-c_1 - c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = 0}$

2) Βρες x: $Ux = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{x_3 = 0}$

$-8x_2 - 2x_3 = -2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{4}}$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{3}{8}}$

Παρατήρηση: Η παραγοντοποίηση A=LDU είναι μοναδική

Δηλαδή αν υπήρχαν δύο τέτοιες διασπάσεις $A = L_1D_1U_1$ και $A = L_2D_2U_2$ με L_1, L_2 κάτω τριγωνικούς με «1» στη διαγώνιο, D_1, D_2 διαγώνιους και U_1, U_2 πάνω τριγωνικούς με «1» στη διαγώνιο, τότε αυτές θα πρέπει να είναι ταυτόσημες:

$$L_1 = L_2, D_1 = D_2 \text{ και } U_1 = U_2$$

Αν εμφανιστεί μηδενικό

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η «θεραπεύσιμη» και η «μη – θεραπεύσιμη».

<u>**Θεραπεύσιμη**</u> π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Μπορώ με εναλλαγή γραμμών να φέρω στην θέση που μ' ενδιαφέρει μη μηδενικό στοιχείο και να το κάνω οδηγό.

Αν μπορώ κατ' αυτό τον τρόπο να έχω ένα πλήρες σύστημα οδηγών (n οδηγούς $\neq 0$) βρίσκομαι στην <u>μη – ιδιόμορφη</u> περίπτωση: **υπάρχει ακριβώς μία λύση για οποιαδήποτε δεξιά πλευρά**.

<u>Σημείωση:</u> Αν γνώριζα από πριν τις αναγκαίες εναλλαγές γραμμών θα μπορούσα να τις είχα κάνει εξ' αρχής και να κάνω μετά τον αλγόριθμο Gauss χωρίς να συναντήσω 0. $\Rightarrow$ **Υπάρχει πίνακας μεταθέσεων P τέτοιος που $PA = LU$.**

<u>**Μη – θεραπεύσιμη**</u> Όταν όλη η στήλη δεξιά κάτω από τον προηγούμενο οδηγό είναι γεμάτη 0. Άρα δεν μπορώ με εναλλαγή γραμμών να φέρω μη – μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Τότε βρίσκομαι στην <u>ιδιόμορφη</u> περίπτωση: **Καμμία αναδιάταξη γραμμών δεν παράγει πλήρες σύστημα οδηγών.**

Στην ιδιόμορφη περίπτωση το αν θα υπάρχουν λύσεις και πόσες εξαρτάται από τη δεξιά πλευρά.

Αν η μετασχηματισμένη δεξιά πλευρά στο παραπάνω παράδειγμα ήταν $\begin{pmatrix} \kappa\acute{\alpha}\tau\iota \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ οι δύο τελευταίες εξισώσεις θα ήταν συμβατές ($x_3 = 2$) αλλά θα είχα άπειρες λύσεις γιατί το x_2 είναι ελεύθερο.

Αν η δεξιά πλευρά ήταν $\begin{pmatrix} κάτι \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ οι δύο τελευταίες εξισώσεις θα ήταν μη συμβατές και δεν θα είχα καμμία λύση.

Στην ιδιόμορφη περίπτωση έχω καμμία ή άπειρες λύσεις.

Επιπτώσεις εναλλαγής γραμμών στη κατασκευή του L

(Βλέπε σημειώσεις από το μάθημα και πηγή)

Αν χρειαστεί στη πορεία του αλγορίθμου Gauss να εναλλάξω την i-γραμμή και τη j-γραμμη του A το ίδιο πρέπει να κάνω στον L που κατασκευάζω, μόνο όμως όσον αφορά τους συντελεστές που έχω ήδη βάλει στον L και όχι τους "1" της διαγωνίου και τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο!

π.χ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & & 1 & \\ 2 & & & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ \boxed{3 \quad 2} & & 1 & \\ \boxed{2 \quad 3} & & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 3 & 1 & \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

7. Αντίστροφοι και Ανάστροφοι Πίνακες

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 1.6)

Αντίστοφοι πίνακες

Έστω ο στοιχειώδης $n\times n$ πίνακας $E_{ij}(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\ddots&0\\ \vdots\lambda&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&1\end{bmatrix}$

$i-$

$\quad | \quad i$

Γνωρίζουμε ότι $E_{ij}(\lambda)\cdot x$ προσθέτει την λ-πλάσια της j-συντεταγμένης στην i-συντεταγμένη του x: $E_{ij}(\lambda)\cdot x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{i-1}\\ x_i+\lambda x_j\\ x_{i+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με $E_{ij}(-\lambda)$ ξανα-ακυρώνουμε τον μετασχηματισμό που διενήργησε η $E_{ij}(\lambda)$ και γυρνάμε στο αρχικό x. Δηλαδή

$$\boxed{E_{ij}(-\lambda)\cdot\left(E_{ij}(\lambda)\cdot x\right)=x}$$

Αυτή είναι και η ιδιότητα μέσω της οποίας θα ορίσουμε τον αντίστροφο, A^{-1}, ενός πίνακα A. Εάν υπάρχει αντίστροφος αυτός θα έχει την ιδιότητα ότι

$\boxed{A^{-1} \cdot (A \cdot x) = x}$ $\forall x \in R^n$ και επομένως $\boxed{A^{-1} \cdot A = I}$.

<u>Σημείωση:</u> Αντίστροφος δεν υπάρχει για κάθε πίνακα A: Έστω ένας πίνακας A ιδιόμορφος. Τότε θα υπάρχει $x \neq 0$ με $Ax = 0$. Εδώ όμως δεν υπάρχει πίνακας που πολλαπλασιάζει το Ax και ξαναγυρνάμε στο x διότι: $B \cdot (Ax) = B \cdot 0 = 0 \neq x$

<u>Ορισμός (αντίστροφος πίνακας):</u> Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει πίνακας B τέτοιος που $A \cdot B = I$ (B δεξιός αντίστροφος) και $B \cdot A = I$ (B αριστερός αντίστροφος).

Εάν υπάρχει είναι μοναδικός και συμβολίζεται με A^{-1}.

Παράδειγμα:

- $(a)^{-1} = \left(\dfrac{1}{a}\right)$
- $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$
- $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$

Σημείωση:

1) Από τον ορισμό προκύπτει ότι $(A^{-1})^{-1} = A$

2) Αν ο A έχει δεξιό αντίστροφο C και αριστερό B τότε πρέπει να ταυτίζονται και ο A είναι αντιστρέψιμος!

<u>Διότι:</u> $B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$

<u>Κανόνας:</u> Αν A, B αντιστρέψιμοι (<u>υποθέτω</u> ότι υπάρχουν A^{-1}, B^{-1}) τότε και $A \cdot B$ αντιστρέψιμος και

$$\boxed{(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}.}$$

<u>Απόδειξη:</u> $(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(AB)=I$ και $AB\cdot(B^{1}\cdot A^{-1})=I$

$\Leftrightarrow$ παρομοίως

$$B^{-1}\cdot\underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{I}\cdot B=I$$

$\Leftrightarrow$

$$B^{-1}\cdot B=I$$

OK

<u>Γενικότερα:</u> $(A\cdot B\cdot C)^{-1}=C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$ αν A, B, C αντιστρέψιμοι.

Μέθοδος υπολογισμού του αντιστρόφου (Αλγόριθμος Gauss Jordan)

Έστω A έχει n οδηγούς. Θα δείξουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τον A^{-1} σε αυτή την περίπτωση.

Ας συμβολίσουμε την i-στήλη του A^{-1} με x_i (άγνωστη) δηλαδή:

$A^{-1}=\left(x_1\,|\,x_2\,|\cdots|\,x_n\right)$, $x_i\in R^n$! (διάνυσμα, όχι αριθμός!)

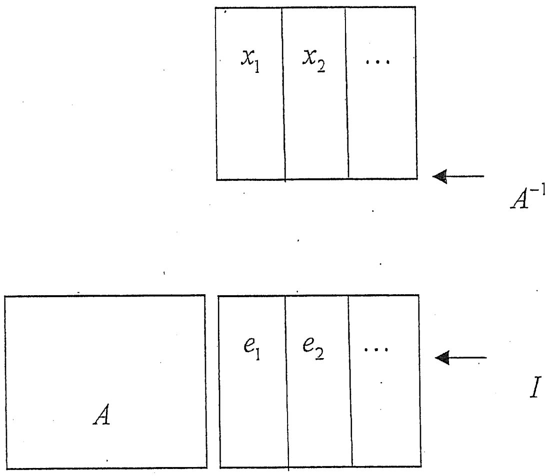
Ας συμβολίσουμε επιπλέον με $e_i=i-\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$. Δηλαδή $I=\left(e_1\,|\,e_2\,|\cdots|\,e_n\right)$.

Η εξίσωση που ορίζει τον A^{-1} είναι η $\boxed{A\cdot A^{-1}=I}$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\begin{array}{l} Ax_i = e_i \\ i = 1,\ldots,n \end{array}}$$

Δηλαδή:



<u>Άρα:</u> έχω n γραμμικά συστήματα. Από το πρώτο μπορώ να βρω το x_1, από το δεύτερο το x_2, κλπ.

<u>Πώς:</u> Αντί να κάνω Gauss για κάθε σύστημα ξεχωριστά, κολλάω όλες τις δεξιές πλευρές δεξιά από τον A και κάνω Gauss σε όλες μαζί:

$$\boxed{[A \mid e_1 \mid e_2 \mid \ldots e_n] = [A \mid I] \longrightarrow [U \mid L']}$$

π.χ. Βρες τον αντίστροφο του $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A \qquad I} \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{U} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{L'}$$

Εδώ θα μπορούσα να πάρω τα συστήματα $Ux_i = l_i'$ (όπου l_i' η i-στήλη του L') και να λύσω το καθένα από αυτά με ανάδρομη αντικατάσταση.

Ωστόσο, τώρα που έχω πολλές δεξιές πλευρές για τον ίδιο U συμφέρει να κάνω κάτι άλλο:

Να συνεχίσω τους γραμμομετασχηματισμούς μέχρι αριστερά να εμφανιστεί ο ταυτοτικός (πώς; βλέπε παρακάτω) *

$$\boxed{[U \mid L'] \rightarrow [I \mid K]}$$

Τότε τα συστήματα διαβάζονται $I \cdot x_i = k_i$ και επομένως η i-στήλη του K είναι η i-στήλη του A^{-1} δηλαδή $\boxed{K = A^{-1}}$. Τελείωσα!

Πώς * : **με ανάποδη απαλοιφή Gauss.**

<u>Βήμα 1°:</u> Προσθέτω πολλαπλάσια της <u>τελευταίας γραμμής</u> στις προηγούμενες έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία πάνω από τον <u>τελευταίο οδηγό</u>.

<u>Βήμα 2°:</u> Προσθέτω πολλαπλάσια της <u>προτελευταίας γραμμής</u> στις προηγούμενες έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία πάνω από τον <u>προτελευταίο οδηγό</u>.

⋮

Μέχρι να φθάσω αριστερά σε διαγώνιο πίνακα.

<u>Τέλος:</u> Διαιρώ κάθε γραμμή με στοιχείο της διαγωνίου του αριστερού πίνακα, οπότε αριστερά παίρνω τον ταυτοτικό.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & -\frac{5}{16} & -\frac{6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longleftarrow A^{-1}$$

<u>Σημείωση:</u> Δείξαμε ότι αν A μη – ιδιόμορφος $\Rightarrow$ υπάρχει δεξιός αντίστροφος.

Όμως η κατασκευή εξασφαλίζει ότι θα υπάρχει και αριστερός και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και ο A^{-1} αυτός που φτιάξαμε.

Μπορεί κανείς να δείξει και το ανάποδο.

Αν A αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ μη – ιδιόμορφος

και άρα: $\boxed{\text{Αντιστρέψιμοι πίνακες είναι ακριβώς οι μη – ιδιόμορφοι.}}$

Ανάστροφοι πίνακες

Αν A ένας $m \times n$ πίνακας, τότε ως A^T ορίζεται ο $n \times m$ πίνακας που προκύπτει αν $\boxed{\text{στον } A \text{ εναλλάξω γραμμές και στήλες}}$:

Η πρώτη γραμμή του A γίνεται πρώτη στήλη του A^T κλπ.

Δηλαδή $\left[A^T\right]_{ij} = A_{ji}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

<u>Επίσης:</u> Ο A^T προκύπτει αν στον A καθρεφτίσω τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο $(a_{11}, a_{22}, \ldots)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ισχύουν οι εξής **κανόνες**:

- $(A^T)^T = A$ (προφανές)
- $(A+B)^T = A^T + B^T$ (εύκολο...)
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ (θέλει λίγη δουλίτσα, αλλά μόνο ορισμοί...)
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Απόδειξη του τελευταίου:

Έχουμε $A^{-1} \cdot A = I = A \cdot A^{-1}$

παίρνουμε ανάστροφα $(A^{-1} \cdot A)^T = I = (A \cdot A^{-1})^T$

κανόνας $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$: $A^T \cdot (A^{-1})^T = I = (A^{-1})^T \cdot A^T$

Αυτός είναι ορισμός του αντιστρόφου του A^T : ένας πίνακας B με $A^T \cdot B = I = B \cdot A^T$.

Άρα ο $(A^{-1})^T$ είναι ο B δηλαδή ο $(A^T)^{-1}$.

<u>Ορισμός:</u> Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται <u>συμμετρικός</u>.

$\Leftrightarrow \boxed{A^T = A}$

<u>δηλ.</u> τα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο στοιχεία ταυτίζονται.

<u>Πρόταση:</u> Αν A συμμετρικός και αντιστρέψιμος τότε A^{-1} συμμετρικός.

<u>Απόδειξη:</u> Δείξτε $(A^{-1})^T = A^{-1}$

Αλλά έχουμε $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ και αφού A συμμετρικός (άρα $A^T = A$) το τελευταίο είναι ίσο με A^{-1}. OK

Διάσπαση Cholesky

Αν A συμμετρικός τότε υπάρχουν κάτω τριγωνικός L με "1" στη διαγώνιο και διαγώνιος D τέτοιοι ώστε

$$A = L D L^T$$

<u>Απόδειξη</u>. Έχουμε $A = L \cdot D \cdot U$ και

επομένως $A^T = U^T D \cdot L^T$

καθώς όμως η διάσπαση $A = LDU$ είναι μοναδική, θα πρέπει $L = U^T$, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

<u>Προσοχή:</u> Αν A, B συμμετρικοί μπορεί ο $A \cdot B$ να <u>μην</u> είναι συμμετρικός, καθώς $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = B \cdot A$ και όχι $A \cdot B$.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \longleftarrow$ συμμετρικός

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}}_{\text{συμμετρικός}} \begin{bmatrix} & b \\ a & \end{bmatrix} \longleftarrow$ όχι συμμετρικός

8. Διανυσματικοί χώροι και υπόχωροι

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.1)

Οι R^n που γνωρίσαμε είναι σύνολα εφοδιασμένα με πρόσθεση $(x, y \in R^n \Rightarrow x+y := \ldots \in R^n)$ και πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό $(x \in R^n \Rightarrow \lambda x := \ldots \in R^n)$.

Γι' αυτές τις πράξεις ισχύει ένα σύνολο κανόνων:

1)	$x+y=y+x$
2)	$x+(y+z)=(x+y)+z$
3)	$\exists 0$ δηλ. $x+0=0+x=x$
4)	$\forall x \ \exists(-x): \ x+(-x)=0$
5)	$1 \cdot x = x$
6)	$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$
7)	$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
8)	$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

Ορισμός: Ένα σύνολο V εφοδιασμένο με μια πράξη + (πρόσθεση) και ένα πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό, τέτοιους ώστε να ισχύουν οι παραπάνω κανόνες λέγεται διανυσματικός χώρος.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου είναι τόσο γενική που συμπεριλαμβάνει χώρους όπως: { το σύνολο των ακολουθιών $\{a_\nu\}_{\nu \in N}$ } ή { το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $f: R \to R$ } ή { το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων } ή { το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού $\leq k$ $\}$. Εδώ όμως θα περιοριστούμε στους R^n ως διανυσματικούς χώρους.

Υπόχωροι

<u>Ορισμός:</u> Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $U \subseteq V$ με $U \neq \varnothing$ και U έχει τις εξής ιδιότητες:

- αν $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$
- αν $x \in U \Rightarrow \lambda \cdot x \in U \quad \forall \lambda$

Τότε U ονομάζεται υπόχωρος του V.

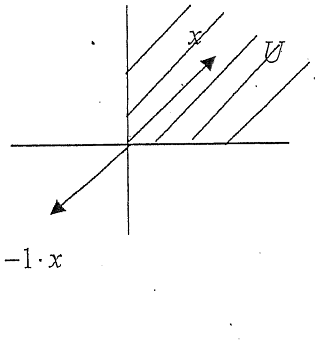
Σημείωση:

- Το $0 \in U$ διότι $0 \cdot x = 0 \in U$.
- Ο πιο μικρός υπόχωρος του V είναι ο $U = \{0\}$.
- Ο πιο μεγάλος υπόχωρος του V είναι ο V.

Παραδείγματα:

Είναι υπόχωροι οι παρακάτω:

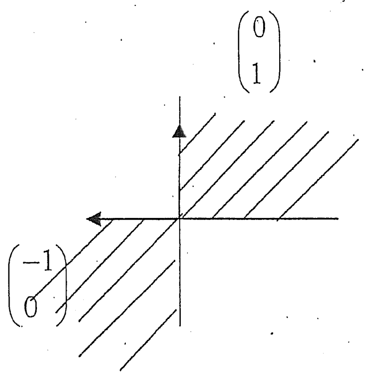
- στον R^2



$U = \{x : x_1 \geq 0 \text{ και } x_2 \geq 0\}$

<u>ΟΧΙ</u> διότι αν $x \in U$ τότε $(-1) \cdot x \notin U$

- R^2



$$U = \left\{ x \,\middle|\, \begin{matrix} x_1 \geq 0 \text{ ή } x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 0 \text{ ή } x_2 \leq 0 \end{matrix} \right\}$$

<u>**ΟΧΙ**</u> διότι $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \notin U$

- R^2 ή R^3 ευθεία που διέρχεται από 0.

<u>**ΝΑΙ**</u> διότι: $L = Span(v)$ $\Big|$ αν $\left.\begin{matrix} x \in L \Rightarrow x = \lambda v \\ x' \in L \Rightarrow x' = \lambda' v \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + x' = (\lambda + \lambda')v$

και $\mu \cdot x = \mu \cdot \lambda v = (\mu\lambda) \cdot v \in L$

- R^2 ή R^3 ευθεία που δε διέρχεται από 0.

<u>**ΟΧΙ**</u> διότι δεν περιέχει το 0.

- στον R^3: επίπεδο που διέρχεται από 0.

$E = Span(v, w)$ <u>**ΝΑΙ**</u> (βλ. παρακάτω) και γενικότερα στον R^n:

$$\boxed{\text{Αν } U = Span(v_1, \ldots, v_k) \text{ τότε } U \text{ υπόχωρος}}$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Αν $x \in U \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots \lambda_k : x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k$

$x' \in U \Rightarrow \lambda'_1, \ldots \lambda'_k : x' = \lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_k v_k$

$\Rightarrow x + x' = (\lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \ldots + (\lambda_k + \lambda'_k) v_k \in U$

και $\mu \cdot x = \lambda_1 \mu \cdot v_1 + \ldots + \lambda_k \mu \cdot v_k \in U$

Χώρος στηλών ενός mxn πίνακα

π.χ. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 4\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

Ψάχνουμε όλα τα $b=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$ για τα οποία ισχύει: το σύστημα $Ax=b$ έχει λύση. Αλλά τότε: $\exists x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$: $b=Ax=x_1a_1+x_2a_2$, δηλαδή $b\in Span(a_1,a_2)$.

Στο παράδειγμά μου, λοιπόν, τα b με αυτή την ιδιότητα είναι τα σημεία του επιπέδου που περνά από το 0, το $a_1=\begin{pmatrix}1\\ 5\\ 2\end{pmatrix}$ και $a_2=\begin{pmatrix}0\\ 4\\ 4\end{pmatrix}$.

<u>Γενικώς:</u> Αν A ένας $m\times n$ πίνακας τότε <u>χώρος στηλών</u> του είναι το σύνολο των $b\in R^m$ για τα οποία υπάρχει $x\in R^n$ με $Ax=b$.

Ο χώρος αυτός ταυτίζεται με το $Span$ των στηλών του πίνακα. Συμβολίζεται με $R(A)$:

$$\boxed{R(A):=Span(a_1,\dots a_n)\subset R^m}$$

Είναι υπόχωρος, καθώς γράφεται ως $Span$ κάποιων διανυσμάτων του R^m.

~~Γενικώς Χώρος στηλών ενός $m\times n$ πίνακα A είναι το σύνολο των $b\in\mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n : Ax=b$. Ο χώρος αυτός ταυτίζεται με το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στηλών του A, το $\mathrm{Span}(a_1,\dots,a_n)$. Συμβολίζεται με $R(A)$~~

ο $R(A)$ είναι υπόχωρος

Από το δείξαμε ήδη, αφού το δείξαμε για οποιοδήποτε "Span".

Ας δούμε ωστόσο μια άλλη απόδειξη:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{αν } b\in R(A) \Rightarrow \exists\, x : Ax=b \\ \phantom{\text{αν }} b'\in R(A) \Rightarrow \exists\, x' : Ax'=b' \end{array}\right\} \Rightarrow A(x+x')=b+b'$$

δηλαδή $b+b'\in R(A)$

επίσης $A(\mu x)=\mu b \Rightarrow \mu b\in R(A)$.

Άλλα παραδείγματα

- $A=\left[\, a \;\middle|\; 2a \,\right] \Longrightarrow$ ο $R(A)$ είναι ευθεία: το $\mathrm{Span}(a)$.
- $A=0 \Longrightarrow R(A)=0$
- $A_{3\times3}$ και οι στήλες του δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο
  $\Rightarrow A$ μη ιδιόμορφος $\Rightarrow \forall b\; \exists x : Ax=b$.
  $\Rightarrow R(A)=\mathbb{R}^3$.
- $A_{n\times n}$ μη ιδιόμορφος $\Rightarrow \dots \Rightarrow R(A)=\mathbb{R}^n$

Ο Μηδενόχωρος του Α (mxn)

Ορισμός: Το σύνολο των $x \in R^n$ με $Ax = 0$ λέγεται μηδενόχωρος του A. Είναι υπόχωρος του R^n.

Απόδειξη: (Είναι υπόχωρος)

- Αν $\left.\begin{array}{l} x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \\ x' \in N(A) \Rightarrow Ax' = 0 \end{array}\right\} A(x+x') = 0 \Rightarrow x + x' \in N(A)$
- $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot Ax = 0 \Rightarrow \lambda x \in N(A)$

π.χ.

- αν $A = [5 \quad 4]$ το $Ax = 0 \Leftrightarrow 5x_1 + 4x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{4}{5}x_2$. Άρα ο $N(A)$ αποτελείται από όλα τα $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ της μορφής $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Είναι δηλαδή μια ευθεία που περνά από το 0 και το $\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$...
- Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+0 \\ 5 & 4 & 5+4 \\ 2 & 4 & 2+4 \end{pmatrix}$...

9. Η λύση m εξισώσεων με n αγνώστους

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.2)

Ψάχνουμε <u>το σύνολο</u> των λύσεων ενός συστήματος $Ax = b$ όπου $A_{m\times n}$, $x \in R^n$, $b \in R^m$.

Όπως και στην $n\times n$ περίπτωση: οι λύσεις δεν αλλάζουν αν κάνω γραμμομετασχηματισμούς στον A και στο b ταυτόχρονα.

Εφαρμόζοντας αλγόριθμο Gauss φθάνουμε τώρα όχι σε άνω τριγωνικό U, αλλά σε «κλιμακωτό» U, όπου η μη-θεραπεύσιμη περίπτωση (συναντάω 0 από τα οποία δεν μπορώ να απαλλαγώ) είναι ο κανόνας.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\gamma'_2 = \gamma_2 - 2\gamma_1 \\ \gamma'_3 = \gamma_3 + \gamma_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma''_3 = \gamma'_3 - 2\gamma'_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί δεν είναι πια πάνω στη διαγώνιο, αλλά το πλησιέστερο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, τέτοιο που τα πλησιέστερα μηδενικά να έχουν από κάτω τους στήλη μηδενικών.

Κατά τα άλλα λειτουργώ όπως στην $n\times n$ περίπτωση: σε κάθε βήμα προσθέτω πολλαπλάσια της γραμμής του οδηγού στις από κάτω της, ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό.

Έτσι φθάνω σε κλιμακωτό πίνακα του οποίου η γενική μορφή έχει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

? ? ?

Με γενικά χαρακτηριστικά:

- Πρώτες έρχονται οι μη-μηδενικές γραμμές και τελευταίες οι γραμμές που είναι γεμάτες μηδέν.
- Πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής ονομάζεται οδηγός.
- Κάτω από κάθε οδηγό έχει στήλη μηδενικών.
- Κάθε οδηγός στα δεξιά του οδηγού προηγούμενων γραμμών.

Όπως στη nxn περίπτωση μπορεί να δείξει λοιπίν κιανείς ότι:

Αν A mxn τότε θα υπάρχουν mxm κάτω τριγωνικός L με "1" στη διαγώνιο και mxm πίνακας μεταθέσεων P, καθώς και mxn κλιμακωτός U τέτοιοι ώστε $PA = LU$.

Προσοχή στις διαστάσεις: ο U έχει τις ίδιες με τον A!, ενώ ο P και ο L είναι και οι δύο τετραγωνικοί με διαστάσεις τέτοιες που να μπορώ να πολ/σω τους A και Θ από αριστερά: γραμμές του A επί γραμμές του A

Προσοχή στη κατασκευήτου L: ο L περιέχει πάλι τα αντίθετα των συντελεστών, αλλά όχι στη θέση του στοιχείου που μηδενίζανε! Τώρα είναι μεν <u>στη «σωστή» γραμμή</u> ο καθένας, αλλά <u>στην κ-στήλη (κάτω από τον κ-«1») μπαίνουν οι συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν με τον κ-οδηγό</u> (ακόμα και αν αυτός δεν ήταν στη κ-στήλη),

Λύσεις του Ax=0

(δηλ. $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Το σύστημα λέγεται τότε «ομογενές».)

Κατ' αρχάς $Ax = 0 \Leftrightarrow Ux = 0$, όπου U ο κλιμακωτός στον οποίο φθάνουμε με αλγόριθμο Gauss.

$$Ux = 0: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί σε μία στήλη του U. Οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλη που δεν έχει οδηγό ονομάζονται ελεύθερες, οι άλλες βασικές. Εδώ: βασικές: x_1, x_3, ελεύθερες: x_2, x_4.

- Κάθε μη-μηδενική γραμμή του U αντιστοιχεί σε μία εξίσωση. Λύσε τις έτσι ώστε σε όλες να εκφράζονται οι βασικές μεταβλητές συναρτήσει των ελεύθερων. (Δηλ.: αριστερά του "=" μόνο βασικές, δεξιά του "=" μόνο ελεύθερες).

  Εδώ: $3x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = -\frac{1}{3}x_4}$

  $$x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -3x_2 - x_4}$$

- Λύσεις: τα x της μορφής: οι ελεύθερες ως έχουν, οι βασικές συναρτήσει των ελεύθερων.

  Εδώ: Όλα τα x που γράφονται ως

$$x = \begin{pmatrix} -3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ελεύθερες

Άρα $\{$ λύσεις της $Ax=0$ $\}=Span\left(\begin{pmatrix}-3\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\-\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}\right)$.

Γενικώς:

- ✓ Φτιάχνω τόσα διανύσματα $v_1,\ldots v_k$ όσα έχω ελεύθερες μεταβλητές.
- ✓ Σε καθένα από αυτά έχω «θέσεις» ελεύθερων και βασικών μεταβλητών. Τις ελεύθερες τις γεμίζω με 0/1 έτσι ώστε σε κάθε v_j να έχω ένα "1" και κάθε ελεύθερη να έχει κάπου ένα «1»
- ✓ Για κάθε v_j έχω δώσει τιμές στις ελεύθερες. Με αυτές τις τιμές μπαίνω στις εξισώσεις και βρίσκω τις τιμές των βασικών.
- ✓ Τέλος: $\{$ λύσεις της $Ax=0$ $\}=Span(v_1,\ldots,v_k)$.

π.χ. 1 εξίσωση: $x_2+2x_3+x_4=0 \Rightarrow x_2=-2x_3-x_4$

βασική: x_2, ελεύθερες: x_1,x_3,x_4

$$\Rightarrow \{ \text{ λύσεις της } Ax=0 \ \} = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ελεύθερη

Ax=b

Με τους ίδιους γραμμομετασχηματισμούς στο b όπως στο A, το b μεταβάλλεται σε κάποιο c.

$$[A|b]\to[U|c]$$

Στην περίπτωσή μας: $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1\\b_2-2b_1\\b_3+b_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1\\b_2-2b_1\\b_3-2b_2+5b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$

<u>Κατ' αρχάς:</u> Για να υπάρχουν λύσεις πρέπει το b να είναι τέτοιο ώστε για το c που προκύπτει οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στις μηδενικές γραμμές του U να είναι ίσες με 0.

$$\boxed{\text{Εδώ: } c_3 = b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0}$$

Δηλαδή: το σύνολο των εφικτών b (, που εξ ορισμού είναι το span των στηλών,) δεν είναι όλος ο $\mathbb{R}^3$, αλλά μόνο εκείναι τα b που ικανοποιούν τον παραπάνω περιορισμό. Αυτός μας λέει ότι πρόκειται για τα b που είναι κάθετα στο $(1 \ \ -2 \ \ 5)^T$. Πρόκειται λοιπόν για ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$ που περνά από το 0. Αυτό το ξέραμε και λόγω του ότι δυο από τις στήλες του A είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Άρα των span των στηλών στην ουσία είναι span δύο στηλών, άρα επίπεδο.

<u>Γενικώς:</u> Αν r οδηγοί $\Rightarrow m-r$ μηδενικές γραμμές. Άρα χρειάζομαι

$$\boxed{c_{r+1} = c_{r+2} = c_m = 0}$$

Αν αυτοί οι περιορισμοί πληρούνται έχω λύσεις. Ποιες είναι αυτές;

π.χ. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Πάλι λύνω τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές γραμμές του U ώστε να εκφράσω τις βασικές συναρτήσει των ελεύθερων.

$$\begin{matrix} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_3 + 1x_4 = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 1 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_1 = -2 - 3x_2 - x_4 \end{matrix}$$

- Άρα λύσεις τα x της μορφής

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 3x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 1 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underset{x_{ειδική}}{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underbrace{+ x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}_{+\text{λύσεις της } Ax=0}$$

<u>Άρα:</u> $\{$ οι λύσεις της $Ax = b$ $\} = x_{ειδική} + \{$ λύσεις της $Ax = 0$ $\}$

<u>Σημείωση:</u> Το ρόλο της $x_{ειδικής}$ εδώ τον έπαιξε η λύση για την οποία ελεύθερες μεταβλητές = 0. Ωστόσο <u>οποιαδήποτε</u> άλλη λύση της $Ax = b$ μπορεί να παίξει το ρόλο της $x_{ειδικής}$.

<u>Σημείωση:</u> Οι λύσεις της $Ax = b$ είναι ο κατά $x_{ειδική}$ «μετατοπισμένος» μηδενόχωρος του A.

$\Rightarrow$ Οι λύσεις της $Ax = b$ <u>δεν είναι</u> υπόχωρος.

<u>Συμπεράσματα:</u>

Έστω $r =$ αριθμός οδηγών $\Rightarrow n - r$ ελεύθερες μεταβλητές και $m - r$ μηδενικές γραμμές του U.

Αν $m - r =$

- 0 $\Rightarrow$ δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές του U.
  Άρα: δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ύπαρξη λύσης.
  $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Έχω λύση για κάθε } b \in R^m.}$
- > 0
  - Αν κάποιο c_j με $j > r$ είναι $c_j \neq 0$ $\Rightarrow$ <u>δεν έχω λύση</u>.
  - Αν $c_{r+1} = \ldots = c_m = 0$ $\Rightarrow$ <u>υπάρχουν λύσεις</u>.

<u>Αν υπάρχουν λύσεις:</u>

και

$$n-r=\begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{ δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.} \\ & \Rightarrow N(A)=\{0\} \Rightarrow \text{ μία ακριβώς λύση} \\ & \{\text{ λύσεις του } Ax=b\ \} = \{x_{\varepsilon\iota\delta\iota\kappa\acute{\eta}}\} \\ >0 & \\ & \{\text{ λύσεις του } Ax=b\ \} = \{x_{\varepsilon\iota\delta\iota\kappa\acute{\eta}}\} + \underbrace{Span(v_1,\dots,v_{n-r})}_{N(A)} \end{cases}$$

10. Γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις και διάσταση

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.3)

Γραμμική Ανεξαρτησία

Έστω k στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V: $v_1,\dots,v_k \in V$. Τότε για οποιαδήποτε $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in R$ έχουμε $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in V$.

Επίσης:

Αν $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$.

Ανεξαρτησία των $\{v_1,\dots,v_k\}$ έχουμε αν αυτός <u>είναι ο μόνος</u> γραμμικός συνδυασμός τους που ισούται με 0.

<u>**Ορισμός:**</u> $\{v_1,\dots,v_k\} \in V$ ανεξάρτητα

$$\Leftrightarrow$$

αν από $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ έπεται ότι: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

<u>**Παρατήρηση:**</u> $\{v_1,\dots,v_k\}$ ανεξάρτητα ισοδυναμεί με:

Δε μπορώ να γράψω ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων.

π.χ. αν $v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k \Rightarrow v_1 - \mu_2 v_2 - \dots - \mu_k v_k = 0$ ενώ $\mu_j \neq 0$.

Παραδείγματα:

- $x, y \in R^n$ εξαρτημένα $\Leftrightarrow$ x, y συγγραμικά.
- $x, y, z \in R^n$ εξαρτημένα $\Leftrightarrow$ κάποιο από αυτά ανήκει στο επίπεδο που δίνουν τα άλλα δύο και το 0: π.χ. $z \in span(x, y)$.

- Αν κάποιο από τα $v_i = 0$, τότε εξαρτημένα.
- Οι στήλες τριγωνικού πίνακα με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο είναι ανεξάρτητες:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{bmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τελευταία εξίσωση $\Rightarrow \lambda_n = 0$.

Αντικαθιστώ αυτό στην προτελευταία $\Rightarrow \lambda_{n-1} = 0$

$\vdots$

- Παρομοίως για τις γραμμές τριγωνικού πίνακα,
- καθώς και για τις γραμμές (ή τις στήλες) κλιμακωτού που <u>περιέχουν οδηγούς</u>.

> Οι r γραμμές με οδηγούς κλιμακωτού είναι ανεξάρτητες.
>
> Οι r στήλες με οδηγούς κλιμακωτού είναι ανεξάρτητες.

Μέθοδος για να ελέγξω αν $v_1, \ldots, v_k \in R^n$ είναι ανεξάρτητα

> Σχηματίζω τον $n \times k$ πίνακα $V = [v_1 | \ldots | v_k]$ και βρίσκω τον μηδενόχωρο $N(V)$. Αν αυτός αποτελείται μόνο από $\{0\}$, τα $v_1, \ldots, v_k$ είναι ανεξάρτητα. (Δηλαδή όταν δεν έχω ελεύθερες μεταβλητές).

Διότι:

$$Vx = 0 \Rightarrow x = 0$$

ισοδυναμεί με:

$$\boxed{x_1 v_1 + \ldots + x_k v_k = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_k = 0}$$

που είναι ακριβώς ορισμός της ανεξαρτησίας.

Παράγοντας ένα υπόχωρο

Ορισμός. Ένα σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_k\} \in U$ **παράγει** ένα υπόχωρο U όταν οποιοδήποτε στοιχείο του U γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_k$.

Τότε θα έχουμε :

$$\boxed{U = Span(v_1, \ldots, v_k)}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Ένα στοιχείο του U μπορεί να γράφεται **με (ενδεχομένως) διαφορετικούς τρόπους** ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_k$.

π.χ.

- Έστω $v \,\&\, w$ δύο συγγραμικά διανύσματα και $U = Span(v, w)$. Τότε οποιοδήποτε $x \in U$ γράφεται είτε ως πολλαπλάσιο του v, είτε ως πολλαπλάσιο του w (είτε και με άλλους άπειρους τρόπους).
- Παρομοίως αν v, w, z ανήκουν στο ίδιο επίπεδο που περνά από 0 και $U = Span(v, w, z)$.

<u>Ορισμός:</u> Βάση ενός υπόχωρου U ονομάζεται ένα σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_k\} \in U$ που έχουν τις εξής δύο ιδιότητες:

1) Είναι ανεξάρτητα

2) Παράγουν τον U.

Σημείωση:

Ένα $v \in U$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης.

Για κάθε υπόχωρο υπάρχουν άπειρες βάσεις.

π.χ.

- Αν U ένα επίπεδο: τότε οποιαδήποτε δύο μη – συγγραμικά διανύσματα είναι βάση του.
- Οι στήλες ενός μη – ιδιόμορφου $n \times n$ πίνακα είναι βάση του R^n:

  Διότι: Το $Ax = b$ έχει πάντα λύση (άρα παράγουν) και

  Το $Ax = 0$ μόνο τη μηδενική (άρα είναι ανεξάρτητες)

Διάσταση

<u>Πρόταση και ορισμός</u>: Δύο βάσεις ενός υπόχωρου έχουν τον <u>ίδιο αριθμό</u> διανυσμάτων, τη <u>διάσταση</u> του U (που επομένως χαρακτηρίζει τον U). Γράφουμε $\dim(U)$.

Απόδειξη. Βλέπε σημειώσεις από μάθημα και πηγή

Έστω δύο βάσεις του ίδιου υπόχωρου με διαφορετικό αριθμό στοιχείων. (Θα οδηγήσουμε σε αντίφαση).

$v_1, \ldots, v_m$ και $w_1, \ldots w_n$

Έστω $m < n$.

Αφού $v_1, \ldots, v_m$ βάση θα μπορώ να γράψω

$$w_j = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{mj} v_m \text{ με κατάλληλα } a_{ij}$$

για $j = 1, \ldots, n$

με $V = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_m\right)$, $W = \left(w_1 \middle| \dots \middle| w_n\right)$ και $A = [a_{ij}]$

θα έχω ότι $\boxed{W = VA}$

Αφού όμως $m<n \Rightarrow \exists\, c \neq 0 : Ac = 0 \Rightarrow VAc = 0$

$\Rightarrow Wc = 0$

Αυτό όμως είναι αντίφαση με την ανεξαρτησία των $w_1, \dots, w_n$.

Αποδεικνύεται ότι :

Αν η διάσταση του $V = k$, τότε

- αν έχω περισσότερα από k διανύσματα: θα είναι εξαρτημένα
- αν έχω λιγότερα από k : δεν θα παράγουν τον V
- αν έχω περισσότερα από k, και αυτά παράγουν τον V, τότε αποκλείοντας μερικά (κατάλληλα) φθάνω σε βάση
- αν έχω λιγότερα από k, και αυτά είναι ανεξάρτητα, τότε μπορώ να συμπληρώσω σε βάση
- αν έχω ακριβώς k, τότε ανεξαρτησία $\Rightarrow$ παραγωγή και παραγωγή $\Rightarrow$ ανεξαρτησία: αν έχω τη μία ιδιότητα θα έχω και την άλλη.

11. Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.4) Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας.

Έχουμε γνωρίσει ήδη δύο υπόχωρους που συνδέονται με τον A:

* το χώρο στηλών του A = Span (των στηλών του A) $\subset \mathbb{R}^m$
Συμβολίζεται με $R(A)$.
* τον μηδενόχωρο του A = $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$
Συμβολίζεται με $N(A)$.

Προσθέτουμε άλλους δύο υπόχωρους του A:

• το χώρο γραμμών του A = Span{γραμμών του A}
= Span (στηλών του A^T) = χώρος στηλών του $A^T \subset \mathbb{R}^n$
Συμβολίζεται με $R(A^T)$

• αριστερό μηδενόχωρο του A = μηδενόχωρο του $A^T \subset \mathbb{R}^m$
$N(A^T)$

Στόχος: βρες βάσεις για τους 4 υπόχωρους του A.
χρησιμοποιώντας την διάσπαση $PA = L \cdot U$.

~~Πρόβ~~

Παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

---

1. βάση του χώρου γραμμών $R(A^T)$

Παρατήρηση ότι

- οι γραμμές του U είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του A. (εκ κατασκευής).

$\Rightarrow$ Span (γραμμών U) $\subset$ Span (γραμμών A)

- όμως οι γραμμομετασχηματισμοί $A \to U$ μπορούν να αντιστραφούν και επομένως:

  οι γραμμές του A είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του U

$\Rightarrow$ Span (γραμμών A) $\subset$ Span (γραμμών U)

και άρα: $\boxed{R(A^T) = R(U^T)}$

Άρα αρκεί να βρω βάση του $R(U^T)$

- Πάρε ως βάση τις $\boxed{\text{μη μηδενικές γραμμές του } U}$

αυτές θα είναι ανεξάρτητες

- Άρα θα είναι βάση του χώρου γραμμών του U
- Άρα θα είναι βάση " " " " A.

Τέλος: διάσταση του χώρου γραμμών του $A = r =$ αριθμός των οδηγών $=$ αριθμός μη μηδενικών γραμμών.

2. Μηδενόχωρος του A.

$$= \{x \mid Ax=0\} = \{x \mid Ux=0\}$$

Άρα $N(A) = N(U)$.

Βάση των $N(A)$ και $N(U)$: τα $\underbrace{v_1, \dots, v_{n-r}}$ $n-r$ διανύσματα που κατασκευάζω όταν λύνω το σύστημα (όπου θέτω τις ελεύθερες διαδοχικά 1 & 0 και τις βασικές από τις εξισώσεις).

Έχουμε ότι $N(A) = N(U) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{n-r})$.

Τα $v_1, \dots, v_{n-r}$ είναι ανεξάρτητα:

$\boxed{\dim N(A) = n-r = \text{αριθμός ελεύθερων μεταβλητών}}$

$$c_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}}_{v_2} + \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

3. Χώρος στηλών του A.

Προσοχή: εδώ μπορεί $R(A) \neq R(U)$ μόνο

π.χ. στο παράδειγμά μας ο $R(U)$ έχει στοιχεία που η τελευταία συντεταγμένη είναι 0

δεν ισχύει το ίδιο για τον $R(A)$.

Όμως: οι στήλες του U αναπαράγουν τις εξαρτήσεις των στηλών του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 3a_1$ $\quad = a_1 + \frac{1}{3}a_3$ $\quad = 3u_1$ $\quad = u_1 + \frac{1}{3}u_3$.

Έτσι:

κάποιες στήλες του A είναι εξαρτημένες $\iff$ οι αντίστοιχες στήλες του U είναι εξαρτημένες

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$\exists x \neq 0$, με συντεταγμένες μηδέν για τις στήλες που δεν με ενδιαφέρουν τέτοιο που $Ax = 0$. $\iff$ $Ux = 0$

<u>Όμως</u>: Ανεξάρτητες είναι οι στήλες του U που περιέχουν οδηγούς (η πρώτη & η τρίτη)

<u>Άρα</u>: Οι <u>αντίστοιχες στήλες του A</u> είναι ανεξάρτητες (η πρώτη και η τρίτη).

$\Rightarrow$ Αυτές θα αποτελούν και βάση του $R(A)$.

<u>Έχουμε</u>: $\boxed{\dim R(A) = r = \text{αριθμόν οδηγών}}$

και επομένως <u>αριθμός ανεξάρτητων στηλών A</u>

= <u>αριθμός ανεξάρτητων γραμμών A</u>

4. Αριστερός Μηδενόχωρος του A

$N(A^T)$ είναι ο μηδενόχωρος του A^T, δηλαδή τα $\{y \mid A^T y = 0\}$

$= \{y \mid y^T A = 0\}$, εξ ου και <u>αριστερός</u> μηδενόχωρος

Εδώ πρώτα θα βρούμε τη διάσταση $\dim N(A^T)$.

Για τον A γνωρίζουμε

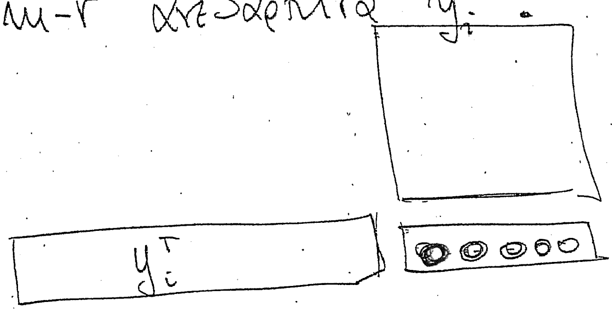
$$\underbrace{\#\text{ελεύθερων μεταβλητών}}_{\dim N(A)}^{n-r} + \underbrace{\#\text{βασικών μεταβλητών}}_{r} = \#\text{στηλών} = n$$

$$\dim N(A) + \dim R(A) = \#\text{στηλών}$$

Εφαρμόζοντας την ίδια ισότητα στον A^T παίρνουμε

$$\dim N(A^T) = \underbrace{m}_{\#\text{στηλών}} - \dim R(A^T) = m - r.$$

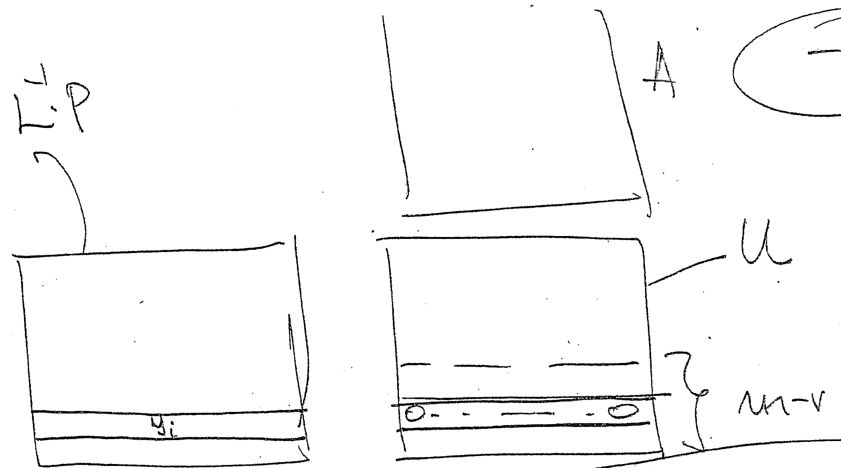
<u>Άρα</u>: ψάχνω $m-r$ ανεξάρτητα y_i : $y_i^T A = 0$.



<u>Όμως</u>: από $PA = LU$ παίρνουμε $L^{-1}P\, A = U =$

$$\begin{bmatrix} * & & * \\ & & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \Big\} m-r$$

ή με το μνημονικό κανόνα:



<u>Βλέπουμε ότι</u>: $\boxed{\text{οι } m-r \text{ τελευταίες γραμμές του } L^{-1}P}$ παίζουν τον ρόλο των $y_1, \dots, y_{m-r}$ που ψάχνουμε.

Αυτές αποτελούν και βάση του αριστερού μηδενόχωρου διότι είναι <u>ανεξάρτητα</u>: οι γραμμές τριγωνικού με 1 στη διαγώνιο είναι ανεξάρτητες; το ίδιο και του L^{-1} και ο πολ/μός με P από δεξιά εναλλάσσει στήλες και δε χαλάει την ανεξαρτησία των γραμμών.

<u>Θεμελιώδες Θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας (Μέρος Ι)</u>

Αν A m×n πίνακας ~~κάτω~~ με r οδηγούς

1. $\dim R(A) = r$
2. $\dim N(A) = n-r$
3. $\dim R(A^T) = r$
4. $\dim N(A^T) = m-r$

12. Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.6)

Έστω δύο σύνολα X και Y. Μια <u>συνάρτηση</u> ή <u>απεικόνιση</u> ή <u>μετασχηματισμός</u> f του X στο Y (Γράφουμε $f: X \to Y$) είναι μια αντιστοίχηση ενός στοιχείου $y \in Y$ <u>για κάθε στοιχείο</u> $x \in X$. (Σε κάθε $x \in X$ αντιστοιχούμε μόνο ένα $y \in Y$).

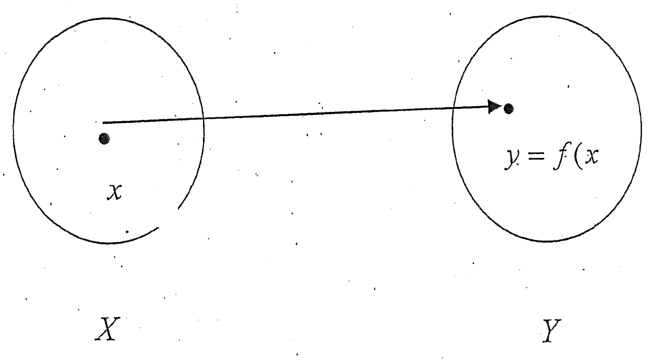
Γράφουμε

$$\boxed{f: x \to y \text{ ή } y = f(x).}$$

Το y ονομάζεται <u>εικόνα</u> του x.

Το X ονομάζεται <u>πεδίο ορισμού</u> της f και το Y <u>πεδίο τιμών</u> της f.

Καμμια φορά ζωγραφίζουμε την αντιστοίχηση με βελάκια.



Το σύνολο $f(x) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ με } y = f(x)\} \subset Y$ ονομάζεται <u>εικόνα της f</u>.

(Είναι τα $y \in Y$ στα οποία καταλήγει ένα τουλάχιστον βελάκι).

Ο μετασχηματισμός $x \to Ax$

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε μπορώ να ορίσω ένα μετασχηματισμό $f (= f_A)$.

$$\boxed{f_A: R^n \to R^m}$$

ως εξής: στο $x \in R^n$ αντιστοιχώ το $y = Ax \in R^m$

$$f_A : x \to y = f(x) := Ax$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

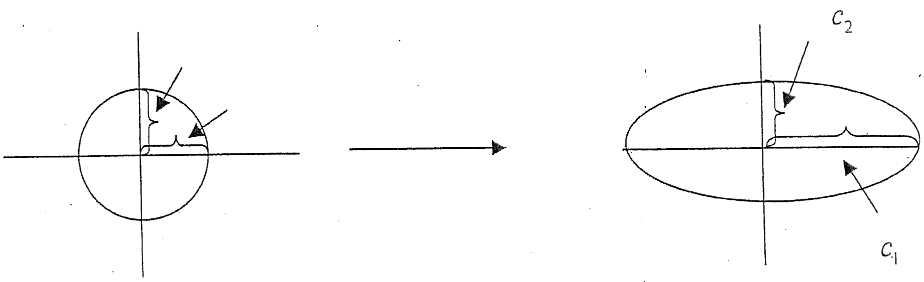
$$R^n \qquad\qquad\qquad R^m$$

<u>Δηλ.:</u> η εικόνα του x είναι το γιν του με το

Παραδείγματα:

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 x_1 \\ c_2 x_2 \end{pmatrix}$$

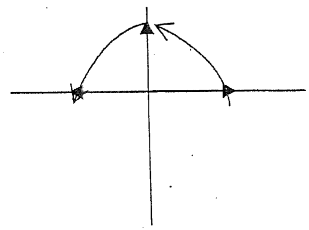
Διαστέλλει τον R^2 κατά c_1 στην κατεύθυνση του πρώτου άξονα και κατά c_2 στου δεύτερου.



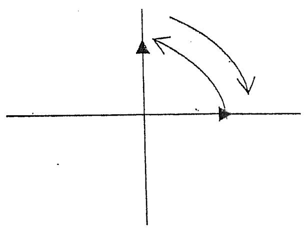
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{τότε } A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Περιστρέφει τον R^2 κατά 90°



Αντανάκλαση στην ευθεία 45°



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Προβολή στον άξονα των x_1

Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται «επί»

αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο που $f(x) = y$, αν δηλαδή η εικόνα της f $f(x)$ ταυτίζεται με το Y. (Δηλ.: **Καταλήγει βελάκι σε κάθε στοιχείο του** Y).

Έχουμε:

Η $f_A : R^n \to R^m$ είναι «επί»

$\Leftrightarrow$ το $Ax = y$ έχει λύση για κάθε $y \in R^m$

$\Leftrightarrow$ ο $R(A) = R^m \Leftrightarrow \dim\left(R(A)\right) = \dim\left(R^m\right)$

$\Leftrightarrow \boxed{r = m}$ όπου r η τάξη του πίνακα

Άρα: η f_A είναι «επί» $\Leftrightarrow \boxed{r = m}$

Η παραπάνω επιχειρηματολογία δείχνει και ότι έχουμε:

$f_A(X) = R(A)$, δηλαδή ο $R(A)$ είναι η εικόνα της f_A.

Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ λέγεται «μονοσήμαντη»

αν κάθε $x \in X$ απεικονίζεται σε διαφορετικό $y \in Y$, δηλαδή, αν x και $x' \in X$ έχουν την ίδια εικόνα, πρέπει να ταυτίζονται:

αν $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

(Δηλ.: **Αν σε κάποιο** $y \in Y$ **καταλήγει βελάκι, θα είναι μόνο ένα**).

Η $f_A : R^n \to R^m$ είναι μονοσήμαντη $\Leftrightarrow$

$x \mapsto Ax$ (από $Ax = Ax' \Rightarrow x = x'$) $\Leftrightarrow$

(από $A(x - x') = 0 \Rightarrow x - x' = 0$) $\Leftrightarrow$

δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές $\Leftrightarrow$

$N(A) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(N(A)) = 0 \Leftrightarrow$

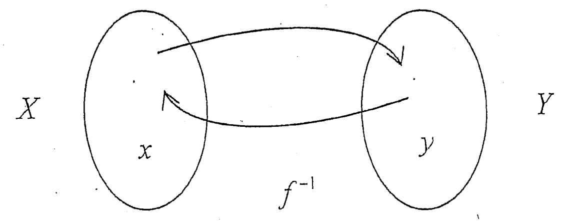
$\boxed{r = n}$

Άρα: η f_A είναι «μονοσήμαντη» $\Leftrightarrow \boxed{r = n}$

Αν $f: X \rightarrow Y$ λέγεται «αμφιμονοσήμαντη»

αν είναι «επί» και «μονοσήμαντη». Τότε μπορώ να ορίσω την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: Y \rightarrow X$, ως εξής:

αν $y = f(x)$ τότε $f^{-1}(y) = x$ ή και $\boxed{f^{-1}\left(f(x)\right) = x}$



Για να αντιστρέφεται η f_A χρειάζομαι «επί» $(r = m)$ και «μονοσήμαντη» $(r = n)$.
Άρα $r = m = n$ και επομένως ο A είναι αναγκαστικά μη – ιδιόμορφος.

<u>Ερώτηση:</u> Υπάρχει $B_{n \times n}$ τέτοιος που «να δίνει» την f_A^{-1}

<u>Δηλαδή:</u> $f_A^{-1}(y) = f_B y = B \cdot y$ που σημαίνει: θέλω B: $B \cdot Ax = x$.

ΝΑΙ	$B = A^{-1}$
Η αντίστροφη συνάρτηση f_A^{-1} δίνεται από τον αντίστροφο πίνακα $f_{A^{-1}}$	

$f_A^{-1}(y) = f_A^{-1} y := A^{-1} \cdot y$

και όντως αν $y = Ax$ τότε

$A^{-1} \cdot y = A^{-1} \cdot Ax = x$

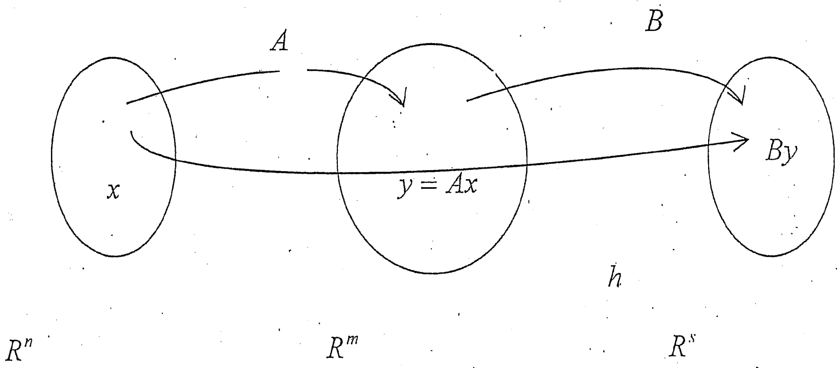
Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω $f_A : R^n \to R^m$ και $f_B : R^m \to R^s$

$x \mapsto Ax$ $\qquad$ $y \mapsto By$

με $A_{m\times n}$ και $B_{s\times m}$

Ορίζουμε την σύνθεση των συναρτήσεων f_A και f_B ως μια καινούρια συνάρτηση $h = f_B \circ f_A$ με $h : R^n \to R^s$ και $h(x) := f_B(f_A(x))$.



Ποιος πίνακας «δίνει» την h;

<u>Δηλαδή:</u> Υπάρχει C τέτοιος που $h(x) = f_c(x) = C \cdot x$

<u>ΝΑΙ:</u> $h(x) = f_B(f_A(x)) = f_B(A \cdot x) = B \cdot (A \cdot x)$

Άρα $\boxed{C = B \cdot A}$

Η σύνθεση συναρτήσεων δίνεται από τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

<u>Ορισμός:</u> Ένας μετασχηματισμός f μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων V, W $f:V \to W$ λέγεται γραμμικός αν

$$f(0)=0$$

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall x,y \in V$$

$$f(\lambda x)=\lambda f(x) \quad \forall x \in V, \ \lambda \in R$$

Παρατήρηση: Για ένα $m \times n$ πίνακα A η απεικόνιση f_A είναι γραμμική:

$A \cdot 0 = 0$

$A(x+y) = Ax + Ay$

και $A(\lambda x) = \lambda Ax$

Βοηθητική Πρόταση.

Αν γνωρίζω εικόνες της βάσης τότε γνωρίζω όλο το μετασχηματισμό:

'Εστω f κάποιος γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ δύο διανυσματικών χώρων V, W: $f:V \to W$ και $v_1,\ldots,v_k$ μία βάση του V. Αν γνωρίζω τις εικόνες $f(v_1),\ldots,f(v_k)$ τότε μπορώ να βρώ την εικόνα οποιουδήποτε $v \in V$, και επομένως γνωρίζω όλο τον f.

Απόδειξη:

'Εστω $v \in V$. Τότε θα υπάρχουν $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ τέτοια που $v=\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_k v_k$. Τότε όμως, λόγω της γραμμικότητας της f, παίρνουμε:

$f(v)=f(\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_k v_k)=\lambda_1 f(v_1)+\ldots+\lambda_k f(v_k)$ με γνωστά $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ και $f(v_1),\ldots,f(v_k)$.

<u>Πρόταση</u> : Κάθε γραμμικό μετασχηματισμό «τον δίνει» ένας πίνακας

Έστω **οποιοσδήποτε** γραμμικός μετασχηματισμός $f:R^n \to R^m$. Τότε θα υπάρχει $A_{m\times n}$ τέτοιος που $f(x)=Ax$, δηλαδή $f \equiv f_A$.

Αν γνωρίζουμε τις εικόνες $y_i = f(e_i)$ των στοιχείων της κανονικής βάσης $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ (με το 1 στην i-συντεταγμένη) τότε <u>ο πίνακας A κατασκευάζεται ως</u> $A=[y_1|y_2|\cdots|y_n]$.

Απόδειξη: Για τα στοιχεία της βάσης $e_1,\ldots,e_n$ όντως έχουμε $f_A(e_i) = Ae_i = y_i = f(e_i)$. Και αφού οι δύο μευασχηματισμοί συμπίπτουν για τα στοιχεία της βάσης, σύμφωνα με τη προηγγούμενη πρόταση συμπ'ιπτουν και σε όλο το V.

Πρόταση. Αν ο f δίνεται με τις εικόνες άλλης βάσης πώς κατασκευάζω τον A;

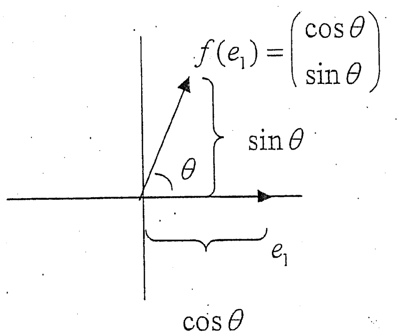
Αν για κάποιο γραμμικό μετασχηματισμός $f: R^n \to R^m$ γνωρίζουμε τις εικόνες $y_i = f(v_i)$ των στοιχείων κάποιας βάσης $v_1,\ldots,v_n$ του R^n τότε ο πίνακας A τέτοιος που $f(x) = Ax$ κατασκευάζεται ως $\boxed{A = YV^{-1}}$, όπου $Y = [y_1|y_2|\ldots|y_n]$ και $V = [v_1|v_2|\ldots|v_n]$.

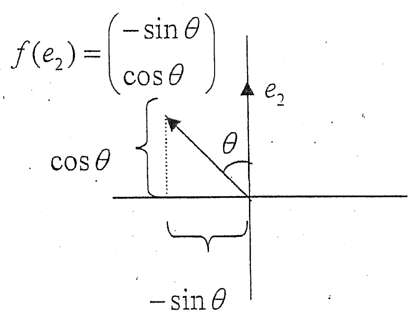
Απόδειξη

Θέλω A τέτοι που $Av_i = y_i$. Αυτό ισοδυναμεί με (μνημονικός κανόνας) $AV = Y$, που συνεπάγεται $\boxed{A = YV^{-1}}$.

π.χ.

Η απεικόνιση f «στροφή κατά γωνία θ»





άρα $A = [f(e_1)|f(e_2)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

και η απεικόνιση προβολή στην L_a $P_a(x)=\dfrac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a$

$$f(e_1)=\frac{\langle a,e_1\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a=\begin{pmatrix}\dfrac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2}\\[2mm]\dfrac{a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\end{pmatrix}\ \&$$

$$f(e_2)=\frac{\langle a,e_2\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a=\begin{pmatrix}\dfrac{a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\\[2mm]\dfrac{a_2^2}{a_1^2+a_2^2}\end{pmatrix}$$

άρα $A=\dfrac{1}{a_1^2+a_2^2}\begin{bmatrix}a_1^2 & a_1a_2\\ a_1a_2 & a_2^2\end{bmatrix}$

Συγκρίνετε με

$$P_a(x)=\frac{\langle a,x\rangle}{\langle a,a\rangle}\cdot a=\frac{a^Tx}{a^Ta}\cdot a=\frac{aa^T}{a^Ta}\cdot x$$

Στην **αντανάκλαση** $H_a(x)$ έχουμε $H_a(x)=x+2(P_a(x)-x)=2P_a(x)-x=\left[2\dfrac{aa^T}{a^Ta}-I\right]x$

άρα $A=\dfrac{1}{a_1^2+a_2^2}\begin{bmatrix}2a_1^2-1 & 2a_1a_2\\ 2a_1a_2 & 2a_2^2-1\end{bmatrix}$

13. Ορθογώνιοι υπόχωροι

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 3.1)

Υπενθύμιση: για $x,y\in\mathbb{R}^n$ λέμε $x\perp y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle=0$.

Πρόταση: Έστω $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{R}^n$ με $\langle v_i,v_j\rangle=0$ για $i\neq j$
με $v_i\neq 0$

Τότε τα $v_1,\dots,v_k$ είναι ανεξάρτητα

Απόδειξη: Έστω $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_k v_k=0$

$$\Rightarrow v_j^T\cdot(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_k v_k)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \underbrace{v_j^T v_1}_{0} + \lambda_2 \underbrace{v_j^T v_2}_{0} + \dots \lambda_j v_j^T v_j + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_j \|v_j\|^2=0 \Rightarrow \lambda_j=0 \text{ καθώς } v_j\neq 0$$

Παρόμοια για οποιοδήποτε $j \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_k=0$.

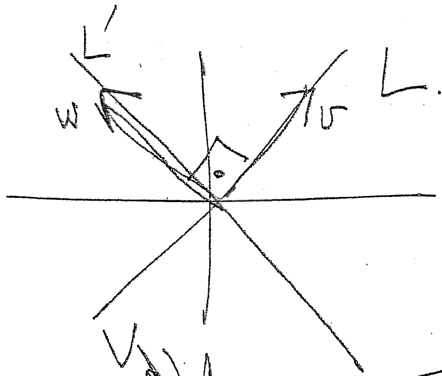
Θέλουμε να ορίσουμε πότε δύο ολόκληροι υπόχωροι θα είναι ο ένας ορθογώνιος στον άλλο.

Ορισμός: Όταν κάθε στοιχείο του ενός είναι ορθογώνιο σε κάθε στοιχείο του άλλου!

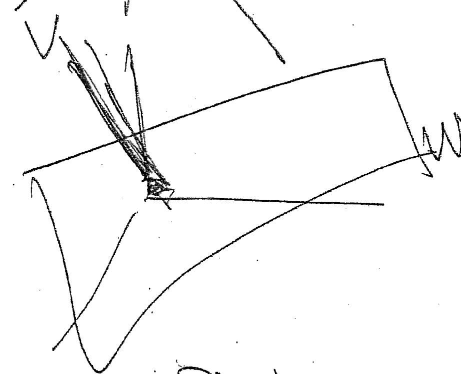
$V, W \subset \mathbb{R}^n$ υπόχωροι. Θα λέμε V ορθογώνιος στο W

$V \perp W \iff \forall v \in V$ και $\forall w \in W$ έχουμε $v \perp W$.

π.χ. στον $\mathbb{R}^2$.



στον $\mathbb{R}^3$



μιά ευθεία πού περνά από τό O με τό ~~α~~ κάθετο επίπεδο που περνά από τό O.

στον $\mathbb{R}^3$ δύο επίπεδα δεν μπορούν να είναι ορθογώνια διότι έχουν ως τομή μιά ευθεία και για να είναι τα επίπεδα ορθογώνια μεταξύ τους θα έπρεπε όλα τα στοιχεία της ευθείας αυτής να είναι κάθετα στον εαυτό τους.

__Πρόταση__ Αν V, W δύο υπόχωροι και $v_1, \dots, v_k$ βάση V και $w_1, \dots, w_r$ βάση W και $v_i \perp w_j$. Τότε $V \perp W$.

__Απόδ.__ Αν $v \in V$, $w \in W$ $\Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ και $w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_r w_r$

$$\Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \underbrace{\langle v_i, w_j \rangle}_{=0} = 0.$$

Παράδειγμα στον $\mathbb{R}^4$. $P = \overline{\text{Span}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

$L = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\4\\5\end{pmatrix}\right)$ κ' $L' = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-5\\4\end{pmatrix}\right)$.

εύκολα ελέγχουμε $P \perp L$, $P \perp L'$ και $L \perp L'$.

Πρόταση Έστω $A_{m\times n}$. Τότε

α) χώρος γραμμών A $\perp$ μηδενόχωρο του A $\subset \mathbb{R}^n$

β) χώρος στηλών A $\perp$ αριστερό μηδενόχωρο του $A \subset \mathbb{R}^m$

Απόδειξη α). Αν $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow \langle a^i, x\rangle = 0 \ \forall\, i = 1,\dots,m$

Άρα, από τη πρόταση μας και $\langle v, x\rangle = 0 \ \forall\, v \in R(A^T)$.

β) Αν $y \in N(A^T) \Rightarrow y^T A = 0 \Rightarrow \langle y^T, a_i\rangle = 0 \ \forall\, i = 1,\dots,n$.

Άρα και $\langle y, z\rangle = 0 \ \forall\, z \in R(A)$.

Σημείωση: Έστω V, W δύο ορθογώνιοι υπόχωροι $V \perp W$. Μήπως υπάρχουν εκτός από τα στοιχεία του W και κάποια άλλα πού να είναι ορθογώνια στον V ή μήπως (αντίθετα) ο W περιέχει όλα τα στοιχεία που είναι κάθετα στο V.

π.χ στο παράδειγμά μας έχουμε $P \perp L$, αλλά ο L δε περιέχει όλα τα στοιχεία που είναι κάθετα στο P: υπάρχουν και τα στοιχεία της L' π.χ

Ορισμός Έστω $V \subset \mathbb{R}^n$ υπόχωρος. Ορίζουμε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του V, που το συμβολίζουμε με $V^{\perp}$, ως εκείνο τον υπόχωρο που περιέχει όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που είναι $\perp$ στο V, δηλαδή:

$$V^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp v, \ \forall v \in V \}$$

Αν έχω δύο υποχώρους $\subset \mathbb{R}^n$ και γνωρίζω ότι είναι ορθογώνια μεταξύ τους, πως μπορώ να ξέρω αν είναι ο ένας ορθογώνιο συμπλήρωμα του άλλου;

Απάντηση: Είναι ορθογ. συμπλ. αν οι διαστάσεις τους αθροίζονται στο n, λέει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση Έστω V, W υπόχωροι με $V \perp W$ και $\dim(V) + \dim(W) = n$.

Τότε

α) αν $v_1, \ldots, v_r$ βάση του V και $v_{r+1}, \ldots, v_n$ βάση του W θα ισχύει ότι $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$ βάση του $\mathbb{R}^n$

β) $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists v \in V$ και $w \in W$: $x = v + w$.

γ) $W = V^{\perp}$ και $V = W^{\perp}$.

Απόδειξη α) Αρχή να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητα.

(διότι έχουμε το "σωστό" αριθμό).

Έστω $\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r}_{=:x} + \underbrace{\lambda_{r+1} v_{r+1} + \dots + \lambda_n v_n}_{=:y} = 0.$

δηλ. $x+y=0$

$\Rightarrow \|x+y\|^2=0 \Rightarrow \|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle=0$

αλλά καθώς $x\in V$ και $y\in W \Rightarrow \langle x,y\rangle=0$ εξ υποθέσεως

$\Rightarrow \|x\|^2+\|y\|^2=0 \Rightarrow \|x\|^2=0$ και $\|y\|^2=0$

$\Rightarrow x=0$ και $y=0$.

Άρα από $x=0 \Rightarrow \lambda_1 v_1+\dots+\lambda_r v_r=0$ και

καθώς $v_1,\dots,v_r$ ανεξάρτητα $\Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_r=0$

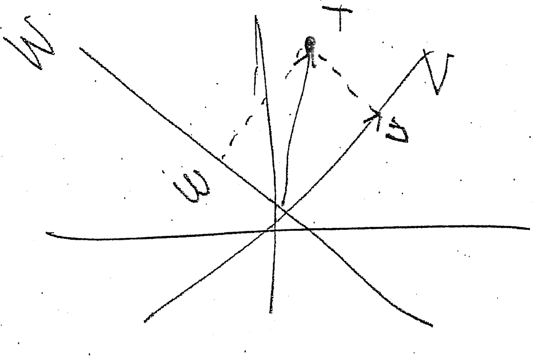
Παρόμοια $\lambda_{r+1}=\dots=\lambda_n=0$. ΟΚ✓.

β) Αφού από α) τα $v_1,\dots,v_n$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall x\in \mathbb{R}^n$ γράφεται ως

$$x = \underbrace{\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_r v_r}_{v:=\;\in V} + \underbrace{\lambda_{r+1} v_{r+1}+\dots+\lambda_n v_n}_{w:=\;..\;\in W}$$

~~Θέτουμε~~



$v = P_V x$

και $w = P_W x$

γ) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $x \perp V$. Θα δείξουμε $x \in W$.

από β) γράφουμε το x ως $x = v + w$ με $v \in V$, $w \in W$

από $x \perp V$ έπεται όμως $v = 0$ (παίρε $\langle x, v\rangle = \langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle = \langle v, v\rangle \overset{!}{=} 0 \Rightarrow v = 0$.)

Άρα $x = w \in W$.

Θεμελιώδες Θεώρημα της ΓΑ (Μέρος ΙΙ).

α) $N(A) = (\text{χώρος γραμμών})^{\perp}$.

β) $R(A) = (\text{αριστερός μηδενόχωρος})^{\perp}$.

<u>Απόδειξη</u>: οι διαστάσεις αθροίζονται

$$\dim N(A) + \dim R(A^T) = n.$$

$$\dim N(A^T) + \dim R(A) = m.$$

14. Προβολές και προσεγγίσεις ελαχίστων τετραγώνων

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 3.3)

Έστω ένα σύστημα με «πολλές» εξισώσεις και λίγους αγνώστους $Ax = b$ με $A_{m\times n}$ και $m \gg n$. Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα έχει λύση αν $b \in R(A)$.

Το πρόβλημα για n=1

Έτσι π.χ. αν $n = 1$, δηλ. ο A είναι μια στήλη a και $x \in R$ το σύστημα έχει λύση αν $b \in Span(a)$.

Μπορώ να κάνω «κάτι» αν $b \notin Span(a)$;

$$\boxed{A = a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}}$$

Ιδέα: Αφού $Ax - b = 0$ αδύνατο, βρες τουλάχιστον $\overline{x}$ τέτοιο ώστε το $A\overline{x} - b$ να είναι όσο πιο «κοντά στο 0» γίνεται, δηλαδή να ελαχιστοποιείται το $\| A\overline{x} - b \|$.

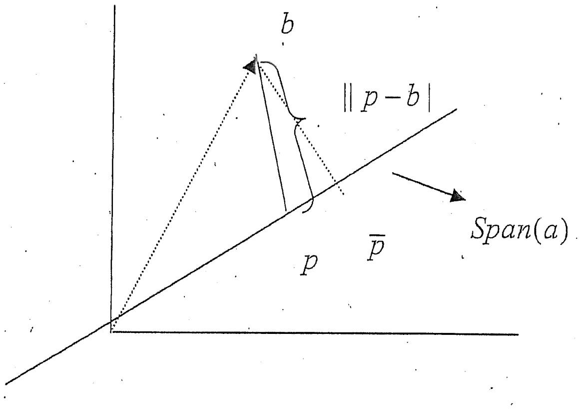
$$\boxed{\text{Βρες } \overline{x} : \| A\overline{x} - b \| \le \| Ax - b \| \ \forall x \in R}$$

Αν θέσω $p = Ax$ τότε $p \in Span(a)$ και αν $\overline{p} = A\overline{x}$ τότε και $\overline{p} \in Span(a)$. Το πρόβλημά μου, λοιπόν, μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί:

$$\boxed{\text{Βρες } \overline{p} \in Span(a) : \| \overline{p} - b \| \le \| p - b \| \ \forall p \in Span(a)}$$

ή με λόγια: βρες εκείνο το σημείο $\overline{p}$ της ευθείας $Span(a)$ που να ελαχιστοποιεί την απόστασή του από το b (συγκρινόμενο με την απόσταση του b με άλλα σημεία p της $Span(a)$).

Σχηματικά:



Γεωμετρική λύση: $\overline{p}$ η προβολή του b στο $Span(a)$.

Αλγεβρική λύση: Θέτω $E(x)=\| Ax-b \|^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i x-b_i)^2$

$$\frac{dE(x)}{dx}=0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}2a_i(a_i x-b_i)=0 \Leftrightarrow x\sum a_i^2-\sum a_i b_i=0 \Rightarrow \overline{x}=\frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i^2}=\frac{<a,b>}{<a,a>}$$

και $\overline{p}=A\overline{x}=\frac{<a,b>}{<a,a>}a=P_a x$

Ίδιο πρόβλημα για n=2

$$A=[a_1 \mid a_2],\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

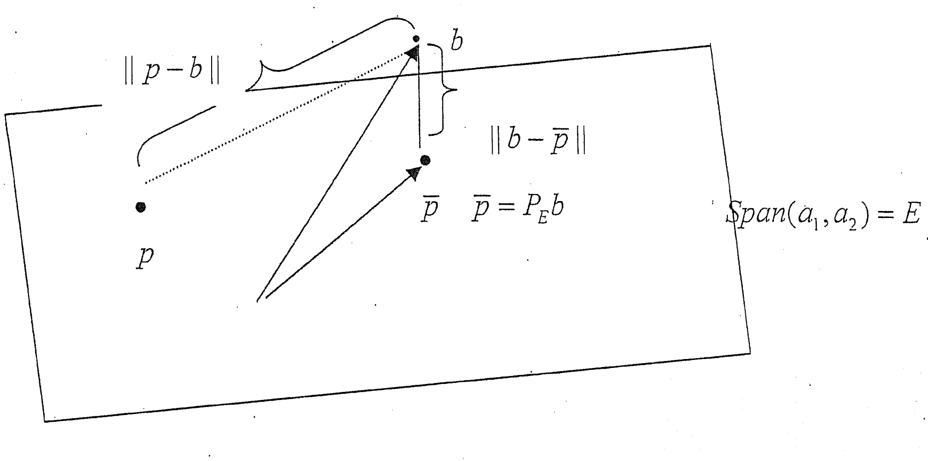
Βρες $\overline{x}=\begin{pmatrix}\overline{x}_1\\\overline{x}_2\end{pmatrix}:\| A\overline{x}-b \| \le \| Ax-b \|\ \forall x\in R^2$

Καθώς $Ax=x_1a_1+x_2a_2\in Span(a_1,a_2)=:E$ και θέτοντας $\overline{p}=A\overline{x}\in E$ και $p=Ax\in E$ το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα:

Βρες $\overline{p}\in E=Span(a_1,a_2):\| \overline{p}-b \| \le \| p-b \|\ \forall p\in E$

Ή: Βρες εκείνο το σημείο $\overline{p}$ του E που να έχει ελάχιστη απόσταση από το b (συγκρινόμενο με την απόσταση του b από άλλα σημεία p του E).

Σχηματικά:



Ίδιο πρόβλημα για οποιοδήποτε n

<u>Γενικώς:</u> $Ax = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n \in R(A) = Span(a_1, \ldots a_n)$

$\boxed{\text{Βρες } \overline{p} \in R(A) : \| \overline{p} - b \| \leq \| p - b \| \; \forall p \in R(A)}$

με $\overline{p} = A\overline{x}$ και $p = Ax$.

Βρες εκείνο το σημείο $\overline{p} \in R(A)$ που να ελαχιστοποιεί την απόσταση από το b.

<u>Απάντηση:</u> Θα είναι η προβολή του b στο $R(A)$, δηλαδή εκείνο το σημείο $\overline{p} \in R(A)$ με $\boxed{b - \overline{p} \perp \text{ σε κάθε στοιχείο του } R(A)}$.

<u>Διότι:</u> Έστω $p \in R(A)$ θα δείξουμε $\| b - p \|^2 \geq \| b - \overline{p} \|^2$

$$\| b - p \|^2 = \| b - \overline{p} + \overline{p} - p \|^2 = \langle (b - \overline{p}) + (\overline{p} - p), (b - \overline{p}) + (\overline{p} - p) \rangle =$$

$$= \| b - \overline{p} \|^2 + \| \overline{p} - p \|^2 + 2 \underbrace{\langle b - \overline{p}, \overline{p} - p \rangle} \geq \| b - \overline{p} \|^2$$

$= 0$ εκ κατασκευής διότι $\overline{p} - p \in R(A)$

Υπολογισμός των $\overline{p}$, $\overline{x}$:

$b - A\overline{x} \perp$ σε κάθε στοιχείο του $R(A)$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow b - A\overline{x} \perp a_1 \Rightarrow a_1^T (b - A\overline{x}) = 0 \\ \qquad\qquad\quad \perp a_2 \Rightarrow a_2^T (b - A\overline{x}) = 0 \\ \qquad\qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad\quad \perp a_n \Rightarrow a_n^T (b - A\overline{x}) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow A^T \cdot (b - A\overline{x}) = 0$$

$\Leftrightarrow \boxed{A^T A\overline{x} = A^T b}$

- Η λύση $\bar{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση $(A^T A)\bar{x} = A^T b$
- Εάν οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες $\Rightarrow A^T A$ αντιστρέψιμος και $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$
- Τότε και η προβολή του b στο $R(A)$ $P_{R(A)}b$ υπολογίζεται ως $\bar{p} = P_{R(A)}b = A\bar{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$.

Ο πίνακας $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ ονομάζεται πίνακας προβολής στο $R(A)$. Έχει την ιδιότητα ότι οποιοδήποτε $b \in R^m$ πολλαπλασιάσω με τον P θα πάρω την προβολή του b στο $R(A)$.

Σημείωση 1.

Αν $b \in R(A)$ τότε $\exists x : Ax = b$ και $\bar{p} = A(A^T A)^{-1} A^T b = A(A^T A)^{-1} A^T A x = Ax = b$

Σημείωση 2.

Αν $b \perp R(A)$ τότε $A^T b = 0$ και $\bar{p} = A(A^T A)^{-1} A^T b = A(A^T A)^{-1} 0 = 0$.

Σημείωση 3.

Αν A $n \times n$ αντιστρέψιμος τότε $R(A) = \mathbb{R}^n$ και

$$\bar{p} = A(A^T A)^{-1} A^T b = AA^{-1}\left(A^T\right)^{-1} A^T b = b$$

Σημείωση 4. Για $b \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\boxed{b = P_{R(A)}(b) + \left[b - P_{R(A)}(b)\right].}$$

Αυτή είναι η διάσπαση του b σε μία σθνιστώσα στον $R(A)$ και μία στο ορθογώνιο συμπλήρωμά του, το $R(A)^{\perp}$. Η δεύτερη ισούται με $P_{R(A)^{\perp}}(b) = \left[b - P_{R(A)}(b)\right] = [I - P]b$. Άρα ο

$$\boxed{\text{πίνακας προβολής στο } R(A)^{\perp} \text{ δίνεται από I-πίνακα προβολής στο } R(A).}$$

Απόδειξη του: «Εάν οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες $\Rightarrow A^T A$ αντιστρέψιμος»

Ο πίνακας εσωτερικού γινομένου $A^T A$

- Είναι συμμετρικός
- Έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον Α, διότι

  Αν $x \in N(A) \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A^T A)$ και

  Αν $x \in N(A^T A) \Rightarrow A^T Ax = 0 \Rightarrow x^T A^T Ax = 0$

  $$\Rightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in N(A).$$

Άρα όντως αν οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες τότε ο Α έχει τάξη m και τότε ο $A^T A$ έχει την ίδια τάξη και άρα είναι αντιστρέψιμος.

Ερώτηση – Άσκηση: Έστω U ένας υπόχωρος και τα $\{v_1, \ldots, v_r\}$ μια βάση του. Να βρεθεί πίνακας Γ τέτοιος που Γx να είναι για κάθε x το πλησιέστερο στο x σημείο του U.

Απάντηση: Γ πρέπει να είναι ο πίνακας προβολής στο U. Για να τον βρω πρέπει να σχηματίσω πίνακα A, τέτοιο που $U = R(A)$. Ο $A = [v_1 | \ldots | v_r]$ έχει αυτή την ιδιότητα. Άρα έχουμε $\Gamma = A(A^T A)^{-1} A^T$.

Ιδιότητες: Αν P πίνακας προβολής τότε:

$P^2 = P$ (Αν προβάλλω δύο φορές είναι σαν να πρόβαλα μία)

$P^T = P$ (P συμμετρικός)

Ισχύει και το ανάποδο: Ένας συμμετρικός πίνακας με $P^2 = P$ θα είναι πίνακας προβολής σε κάποιο υπόχωρο.

Απόδειξη: $P^2 = P \cdot P = A(A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P$

και $P^T = \left[A(A^T A)^{-1} A^T\right]^T = A^{T^T} \left((A^T A)^{-1}\right)^T A^T$

$$= A(A^T A)^{-1} A^T = P$$

διότι $A^T A$ συμμετρικός

<u>**Παράδειγμα 1:**</u> $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $R(A)=Span\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right)$

$P=?$, $P_{R(A)}b=?$, $\overline{x}=?$

$$\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{bmatrix}$$

Τύπος στο 2×2:

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&5\\5&13\end{bmatrix}$$

άρα $(A^TA)^{-1}=\dfrac{1}{26-25}\begin{bmatrix}13&-5\\-5&2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\2&3&0\end{bmatrix}$$

$$(A^TA)^{-1}A^T=\begin{bmatrix}13&-5\\-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

και $P=A\left((A^TA)^{-1}A\right)=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\longleftarrow P$

$$P_{R(A)}b=Pb=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\overline{x}=\left[(A^TA)^{-1}A^T\right]b=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\longleftarrow\overline{x}$$

Δηλ. $P_{R(A)}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = A\overline{x} = \overline{x}_1 a_1 + \overline{x}_2 a_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>**Παράδειγμα 2:**</u> Έστω $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογιστεί ο πίνακας προβολής Γ στο $Span(v)$.

Με $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\Gamma = V(V^T V)^{-1} V^T = v(v^T v)^{-1} v^T$

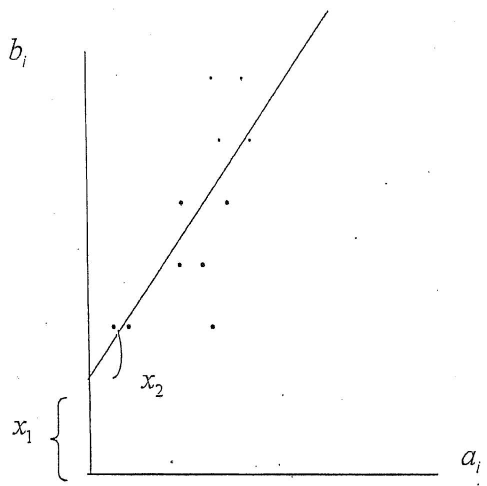
$$= \frac{1}{v^T v} v v^T = \frac{1}{1+1+4+4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Έστω έχω n μετρήσεις a_i, b_i π.χ. b_i πίεση και a_i θερμοκρασία.

Οι μετρήσεις αυτές σε διάγραμμα διασποράς αερίου βρίσκονται κοντά σε ευθεία (άγνωστη) και υποψιάζομαι ότι οι δύο ποσότητες συνδέονται με μια γραμμική σχέση την οποία <u>θέλω να εκτιμήσω</u>.



$$\boxed{b_i = x_1 + x_2 a_i + \varepsilon_i}$$

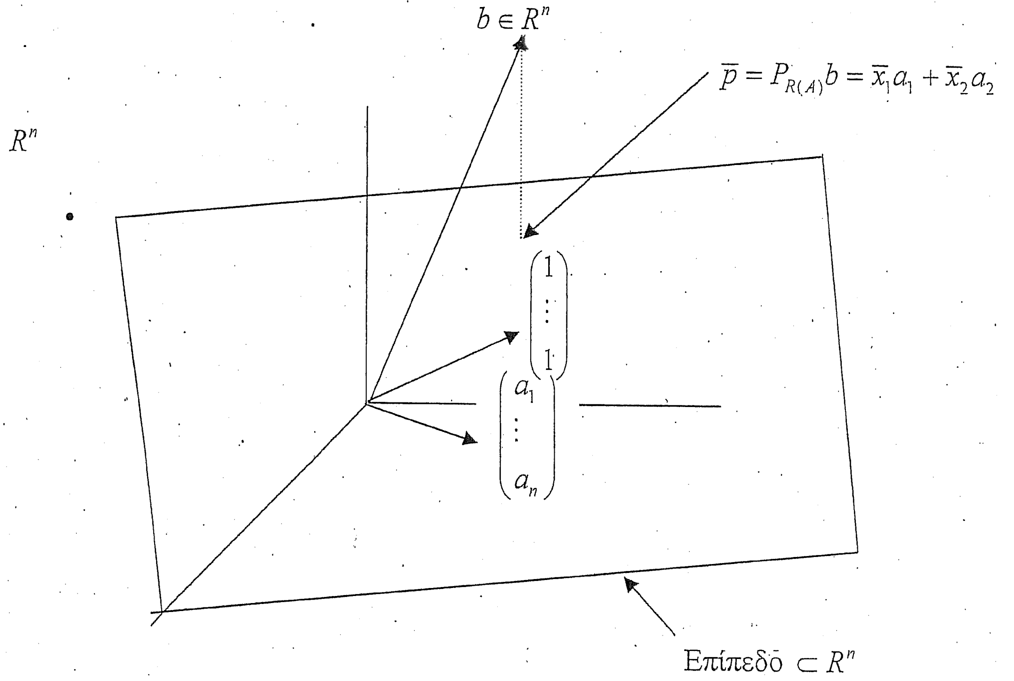
Πώς; <u>Ιδέα:</u> Βρες εκείνη την ευθεία (εκείνα τα x_1, x_2) που να είναι «κοντά στα σημεία», δηλ. $b_i - x_1 - x_2 a_i$ μικρό ή καλύτερα «ελάχιστο».

π.χ. $* = \sum_{i=1}^{n} (b_i - x_1 - x_2 a_i)^2$ ελάχιστο.

Αλλά $$* = \left\| \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\|^2$$

και * ελαχιστοποιείται για $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b$ με $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$.

Σημειώστε ότι η λύση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων συνδέεται με την προβολή του $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in R^n$ στο $Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\}$



Θα έχουμε $\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} m & \Sigma a_i \\ \Sigma a_i & \Sigma a_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Sigma b_i \\ \Sigma a_i b_i \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{m\Sigma a_i^2 - (\Sigma a_i)^2} \begin{bmatrix} \Sigma a_i^2 & -\Sigma a_i \\ -\Sigma a_i & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma b_i \\ \Sigma a_i b_i \end{pmatrix} = \ldots$$

15. Ορθογώνιοι Πίνακες, Πίνακες με Ορθοκανονικές Στήλες, ορθοκανον/ση Gramm-Schmidt και παραγοντοποίηση QR

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 3.4)

Έστω $q_1,\dots,q_k \in R^m$ με $\langle q_i, q_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ αν } i=j \\ 0 \text{ αν } i\neq j \end{cases}$

δηλαδή: τα $q_1,\dots,q_k$ έχουν μήκος 1 και είναι κάθετα μεταξύ τους. Τότε λέγονται «**ορθοκανονικά**».

Ένας $n\times n$ **πίνακας** Q **λέγεται ορθογώνιος** αν οι στήλες του είναι ορθοκανονικές.

$Q=[q_1|q_2|\dots|q_m]$ με $q_1,\dots,q_m$ ορθοκανονικά.

Τότε:

$$Q^TQ=\begin{bmatrix} \dots q_1^T \dots \\ \dots q_2^T \dots \\ \vdots \\ \dots q_m^T \dots \end{bmatrix}[q_1|\dots|q_m]=\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Μπορεί να δείξει κανείς ότι από $\{q_1,\dots,q_m\}$ ορθοκανονικά

$\Rightarrow$ ανεξάρτητα και άρα ο Q είναι αντιστρέψιμος.

$$\boxed{\Rightarrow Q^{-1}=Q^T}$$

<u>**Παράδειγμα:**</u> Η στοφή κατά θ

$$Q=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \Rightarrow Q^T=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}=Q^{-1}$$

Βασική ιδιότητα: Ο μετασχηματισμός $x \mapsto Qx$ διατηρεί γωνίες και μήκη: $\| Qx \| = \| x \|$ και $\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$, διότι:

$$\langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^T Qy = x^T \underbrace{Q^T Q}_{I} y = x^T y = \langle x, y \rangle$$

Ενδιαφέρουσα εφαρμογή

Για κάποιο $b \in R^m$ βρες $x_1, \ldots, x_m$ με $b = x_1 \cdot q_1 + \ldots + x_m \cdot q_m$.

$$\text{Ψάχνω } x : Qx = b \Rightarrow x = Q^{-1} b = Q^T b = \begin{pmatrix} \langle q_1, b \rangle \\ \langle q_2, b \rangle \\ \vdots \\ \langle q_m, b \rangle \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x_1 \\ \leftarrow x_2 \\ \\ \leftarrow x_m \end{matrix}$$

$$\boxed{\text{άρα } b = \underbrace{\langle q_1, b \rangle q_1}_{P_{q_1} b} + \ldots + \underbrace{\langle q_m, b \rangle q_m}_{P_{q_m} b}}$$

$b =$ άθροισμα των προβολών του στα q_i (μόνο όταν τα q_i είναι 1).

Παραλληλόγραμμοι πίνακες με ορθοκανονικές στήλες

$Q_{m \times n}$ με $n < m$

$Q = [q_1 | \ldots | q_n]$ με $q_i \in R^m$, $q_1, \ldots, q_n$ ορθοκανονικά.

Τότε $Q^T Q = I_n$ και άρα ο Q^T είναι αριστερός αντίστροφος του Q, αλλά ο Q δεν είναι αντιστρέψιμος.

Τί είναι ο QQ^T;

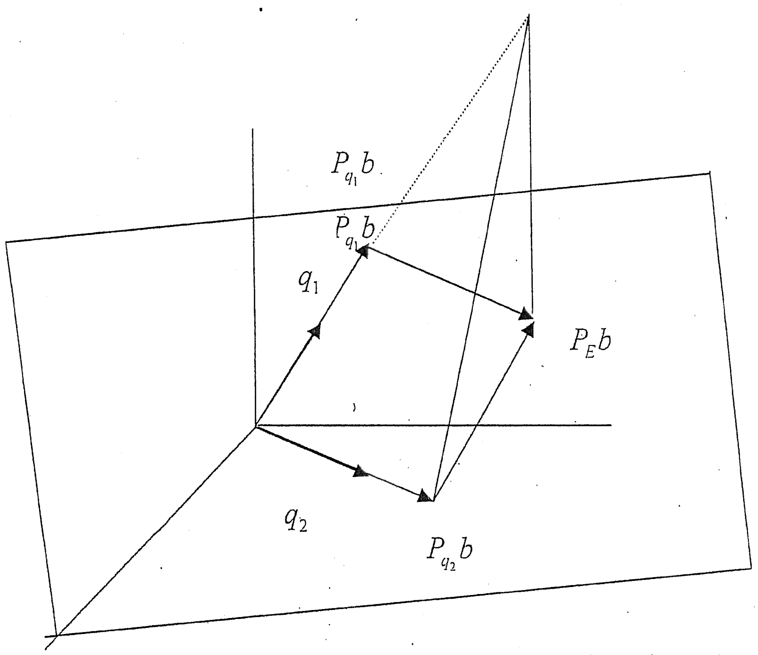
Ας υπολογίσουμε τον πίνακα προβολής P στο $Span(q_1, \ldots, q_n)$.

$$P = Q(Q^T Q)^{-1} Q^T = QQ^T$$

Άρα $P_{R(Q)}b = QQ^T b = Q\begin{pmatrix} \langle q_1, b\rangle \\ \vdots \\ \langle q_n, b\rangle \end{pmatrix} = \langle q_1, b\rangle q_1 + \ldots + \langle q_n, b\rangle q_n = P_{q_1}b + \ldots + P_{q_n}b$

(διαφορά με πριν: έχω <u>λιγότερα</u> q_i)

<u>Παρατήρηση:</u> Όταν τα $q_1,\ldots q_n$ είναι ορθοκανονικά τότε η προβολή κάποιου b στο $Span(q_1,\ldots q_n)$ ταυτίζεται με το άθροισμα των προβολών του στα q_i. Αυτό δεν ισχύει αν τα q_i δεν είναι κάθετα μεταξύ τους.



$E = Span(q_1, q_2)$

Ορθοκανονικοποίηση Gramm – Schmidt

<u>Πρόβλημα:</u> Έχω υπόχωρο U με βάση $\{v_1,\ldots,v_k\}$ και θέλω ορθοκανονική βάση του U: $\{q_1,\ldots,q_k\}$.

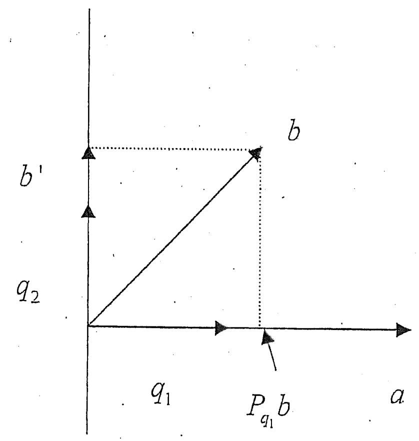
Η διαδικασία Gramm – Schmidt ορθοκανονικοποιεί τα $\{v_1,\ldots,v_k\}$ και παράγει τα $\{q_1,\ldots,q_k\}$.

Ας τη γνωρίσουμε στο παράδειγμα $k=3$ και $a\equiv v_1$, $b\equiv v_2$, $c\equiv v_3$.

<u>1° βήμα:</u> Διαιρώ το a με το μήκος του για να πάρω διάνυσμα μήκους 1:

$$q_1=\frac{a}{\|a\|}=\frac{a}{\sqrt{\langle a,a\rangle}}$$

<u>2° βήμα:</u> $b'=b-P_{q_1}b=b-\langle b,q_1\rangle q_1$ και $q_2=\dfrac{b'}{\|b'\|}$.



Σε κάθε βήμα αφαιρώ από το v_k την προβολή του στα προηγούμενα $q_1, \ldots, q_?$ που έχω φτιάξει μέχρι εκεί. Μετά διαιρώ με το μήκος του διανύσματος που προέκυψε.

<u>3° βήμα:</u> $c' = c - P_{q_1}c \ldots - P_{q_n}c = c - \langle q_1, c\rangle c - \ldots - \langle q_2, c\rangle q_2$

$$q_3 \frac{c'}{\| c' \|}$$

$$\vdots$$

Παράδειγμα:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_1 = \frac{a}{\| a \|} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle b, q_1 \rangle q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{b'}{\| b' \|} = \frac{b'}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$c' = c - \langle c, q_1 \rangle q_1 - \langle c, q_2 \rangle q_2 = c - \sqrt{2} q_1 - \sqrt{2} q_2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{c'}{\| c' \|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παραγοντοποίηση QR

Έστω $A=\begin{bmatrix} a & | & b & | & c \end{bmatrix}$ και q_1, q_2, q_3 ~~τα~~ προκύπτουν από ορθοκανονικοποίηση των a, b, c. Τότε έχουμε:

$$\begin{cases} a = \langle q_1, a\rangle \cdot q_1 \\ b = \langle q_1, b\rangle q_1 + \langle q_2, b\rangle q_2 \\ c = \langle q_1, c\rangle q_1 + \langle q_2, c\rangle q_2 + \langle q_3, c\rangle q_3 \end{cases}$$

Οι τρεις παραπάνω εξισώσεις γράφονται σε μορφή πίνακα ως:

$$\begin{bmatrix} \langle q_1, a\rangle & \langle q_1, b\rangle & \langle q_1, c\rangle \\ 0 & \langle q_2, b\rangle & \langle q_2, c\rangle \\ 0 & 0 & \langle q_3, c\rangle \end{bmatrix} R$$

$$Q \; \begin{bmatrix} q_1 & | & q_2 & | & q_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & | & b & | & c \end{bmatrix} \; A.$$

δηλαδή $A = QR$,

όπου A $m\times n$, Q $m\times n$ πίνακας ~~με~~ ορθο/κές στήλες

και R $n\times n$ άνω τριγωνικός.

Γενικώς: ~~ένα~~ Γιά ένα $m \times n$ πίνακα A υπάρχουν $m \times n$ πίνακας Q με ορθοκανονικές στήλες καί $n \times n$ άνω τριγωνικός R τέτοιοι που $A = QR$. Οι στήλες του Q προκύπτουν από ορθοκανονικοποίηση των στηλών του A καί ό R περιέχει τά εσωτερικά γινόμενα $\langle$στήλη A, στήλη $Q\rangle$.

Στό παράδειγμά μας:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

Ασκήσεις

Φυλλάδιο 1

1. Δίνονται τα σημεία του $\Re^4$, $a^T = (1,2,3,1)$ και $b^T = (2,4,1,3)$. Έστω L_a η ευθεία που διέρχεται από το a και το 0 και L_b η ευθεία που διέρχεται από το b και το 0.
   a) Να βρεθούν οι διανυσματικές εξισώσεις των L_a και L_b.
   b) Να βρεθεί το σημείο της L_a που είναι πλησιέστερο στο b.
   c) Να βρεθεί το σημείο της L_b που είναι πλησιέστερο στο a.
   d) Να βρεθεί η εξίσωση (διανυσματική) του επιπέδου που διέρχεται από τα a ,b και 0 και εκείνου που διέρχεται απο τα a ,b και c, όπου $c^T = (1,1,0,0)$.

2. Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των $x \in \Re^4$ που ικανοποιούν την εξίσωση $< a,x >= 0$ όπου $a^T = (1,1,2,3)$. Γράψτε εξίσωση της μορφής $\lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 + \nu \cdot v_3$,$\lambda, \mu, \nu \in \Re$, $v_1, v_2, v_3 \in \Re^4$ που περιγράφει όλα τα $x \in \Re^4$ που είναι λύση της εξίσωσης.

   Παρομοίως για την εξίσωση $< a,x >= 1$.Τώρα η εξίσωση θα έχει τη μορφή $z + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 + \nu \cdot v_3$,με $\lambda, \mu, \nu \in \Re$ και $z, v_1, v_2, v_3 \in \Re^4$

3. (Άσκηση 1.2.2 από Strang) Λύστε το τριγωνικό σύστημα

$$\begin{aligned} u + v + w &= b_1 \\ v + w &= b_2 \\ w &= b_3 \end{aligned}$$

   Δείξτε ότι η λύση σας δίνει ένα συνδιασμό των στηλών που ισούται με τη στήλη στη δεξιά πλευρά.

4. (Άσκηση 1.2.3 από Strang) Περιγράψτε την τομή των τριών επιπέδων $u + v + w + z = 6$ και $u + w + z = 4$ και $u + w = 2$ (όλα στον τετραδιάστατο χώρο). Είναι μία ευθεία, ένα σημείο ή το κενό σύνολο; Ποιά είναι η τομή αν συμπεριληφθεί και το τέταρτο επίπεδο $u = -1$;

Υπόδειξη: Λύστε την τελευταία εξίσωση ώς προς w (u ελεύθερο), μετά τη δεύτερη ώς πρός z και τελικά την πρώτη ώς πρός v. Τι μορφή έχει το διάνυσμα $(u,v,w,z)^T$;

5. (Άσκηση 1.2.4 από Strang) Σχεδιάστε τις ευθείες

$$\begin{aligned} x+2\cdot y &= 2 \\ x-y &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Μπορούν να λυθούν ταυτόχρονα οι τρείς εξισώσεις; Τι συμβαίνει στο σχήμα όταν όλες οι δεξιές πλευρές είναι μηδέν; Υπάρχει μη μηδενική επιλογή των δεξιών πλευρών που επιτρέπει στις τρείς ευθείες να τέμνονται στο ίδιο σημείο και στις τρείς εξισώσεις να έχουν μια λύση;

Φυλλάδιο 2

1. Έστω $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -2 & -2\end{bmatrix}$, και $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 6 & 2 & 3 & 0\\ 8 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ και $x=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\\ -4\end{pmatrix}$.

a) Να υπολογιστούν τα $A\cdot B$, $\mathrm{A}\cdot \mathrm{x}$, $\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\cdot B$.

b) Να βρεθεί πίνακας E_1 τέτοιος ώστε το $E_1\cdot x$ να προσθέτει το 3-πλάσιο της δεύτερης συντεταγμένης του x στην τρίτη. Πώς διαφέρει ο $E_1\cdot B$ από τον B;

c) Να βρεθεί πίνακας E_2 τέτοιος ώστε το $E_2\cdot x$ να προσθέτει το 4-πλάσιο της δεύτερης συντεταγμένης του x στην τέταρτη. Πώς διαφέρει ο $E_2\cdot B$ από τον B;

d) Υπολογίστε τον $E=E_2\cdot E_1$. Πώς διαφέρει το $E\cdot x$ από το x; Και πώς ο $E\cdot B$ από τον B.

2. (Άσκηση 1.4.11 από Strang) Αληθές ή ψευδές; Δώστε αντιπαράδειγμα όταν είναι ψευδές.

e) Εάν η πρώτη και τρίτη στήλη του B είναι ίδιες τότε το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και τρίτη στήλη του $A\cdot B$.

f) Εάν η πρώτη και τρίτη γραμμή του B είναι ίδιες τότε το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και τρίτη γραμμή του $A\cdot B$.

g) Εάν η πρώτη και τρίτη γραμμή του A είναι ίδιες τότε το ίδιο συμβαίνει και με την πρώτη και τρίτη γραμμή του $A\cdot B$.

h) $(A\cdot B)^2=A^2\cdot B^2$.

3. (Άσκηση 1.4.12 από Strang) Η πρώτη γραμμή του $A\cdot B$ είναι γραμμικός συνδιασμός όλων των γραμμών του B. Ποιοί είναι οι συντελεστές αυτού του συνδιασμού και ποιά η πρώτη γραμμή του $A\cdot B$ αν

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};$$

4. (Άσκηση 1.4.19 από Strang) Ποιοί από τους επόμενους πίνακες είναι σίγουρα ίσοι με $(A+B)^2$;

$(B+A)^2$, $A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$, $A\cdot(A+B)+B\cdot(A+B)$, $(A+B)\cdot(B+A)$, $A^2+A\cdot B+B\cdot A+B^2$.

5. Έστω $K = m\left\{\left[\underbrace{A_{m\times n}}_{n}\middle|\underbrace{B_{m\times q}}_{q}\right]\right.$, $L = \begin{array}{c} r \\ s \end{array}\left\{\left[\underbrace{\dfrac{C_{r\times p}}{D_{s\times p}}}_{p}\right]\right.$, $x = \begin{array}{c} n \\ q \end{array}\left\{\left[\underbrace{\dfrac{z_{n\times 1}}{w_{q\times 1}}}_{1}\right]\right.$, και $y = p\left\{\left[\underbrace{*}_{1}\right]\right.$, .

Να υπολογισθούν τα $K\cdot x$ και $L\cdot y$ ώς συνάρτηση γινομένων των πινάκων A,B,C,D με τα z,w,y.

6. (Άσκηση 1.4.21 από Strang) Υπάρχει ένας τέταρτος τρόπος να δούμε τον πολλαπλασιασμό πινάκων σαν στήλες επί γραμμές. Εάν οι στήλες του A είναι $c_1,\ldots,c_n$ και οι γραμμές του B είναι τα διανύσματα-γραμμές $r_1,\ldots,r_n$, τότε $c_1\cdot r_1$ είναι ένας πίνακας και $A\cdot B = c_1\cdot r_1+\ldots+c_n\cdot r_n$.

i) Δώστε ένα παράδειγμα 2 επί 2 αυτού του κανόνα του πολλπλασιασμού.

j) Εξηγήστε γιατί η δεξιά πλευρά δίνει τη σωστή τιμή $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$ για το στοιχείο $(A\cdot B)_{ij}$.

Φυλλάδιο 3

1. (Άσκηση 1.5.5 από Strang)

Παραγοντοποιήστε τον A σε $L \cdot U$, και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $U \cdot x = c$ που εμφανίζεται μετά την απαλοιφή για το

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2. (Άσκηση 1.5.15 από Strang)

Βρείτε τις παραγοντοποιήσεις $P \cdot A = L \cdot D \cdot U$ (και επαληθεύστε τις) για

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (Άσκηση 1.5.11 από Strang)

Λύστε την $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ χωρίς να πολλαπλασιάσετε τους $L \cdot U$ για να βρείτε τον A.

4. (Άσκηση 1.5.13 από Strang)

Λύστε με απαλοιφή, κάνοντας εν ανάγκη εναλλαγές γραμμών :

$$\begin{aligned} u + 4 \cdot v + 2 \cdot w &= -2 \\ -2 \cdot u - 8 \cdot v + 3 \cdot w &= 32 \\ v + w &= 1 \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u + v \quad &= 0 \\ u + v + w &= 1 \end{aligned}$$

5. Βρείτε την παραγοντοποίηση $PA = LDU$ και λύστε το σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Φυλλάδιο 4

1. (Άσκηση 1.6.6 από Strang)

Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Gauss-Jordan για να αντιστρέψετε τους

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.

a. (Άσκηση 1.6.8 από Strang)

Δείξτε ότι ο $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο προσπαθώντας να λύσετε το $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b. (Άσκηση 1.6.9 από Strang)

Δείξτε ότι όταν αποτυγχάνει η απαλοιφή για έναν ιδιόμορφο πίνακα όπως ο $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ τότε ο A δεν μπορεί να αντιστρέφεται. Η τρίτη γραμμή του A^{-1}, πολλαπλασιάζοντας με τον A θα έπρεπε να δώσει την τρίτη γραμμή του $A^{-1} \cdot A = I$. Γιατί αυτό είναι αδύνατον;

3. (Άσκηση 1.6.12 από Strang)

Ποιές ιδιότητες ενός πίνακα διατηρούνται και στον αντίστροφο του (υποθέτοντας ότι υπάρχει ο A^{-1});

a. Ο A είναι τριγωνικός.
b. Ο A είναι συμμετρικός.

4.

c. (Άσκηση 1.6.13 από Strang)

Εάν $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ υπολογίστε τους $A^T \cdot B$, $B^T \cdot A$, $A \cdot B^T$ και $B \cdot A^T$.

d. (Άσκηση 1.6.14 από Strang)

(Ενδιαφέρουσα) Αποδείξτε οτι ακόμη και για παραλληλόγραμμους πίνακες οι $A \cdot A^T$ και $A^T \cdot A$ είναι πάντοτε συμμετρικοί. Δείξτε με παράδειγμα οτι αυτοί μπορεί να είναι διαφορετικοί ακόμη και για τετραγωνικούς πίνακες.

5. Αποδείξτε οτι : Αν $A_{n \times n}$ αντιστρέψιμος και $c, d \in \Re^n$ τότε

$$\left(A + c \cdot d^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} \cdot c \cdot d^T \cdot A^{-1}}{1 + d^T \cdot A^{-1} \cdot c}.$$

(Σημειώστε: $A + c \cdot d^T$ είναι $n \times n$ ενώ $d^T \cdot A^{-1} \cdot c \in \Re$)

Φυλλάδιο 5

1. (Άσκηση 2.1.2 από Strang)

Ποια από τα επόμενα υποσύνολα του $\Re^3$ είναι πράγματι υπόχωροι;

a) Το επίπεδο των διανυσμάτων με πρώτη συνιστώσα $b_1 = 0$.

b) Το επίπεδο των διανυσμάτων b με $b_1 = 1$.

c) Τα διανύσματα b με $b_1 \cdot b_2 = 0$ (αυτή είναι η ένωση δύο υποχώρων του επιπέδου $b_1 = 0$ με $b_2 = 0$).

d) Το μεμονωμένο διάνυσμα $b = (0,0,0)$.

e) Όλοι οι συνδυασμοί των δυο διανυσμάτων $x = (1,1,0)$ και $y = (2,0,1)$.

f) Τα διανύσματα (b_1, b_2, b_3) που ικανοποιούν την $b_3 - b_2 + 3 \cdot b_1 = 0$.

2. (Άσκηση 2.2.4 από Strang)

Προσδιορίστε την κλιμακωτή μορφή U, τις βασικές μεταβλητές, τις ελεύθερες μεταβλητές καθώς και τι γενική λύση του $A \cdot x = 0$ για τον $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, Κατόπιν εφαρμόστε απαλοιφή στην $A \cdot x = b$, με συνιστώσες b_1 και b_2 στη δεξιά πλευρά και βρείτε τις συνθήκες έτσι ώστε το $A \cdot x = b$ να είναι συμβιβαστό (δηλαδή να έχει λύση) καθώς και τη γενική λύση στην ίδια μορφή μ'αυτή της εξίσωσης (3). Ποια είναι η τάξη του A;

3. (Άσκηση 2.2.6 από Strang)

Γράψτε τη γενική λύση του

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

σαν άθροισμα μιας ειδικής λύσης του $A \cdot x = b$ και της γενικής λύσης του $A \cdot x = 0$, όπως στην (3).

4. (Άσκηση 2.2.9 από Strang)

Υπό ποιες συνθήκες για τα b_1 και b_2 (εφ'όσον χρειάζονται) έχει το $A \cdot x = b$ λύση, όταν $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$;

Βρείτε δυο διανύσματα χ στον μηδενόχωρο του A καθώς και τη γενική λύση του $A \cdot x = b$.

5. Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας U. Ζητείται να γραφεί ο μηδενόχωρος του U ως $Span(v_1,\ldots,v_k)$ για κατάλληλα $v_1,\ldots,v_k$

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Φυλλάδιο 6

1.

a) (Άσκηση 2.3.1 από Strang)

Αποφασίστε αν τα επόμενα διανύσματα είναι ανεξάρτητα η όχι, λύνοντας το $c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + c_3 \cdot v_3 + c_4 \cdot v_4 = 0$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Αποφασίστε επίσης αν αυτά παράγουν τον $\Re^4$ προσπαθώντας να λύσετε το $c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + c_3 \cdot v_3 + c_4 \cdot v_4 = (0,0,0,1)$.

b) (Άσκηση 2.2.4 από Strang)

Υποθέστε ότι $v_1, v_2, \ldots, v_9$ είναι εννέα διανύσματα του $\Re^7$.

a. Τα διανύσματα αυτά (είναι) (δεν είναι) (μπορεί να είναι) γραμμικώς ανεξάρτητα.

b. Αυτά (παράγουν) (δεν παράγουν) (μπορεί να παράγουν) τον $\Re^7$.

c. Εάν τα διανύσματα αυτά είναι οι στήλες του A, τότε το $A \cdot x = b$ (έχει) (δεν έχει) (μπορεί να μην έχει) λύση.

2. (Άσκηση 2.4.3 από Strang)

Βρείτε τη διάσταση και μια βάση των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

c) (Άσκηση 2.4.9 από Strang)

Υποθέστε ότι η μόνη λύση του $A \cdot x = 0$ (m εξισώσεις με n αγνώστους) είναι η $x = 0$. Ποια είναι η τάξη και γιατί;

d) (Άσκηση 2.4.11 από Strang)

Εάν το $A \cdot x = b$ έχει πάντοτε μια τουλάχιστον λύση, δείξτε ότι η μόνη λύση του $A^T \cdot y = 0$ είναι η $y = 0$. Υπόδειξη: Ποια είναι η τάξη;

4. Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 10 & 8 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Να βρεθεί βάση του μηδενόχωρου.

b) Να βρεθεί βάση του υπόχωρου εκείνων των στοιχείων z του $\Re^4$ για τα οποία ισχύει ότι το σύστημα $A \cdot x = z$ θα είχε τουλάχιστον μια λύση.

c) Να βρεθεί βάση του υποχώρου εκείνων των στοιχείων του $\Re^4$ που γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A

5. Έστω $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 9 & 0 \\ 2 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Να βρεθεί βάση εκείνων των x με την ιδιότητα ότι $A \cdot x = 0$

b) Να βρεθεί βάση του αριστερού μηδενόχωρου.

Φυλλάδιο 7

1.

e) (Άσκηση 3.1.7 από Strang)

Βρείτε ένα διάνυσμα x ορθογώνιο στον χώρο γραμμών, και ένα διάνυσμα y ορθογώνιο στον χώρο γραμμών του $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

f) (Άσκηση 3.1.16 από Strang)

Βρείτε όλα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα $(1,4,4,1)$ και $(2,9,8,2)$.

2.

a) (Άσκηση 3.1.22 από Strang)

Έστω S ο υπόχωρος στον $\Re^4$ που περιέχει τα διανύσματα $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Βρείτε μια βάση του $S^{\perp}$, ο οποίος περιέχει όλα τα διανύσματα τα ορθογώνια στον S.

b) (Άσκηση 3.3.12 από Strang)

Εάν V είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το $(1,1,0,1)$ και $(0,0,1,0)$. βρείτε:

a. μια βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος $V^{\perp}$.

b. τον πίνακα προβολής P πάνω στο V.

c. το διάνυσμα του V, το πλησιέστερο στο $b = (0,1,0,-1)$ του $V^{\perp}$.

3. Δίνονται τα ακόλουθα δύο στοιχεία του $\Re^4$:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

και έστω E ο υπόχωρος που παράγουν τα b_1 και b_2 μαζί και F το ορθογώνιο συμπλήρωμα του E.

a) Να βρεθεί μια λύση του F (προσοχή όχι του E).
b) Να βρεθούν λ_1 και λ_2, τέτοια ώστε το $\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2$ να είναι ο πλησιέστερος στο $b = (1,2,1,0)^T$ γραμμικός συνδυασμός των b_1 και b_2.
c) Έστω f ο μετασχηματισμός που απεικονίζει ένα x στην προβολή του στον E. Να βρεθεί πίνακας A τέτοιος ώστε $f(x) = A \cdot x$.
d) Να βρεθούν $b_0 \in E$ και $b_1 \in F$, τέτοια ώστε $b = b_0 + b_1$.
e) Έστω $U \subset \Re^n$ ένας υπόχωρος με $\dim(U) = k$, και P ο πίνακας προβολής στο U. Ποιος είναι ο χώρος στηλών του P, ποια είναι η τάξη του P, ποιος είναι ο μηδενόχωρος του P και ποια είναι η διάσταση του;

4.

a) (Άσκηση 3.3.24 από Strang)

Βρείτε τη βέλτιστη ευθεία παρεμβολής των επόμενων μετρήσεων:

$y = 2,\ \gamma\iota\alpha\ \mathrm{t} = -1,\quad y = 0,\ \gamma\iota\alpha\ \mathrm{t} = 0,$

$y = -3\ \gamma\iota\alpha\ \mathrm{t} = 1,\quad y = -5\ \gamma\iota\alpha\ \mathrm{t} = 2.$

b) (Άσκηση 3.3.25 από Strang)

Υποθέστε ότι αντί για ευθεία, παρεμβάλλαμε στα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης, μια παραβολή: $y = C + D \cdot t + E \cdot t^2$. Ποιος είναι ο πίνακας συντελεστών A, το άγνωστο διάνυσμα x και το διάνυσμα δεδομένων b στο μη συμβιβαστό σύστημα $A \cdot x = b$ που προκύπτει μετά από τέσσερις μετρήσεις; Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε το $\bar{x}$.

Φυλλάδιο 8

1.

Έστω $b_1,\ldots,b_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\Re^n$ και V ο υπόχωρος που παράγουν. Έστω c ενα άλλο στοιχείο του $\Re^n$.

g) Πως ακριβώς υπολογίζεται το c_v που ορίζεται ως εκείνο το στοιχείο του V που είναι πλησιέστερο στο c;

h) Πως υπολογίζεται το c_i που ορίζεται ως εκείνο το στοιχείο το πολλαπλάσιο του b_i $(c_i = \lambda \cdot b_i)$ που είναι πλησιέστερο στο c;

i) Υπό ποιες προυποθέσεις στα $b_1,\ldots,b_k$ ισχύει οτι $\sum_{i=1}^{k} c_i = c_v$ για κάθε c;

j) Υπό ποιες προυποθέσεις στα $b_1,\ldots,b_k$ ισχύει οτι $\sum_{i=1}^{k} c_i = c$;

2.

Έστω ότι πραγματοποιούνται μετρήσεις $(y_i, t_i), i = 1,\ldots,6$ με $t_i < 0$ για $i = 1,2,3$ και $t_i > 0$ για $i = 4,5,6$.

Έστω ότι αντί για μια ευθεία θέλουμε να προσαρμόσουμε (με ελάχιστα τετράγωνα) σε αυτές τις μετρήσεις μια συνάρτηση $h(t)$ της μορφής

$h(t) = c + f \cdot t$, για $t < 0$ και $h(t) = d + f \cdot t$, για $t > 0$,

δηλαδή δυο διαφορετικές ευθείες δεξιά και αριστερά από το 0 με την ίδια κλίση. Ποιός θα πρέπει να είναι τώρα ο πίνακας συντελεστών A και το διάνυσμα δεδομένων b; Πως βρίσκουμε τα άγνωστα c, d, f (δηλαδή την $h(t)$);

3. Δίνονται τα ακόλουθα 2 **ορθοκανονικά** στοιχεία q_1, q_2 και επίσης δίνεται το στοιχείο b του $\Re^4$:

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

f) Να βρεθούν q_3 και q_4 (του $\Re^4$), τέτοια ώστε τα q_1, q_2, q_3, q_4 να αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\Re^4$. (**Υπόδειξη**: βρέστε πρώτα δυο (ανεξάρτητα) διανύσματα p_3 και p_4 (του $\Re^4$), που να είναι ορθογώνια στα q_1, q_2, δηλαδή $< q_1, p >= 0$ και $< q_2, p >= 0$. Ποιο σύστημα πρέπει να λύσετε για να τα βρείτε; Τι πρέπει να κάνετε μετά στα p_3 και p_4 για να βρείτε τα q_3, q_4;)

g) Να βρεθεί :

a. Γραμμικός συνδυασμός των q_1, q_2, q_3, q_4 που να ισούται με b.

b. Γραμμικός συνδυασμός των q_1, q_2, q_3, q_4 που να ισούται με την προβολή του b στον υπόχωρο που παράγεται από τα q_1, q_2 (προσοχή μόνο από τα δύο πρώτα).(**Υπόδειξη:** Σεφτείτε πώς μπορείτε να εκμεταλλευτείτε την ορθοκανονικότητα των q_1, q_2, q_3, q_4 και η απάντηση βγαίνει σε "δύο γραμμές")

4.

c) (Άσκηση 3.4.15 από Strang)

Βρείτε ενα ορθοκανονικό σύνολο q_1, q_2, q_3 απ'το οποίο τα q_1, q_2 παράγουν τον χώρο στηλών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Ποιος θεμελιώδης υπόχωρος περιέχει το q_3; Ποια είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων του $A \cdot x = b$, όταν το $b = [1 \ 2 \ 7]^T$

d) (Άσκηση 3.4.16 από Strang)

Εκφράστε την ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt των $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ως $A = Q \cdot R$. Δοθέντων n διανυσμάτων a_i, κάθε ενα από τα οποία έχει m συνιστώσες, ποια είναι τα σχήματα των A, Q και R;

Θέματα προηγούμενων Εξεταστικών

Γραμμικά συστήματα και υπόχωροι

Φεβρουάριος 2007

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας A:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 12 & 11 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & -4 \end{bmatrix},$$

1.1 **(1 μον.)** Να βρεθεί η παραγοντοποίηση PA=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός.

1.2 **(1 μον.)** Έστω $b=\begin{pmatrix}3 & 11 & 8 & 13\end{pmatrix}^T$. Περιγράψτε τις λύσεις του συστήματος $Ax=b$ ως $x_{ειδική}+\mathrm{Span}(v_1,\ldots,v_k)$ για κατάλληλα ανεξάρτητα $v_1,\ldots,v_k$.

1.3 **(0.5 μον.)** Τι γεωμετρικό σχήμα είναι το σύνολο των λύσεων του $Ax=b$; Είναι υπόχωρος;

1.4 **(0.5 μον.)** Το σύνολο των $x\in\mathbb{R}^n$ για τα οποία $f(x)=\begin{pmatrix}0 & \ldots & 0\end{pmatrix}^T$ λέγονται πυρήνας του μετασχηματισμού f. Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα του μετασχηματισμού $x\mapsto Ax$ (δηλαδή $f(x)=Ax$).

1.5 **(0.5 μον.)** Το σύνολο των $y\in\mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x\in\mathbb{R}^n$, τέτοιο που $f(x)=y$, λέγονται πεδίο τιμών του μετασχηματισμού f. Να βρεθεί μία βάση του πεδίου τιμών του μετασχηματισμού $x\mapsto Ax$ (δηλαδή $f(x)=Ax$).

Θέμα 2°

Έστω $a_1,\ldots,a_5$ οι στήλες του A από Θέμα 1°.

2.1 **(0.7 μον.)** Αν g ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τον $\mathbb{R}^4$ στον $\mathbb{R}^4$, τέτοιος που

$$g\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right)=a_1,\quad g\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=a_2,\quad g\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=a_3,\quad g\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=a_4.$$

Να βρεθεί πίνακας B τέτοιος ώστε $g(x)=Bx$

Σεπτέμβριος 2007

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

1.1 **(0.5 μον.)** Να βρεθεί η παραγοντοποίηση PA=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός.

1.2 **(1 μον.)** Να βρεθεί μία βάση του μηδενόχωρου του A.

1.3 **(0.5 μον.)** Να περιγραφτεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος Ax=b, όπου $b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^T$. Πρόκειται για υπόχωρο; Γιατί;

1.4 **(0.5 μον.)** Η απεικόνιση f(x)=Ax, $x \in \mathbf{R}^6$ είναι επί; Υπάρχει, δηλαδή, για κάθε $z \in \mathbf{R}^3$ ένα $x \in \mathbf{R}^6$ τέτοιο που f(x)=z; Γιατί; Δώστε μία βάση του υπόχωρου των $z \in \mathbf{R}^3$ που έχουν αυτή την ιδιότητα.

1.5 **(0.5 μον.)** Έστω $z \in \mathbf{R}^4$ για το οποίο υπάρχει $x \in \mathbf{R}^5$ τέτοιο που f(x)=z. Θα είναι αυτό το μοναδικό x ή θα υπάρχουν και άλλα; Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των $x \in \mathbf{R}^5$ που έχουν αυτή την ιδιότητα.

Φεβρουάριος 2006

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.1 **(0.7 μον.)** Να βρεθούν κάτω τριγωνικός πίνακας L (με 1 στη διαγώνιο) και κλιμακωτός πίνακας U, τέτοιοι που A=LU.

1.2 **(0.7 μον.)** Υπάρχουν $x \in \mathbb{R}^5$ με $x \neq \mathbf{0}$, τέτοια που $Ax = 0$; Αν ναι, να βρεθεί μία βάση του υπόχωρου που σχηματίζουν.

1.3 **(0.3 μον.)** Βρέστε μία βάση του συνόλου εκείνων των $z \in \mathbb{R}^6$ για τα οποία το σύστημα $Ax = z$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

1.4 **(0.5 μον.)** Έστω ότι για κάποιο $z_0 \in \mathbb{R}^6$ γνωρίζω ότι μία λύση του συστήματος $Ax = z_0$ είναι κάποιο συγκεκριμμένο και γνωστό $x_0 \in \mathbb{R}^5$, δηλαδή $Ax_0 = z_0$. Πώς μπορώ να βρώ τις υπόλοιπες λύσεις του συστήματος $Ax = z_0$; Σχηματίζουν υπόχωρο;

1.5 (0.3 μον.) Ποιος θεμελιώδης υπόχωρος του A αποτελείται από όλα τα y που είναι εικόνες της απεικόνισης $x \mapsto y = Ax$. Τι διάσταση έχει;

Σεπτέμβριος 2006

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 9 & -5 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 3 & -4 & -13 & 5 \\ 2 & -4 & 2 & -3 & -8 & 3 \end{bmatrix},$$

1.1 (1 μον.) Να βρεθεί η παραγοντοποίηση PA=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός.

1.2 (0.7 μον.) Να βρεθεί μία βάση του Μηδενόχωρου του A.

1.3 (0.3 μον.) Να βρεθεί μία βάση του χώρου στηλών του A.

Έστω B ένας mxn πίνακας πού έχει ακριβώς r ανεξάρτητες γραμμές και f ο γραμμικός μετασχηματισμός $f(x) := Bx$, που απεικονίζει τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$. Θεωρώντας γνωστό το θεμελιώδες θεώρημα της Γραμμικής Άλγεβρας, απαντήστε στα ακόλουθα:

2.1 (0.4 μον.) Πόσες ανεξάρτητες στήλες έχει ο B; Εξηγείστε γιατί.

2.2 (0.3 μον.) Το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία $f(x) = (0 \quad \ldots \quad 0)^T$ λέγονται πυρήνας του μετασχηματισμού. Τι διάσταση έχει ο πυρήνας του f ; Εξηγείστε γιατί.

2.3 (0.3 μον.) Το σύνολο των $y \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο που $f(x) = y$, λέγονται πεδίο τιμών του μετασχηματισμού. Τι διάσταση έχει το πεδίο τιμών του f ; Εξηγείστε γιατί.

2.4 (0.5 μον.) Υπό ποιες συνθήκες στα m, n , r θα έχει ο f την ιδιότητα ότι «για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ θα υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο που $f(x) = y$ »; Εξηγείστε γιατί.

2.5 (0.5 μον.) Υπό ποιες συνθήκες στα m, n , r θα έχει ο f την ιδιότητα ότι «αν κάποιο $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο που $f(x) = y$, τότε αυτό το x θα είναι μοναδικό»; Εξηγείστε γιατί.

Φεβρουάριος 2005

Δίνεται η παραγοντοποίηση A=LU, όπου L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός:

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&1&-2&-3&1\\2&-4&4&-5&-4&3\\1&-2&9&-6&11&5\\3&-6&3&-6&-9&3\\2&-4&2&-4&-6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\1&4&1&0&0\\3&0&0&1&0\\2&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1&-2&-3&1\\0&0&2&-1&2&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

1.1 (1 μον.) Να βρεθεί μία βάση του Μηδενόχωρου του A;

1.2 (0.5 μον.) Να βρεθεί μία βάση του χώρου στηλών του A.

1.3 (0.5 μον.) Να περιγραφτεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος Ax=b, όπου $b=\begin{bmatrix}1&3&5&3&2\end{bmatrix}^T$. Πρόκειται για υπόχωρο; Γιατί;

Θέμα 2°

Έστω f ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει τον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^3$, τέτοιος που:

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}7\\-2\\0\end{bmatrix}.$$

2.2 (1 μον.) Να βρεθεί πίνακας A τέτοιος ώστε $f(x)=Ax$.

2.3 (0.3 μον.) Το σύνολο των $x\in\mathbb{R}^3$ για τα οποία $f(x)=\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}^T$ λέγονται πυρήνας του μετασχηματισμού. Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα.

2.4 (0.2 μον.) Το σύνολο των $y\in\mathbb{R}^3$ για τα οποία υπάρχει $x\in\mathbb{R}^3$ τέτοιο που $f(x)=y$ λέγονται πεδίο τιμών του μετασχηματισμού. Να βρεθεί μία βάση του πεδίου τιμών.

Σεπτέμβριος 2004

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας Α:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & 6 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

1.1 (1 μον.) Να βρεθεί η παραγοντοποίηση PA=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός.

1.2 (0,5 μον.) Να βρεθεί μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του μηδενόχωρου του πίνακα Α.

Θέμα 2°

Δίνεται η παραγοντοποίηση B=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 7 & 9 \\ -10 & -15 & -11 & -14 \\ 6 & 9 & 5 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=L*U$$

διαγώνιο) και U κλιμακωτός.

2.1 (1 μον.) Να περιγραφτεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος Bx=b, όπου $b=\begin{bmatrix} 5 & 12 & 19 & -31 & 17 \end{bmatrix}^T$. Πρόκειται για υπόχωρο; Ποια η γεωμετρική του ερμηνεία;

2.2 (0,3 μον.) Θα έχω λύσεις του συστήματος Bx=d για οποιοδήποτε d; Δώστε μια βάση του υπόχωρου που σχηματίζεται από εκείνα τα d για τα οποία έχω έστω μία λύση.

2.3 (0,2 μον.) Έστω η απεικόνιση $f(x)=Bx$. Υπάρχουν x,x' με $x\neq x'$, αλλά $f(x)=f(x')$; Γιατί;

2.4 (1 μον.) Υπάρχει πίνακας $C\neq \mathbf{0}$ τέτοιος ώστε $BC=\mathbf{0}$; Πόσες ανεξάρτητες στήλες μπορεί να έχει το πολύ ένας τέτοιος πίνακας;

Θέμα 3°

(1 μον.) Έστω $a_1,\dots,a_4\in\mathbb{R}^4$ και $E_1=\mathrm{Span}(a_1,a_2)$ και $E_2=\mathrm{Span}(a_3,a_4)$ δύο επίπεδα του $\mathbb{R}^4$. Να δείξετε ότι: αν η τομή των δύο επιπέδων $E_1\cap E_2$ περιέχει και άλλα σημεία πέραν του μηδενικού $\mathbf{0}$, τότε τα $a_1,\dots,a_4$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Προβολές και ελάχιστα τετράγωνα

Φεβρουαρίου 2005

Θέμα 3ο

Δίνονται τα ακόλουθα τρία στοιχεία του R^4:

$$a=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Έστω F=Span(a, b, c) ο υπόχωρος που παράγουν τα a, b και c μαζί και $F^{\perp}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα $F^{\perp}$ του F.

3.1 (0.5 μον.) Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του F.

3.2 (0.5 μον.) Να βρεθεί ο πίνακας A, τέτοιος που για κάθε x το Ax να είναι το πλησιέστερο στο x στοιχείο του F.

3.3 (0.5 μον.) Να βρεθεί ο πίνακας B, τέτοιος που για κάθε x το Bx να είναι το πλησιέστερο στο x στοιχείο του $\mathrm{Span}(a)$.

3.4 (0.5 μον.) Να βρεθεί βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος του $\mathrm{Span}(a)$.

3.5 (0.5 μον.) Έστω $P_F(x)$ η προβολή του x στο F, και $P_a(x)$, $P_b(x)$, $P_c(x)$ η προβολές του x στο a, b και c αντίστοιχα. Θα ισχύει $P_F(x)=P_a(x)+P_b(x)+P_c(x)$; Εξηγείστε γιατί.

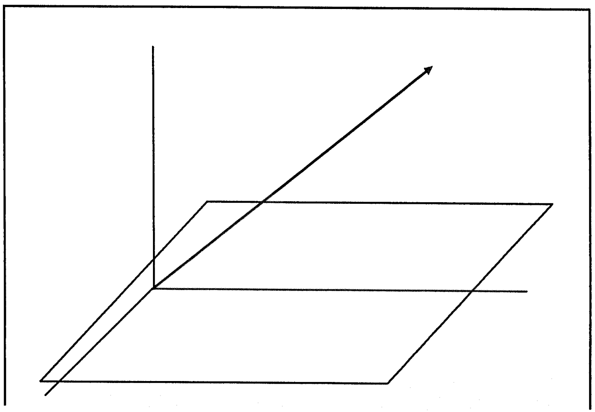
Θέμα 4ο

Έστω ότι διαθέτουμε δεδομένα $y_1,\dots,y_n$ και $z_1,\dots,z_n$. Ψάχνουμε αριθμούς β,γ τέτοιους που να ελαχιστοποιούν την ποσότητα $E=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\beta z_i-\gamma z_i^2\right)^2$.

(Προσοχή: **χωρίς σταθερά** «α»!)

4.1 (0.7 μον.) Εξηγείστε **πώς** το παραπάνω πρόβλημα γράφεται στη μορφή: «βρες $\overline{x}$ που να ελαχιστοποιεί την $E=\|Ax-b\|^2$» (για κατάλληλα A, x, b).

4.2 (0.5 μον.) Η λύση $\overline{x}$ του τελευταίου, συνδέεται με την προβολή κάποιου στοιχείου b ενός $\mathbf{R}^k$ (για κατάλληλο k) σε

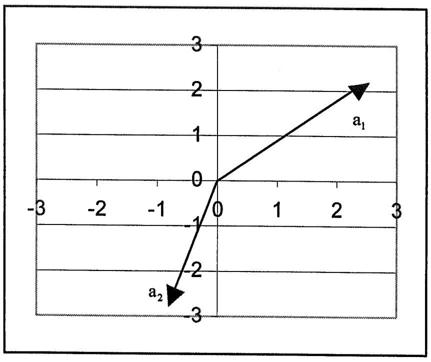


κάποιον υπόχωρο U του $\mathbf{R}^k$. Ποιο είναι το k; Ποιο είναι το στοιχείο που προβάλλεται; Δώστε μια βάση του υπόχωρου στον οποίο προβάλλεται το σημείο αυτό.

4.3 (0.8 μον.) Σχεδιάστε στη κόλλα σας τον U ως επίπεδο και τοποθετείστε το b σε κάποιο αυθαίρετο σημείο έξω από το επίπεδο, όπως στο σχήμα παραπλεύρως. Σχεδιάστε τώρα την προβολή p του b στον U. Που φαίνεται στο σχήμα σας η ποσότητα E; Ποια είναι η σχέση μεταξύ $\bar{x}$ και p;

Σεπτεμβρίου 2004

Θέμα 4ο



4.1 (0,2 μον.) Μπορεί δύο υπόχωροι που η τομή τους είναι μία ευθεία να είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους; Εξηγείστε γιατί.

4.2 (0,2 μον.) Είναι απαραίτητο δύο μεταξύ τους ορθογώνιοι υπόχωροι να είναι ορθογώνιο συμπλήρωμα ο ένας του άλλου;

4.3 (0,4 μον.) Τι διάσταση θα έχει το ορθογώνιο συμπλήρωμα μιας ευθείας που ανήκει στον $\mathbb{R}^n$; Μπορώ να βρώ σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ που να μην ανήκει ούτε στην ευθεία, ούτε στο ορθογώνιο συμπλήρωμά της;

4.4 (0,7 μον.) Επαναλάβετε (χονδρικά) το ακόλουθο σκίτσο **στη κόλλα σας**. Άν κάνω ορθοκανονικοποίηση Gramm-Schmidt στα a_1, a_2 θα πάρω q_1, q_2. Βρέστε γεωμετρικά τα q_1, q_2 και σχεδιάστε τα (χονδρικά) στο σχήμα **της κόλλας σας.**

Θέμα 5ο

Δίνονται τα ακόλουθα 4 στοιχεία του R^5:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Έστω E ο υπόχωρος που παράγουν τα a, b και c μαζί και έστω F το ορθογώνιο συμπλήρωμα του E.

5.1 (1 μον.) Να βρεθεί η προβολή του v στο E.

5.2 (0,5 μον.) Να βρεθεί πίνακας A τέτοιος ώστε --για οποιοδήποτε x-- το Ax να είναι εκείνο το πολλαπλάσιο του a που είναι πλησιέστερο στο x.

5.3 (0,5 μον.) Να βρεθούν $v_0 \in E$ και $v_1 \in F$, τέτοια ώστε $v = v_0 + v_1$.

Θέμα 6^o

Έστω ότι πραγματοποιούνται μετρήσεις (y_i,t_i), i=1,…,6:

y_1=	2.6	,	t_1=	-1
y_2=	3.2	,	t_2=	-0.7
y_3=	5	,	t_3=	-0.3
y_4=	1	,	t_4=	0.4
y_5=	1.8	,	t_5=	1.1
y_6=	3.4	,	t_6=	1.2

Θέλουμε να προσαρμόσουμε σε αυτά τα δεδομένα με ελάχιστα τετράγωνα) μία συνάρτηση h(t) της μορφής

$h(t) = h_{c,d,f,g,b}(t) = c + f * t + a * t^2$, για $t \le 0$ και $h(t) = h_{c,d,f,g,b}(t) = d + g * t + a * t^2$, για t>0.

Δηλαδή, θέλουμε να βρούμε c_0, d_0, f_0, g_0, a_0, τέτοια που να ελαχιστοποιούν την παράσταση

$$E = E_{c,d,f,g,a} = \sum_{i=1}^{6} \left(y_i - h_{c,d,f,g,a}(t_i)\right)^2 .$$

6.1 (0,7 μον.) Γράψτε το πρόβλημα στη μορφή $E = E_{c,d,f,g,a} = \|Ax - b\|^2$ για κατάλληλο πίνακα συντελεστών A και κατάλληλα x, b. Ποια θα πρέπει να είναι τα A, x, b;

6.2 (0,5 μον.) Η λύση του τελευταίου, $\overline{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$, συνδέεται με την προβολή κάποιου στοιχείου ενός $\mathbf{R}^k$ (για κατάλληλο k) σε κάποιον υπόχωρο του $\mathbf{R}^k$. Ποιο είναι το στοιχείου που προβάλλεται; Δώστε μια βάση του υπόχωρου στον οποίο προβάλλεται το σημείο αυτό.

6.3 (0,3 μον.) Αν έχουμε υπολογίσει το $\overline{x}$ πώς θα βρούμε τα c_0, d_0, f_0, g_0, a_0 που ψάχνουμε;

Τύποι που ίσως χρειαστείτε: $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ab - c^2} \begin{bmatrix} b & -c \\ -c & a \end{bmatrix}$

και $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{pmatrix}$, όπου A, B τετραγωνικοί πίνακες και $\mathbf{0}$ μηδενικοί πίνακες.

Σεπτεμβρίου 2001, Θέμα 4°

(2 μον.) Έστω $b_1,\ldots,b_k$ γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbf{R}^n$ και V ο υπόχωρος που παράγουν. Έστω c ένα άλλο στοιχείο του $\mathbf{R}^n$.

- ✓ Πως ακριβώς υπολογίζεται το c_v που ορίζεται ως εκείνο το στοιχείο του V που είναι πλησιέστερο στο c;
- ✓ Πως υπολογίζεται το c_i που ορίζεται ως εκείνο το πολλαπλάσιο του b_i ($c_i = \lambda\ b_i$) που είναι πλησιέστερο στο c;
- ✓ Υπό ποιες προϋποθέσεις στα $b_1,\ldots,b_k$ ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{k} c_i = c_V$ για κάθε c;

Υπό ποιες προϋποθέσεις στα $b_1,\ldots,b_k$ και c ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{k} c_i = c$;

Αυγούστου 2002, Θέμα 3°

Έστω b και c δύο στοιχεία του R^n.

2.5 **(0,5 μον.)** Πώς βρίσκουμε πίνακα A τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbf{R}^n$ το Ax να είναι ο πλησιέστερος στο x γραμμικός συνδυασμός των b και c; Πώς βρίσκουμε πίνακα B τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbf{R}^n$ το Bx να είναι το πλησιέστερο στο x πολλαπλάσιο του b;

2.6 **(0,5 μον.)** Αν C πίνακας τέτοιος ώστε για κάθε $x \in \mathbf{R}^n$ το Cx να είναι το πλησιέστερο στο x πολλαπλάσιο του c, θα ισχύει πάντα ότι Ax = Bx + Cx, ή όχι; Εξηγείστε...

2.7 **(1 μον.)** Για ποια x θα ισχύει Ax=x; Για ποια x θα ισχύει Ax=0; Ποιες θα είναι οι ιδιοτιμές και ποια τα ιδιοδιανύσματα του A;

2.8 **(1 μον.)** Αν P ο πίνακας προβολής στο επίπεδο που ορίζουν τα b και c να δειχτεί ότι α) P συμμετρικός, β) $P^2=P$ και γ) $\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - x^T Px$

2.9 **(1 μον.)** Αν b και c ορθοκανονικά, να δειχτεί ότι: Px = <x,b> b + <x,c> c.

2.10 **(1 μον.)** Να υπολογιστούν οι πίνακες A και B όταν

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Σεπτεμβρίου 2000, Θέμα 2°

Δίνονται τα ακόλουθα 2 **ορθοκανονικά** στοιχεία q_1, q_2 του R^4 και επίσης δίνεται το στοιχείο b του R^4:

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.1 (2 μονάδες) Να βρεθούν q_3 και q_4 (του R^4), τέτοια ώστε τα q_1, q_2, q_3, q_4 να αποτελούν ορθοκανονική βάση του R^4. (**Υπόδειξη**: βρέστε πρώτα δύο (ανεξάρτητα) διανύσματα p_3 και p_4 (του R^4), που να είναι ορθογώνια στα q_1, q_2, δηλαδή $< q_1, p >=0$ και $< q_2, p >=0$. Ποιο σύστημα πρέπει να λύσετε για να τα βρείτε; Τι πρέπει να κάνετε μετά στα τα p_3 και p_4 για να βρείτε τα q_3, q_4;)

2.2 (0,5 μονάδες) Να βρεθεί α) γραμμικός συνδυασμός των q_1, q_2, q_3, q_4 που να ισούται με b, β) γραμμικός συνδυασμός των q_1, q_2, q_3, q_4 που να ισούται με την προβολή του b στον υπόχωρο που παράγεται από τα q_1, q_2 (προσοχή μόνο από τα δύο πρώτα).(**Υπόδειξη**: Σκεφτείτε πως μπορείτε να εκμεταλλευτείτε την ορθοκανονικότητα των q_1, q_2, q_3, q_4 και η απάντηση και στα δύο ερωτήματα βγαίνει σε “δύο γραμμές”. Αν δεν έχετε λύσει το 2.1 περιγράψτε τι ακριβώς θα κάνατε αν γνωρίζατε τα q_1, q_2, q_3, q_4).

Φεβρουαρίου 2004, Θέμα 4^o

Δίνονται τα ακόλουθα τρία στοιχεία του R^4:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Έστω F=Span(a,b) ο υπόχωρος που παράγουν τα a και b μαζί και $F^{\perp}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα $F^{\perp}$ του F.

3.6 (0.4 μον.) Να βρεθεί ορθοκανονική βάση του F.

3.7 (0.4 μον.) Να βρεθεί βάση του $F^{\perp}$.

3.8 (0.5 μον.) Να βρεθεί ο πίνακας A, τέτοιος που Ay να είναι για κάθε $y \in \mathbb{R}^4$ η προβολή του y στο F.

3.9 (0.3 μον.) Να βρεθεί ο πίνακας B, τέτοιος που By να είναι για κάθε $y \in \mathbb{R}^4$ η προβολή του y στο $F^{\perp}$.

3.10 (0.3 μον.) Να βρεθεί ο πίνακας C, τέτοιος που Cy να είναι για κάθε $y \in \mathbb{R}^4$ η προβολή του y στο $Span\{b\}$.

3.11 (0.3 μον.) Να βρεθεί το σημείο του $F^{\perp}$ που απέχει λιγότερο από το x;

3.12 (0.3 μον.) Αν E ο 4x2 πίνακας με πρώτη στήλη το α και δεύτερη το β, να βρεθούν άνω τριγωνικός πίνακας S και πίνακας με ορθοκανονικές στήλες W, τέτοιοι ώστε E=WS.

Αυγούστου 2003, Θέμα 3°

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Δίνονται τα ακόλουθα 2 στοιχεία του R^4:

Και έστω E ο υπόχωρος που παράγουν τα b_1 και b_2 μαζί.

3.1 **(0.5 μον.)** Να βρεθεί μία **ορθοκανονική** βάση $\{q_1, q_2\}$ του E.

3.2 **(1 μον.)** Να βρεθεί πίνακας S, τέτοιος ώστε Sx να είναι πάντα το πλησιέστερο στο x στοιχείο του E, και πίνακας T, τέτοιος ώστε Tx να είναι πάντα το πλησιέστερο στο x στοιχείο του Span$\{b_1\}$.

2.11 **(0.5 μον.)** Αν συμβολίσουμε με $P_a(z)$ την προβολή του z στο a, και με $P_{a,b}(z)$ την προβολή του z στο Span(a,b), ποια από τα ακόλουθα είναι σωστά και ποια λάθος; Αιτιολογείστε σύντομα

- ✓ $P_{b_1,b_2}(z) = P_{q_1,q_2}(z)$
- ✓ $P_{b_1,b_2}(z) = P_{b_1}(z) + P_{b_2}(z)$
- ✓ $P_{q_1,q_2}(z) = P_{q_1}(z) + P_{q_2}(z)$

Αυγούστου 2003, Θέμα 4°

4.4 **(1 μον.)** Έστω V ένας υπόχωρος, x ένα σημείο που δεν ανήκει στον υπόχωρο και p η προβολή του x στον V (επομένως $x - p \perp y$ για κάθε $y \in V$). Να δειχτεί ότι $\|x - p\|^2 \leq \|x - z\|^2$ για κάθε $z \in V$.