

ΠΙΝΑΚΕΣ

Το σύμβολο $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ με στοιχεία a_{ij} (από ένα σώμα) διατεταγμένα σε m γραμμές και n στήλες

λέγεται **πίνακας** A . Ο $1^{\text{ος}}$ δείκτης (i) λέγεται **δείκτης γραμμής** και ο $2^{\text{ος}}$ δείκτης (j) λέγεται **δείκτης στήλης**.

Ο πίνακας δεν έχει τιμή όπως η ορίζουσα γιατί είναι σύμβολο

Υπάρχουν πίνακες με πραγματικά και μιγαδικά στοιχεία.

Δύο ή περισσότεροι πίνακες με τις ίδιες διαστάσεις (με τον ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών) ονομάζονται **ίδιου τύπου**

Ισότητα Δύο ή περισσότεροι πίνακες είναι ίσοι αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις (ίδιου τύπου) και τα αντίστοιχα ομοτάξια στοιχεία (τα στοιχεία τους στις ίδιες θέσεις) είναι ίσα.

π.χ.1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Α ίδιου τύπου με B και E , $A = E$, $A \neq B \neq \Gamma \neq \Delta$

π.χ.2) Αν δύο πίνακες είναι ίσοι τότε και τα αντίστοιχα ομοτάξια στοιχεία τους είναι ίσα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 3 \text{ και } y = 5, \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = 0, y = 2, z = -1, w = 3$$

Το σύμβολο $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας στήλη**.

Το σύμβολο $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ λέγεται **πίνακας γραμμή**.

Αν ο πίνακας είναι στήλη ή γραμμή θα ονομάζεται **διάνυσμα**.

Μηδενικός λέγεται ο πίνακας με όλα τα στοιχεία του μηδέν (0).

Ένας πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** όταν $m = n$, οπότε όταν αναφερόμαστε σε τετραγωνικό πίνακα θα το αναφέρουμε πάντα γιατί διαφορετικά εννοούμε πίνακες με τυχαίες διαστάσεις. Στον τετραγωνικό πίνακα τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ονομάζονται **διαγώνια** και όλα μαζί αποτελούν την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Άνω τριγωνικός λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο μηδέν (0),

και συμβολίζεται με $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$, ενώ αν έχει όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο μηδέν (0)

κάτω τριγωνικός και συμβολίζεται με $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

Διαγώνιος λέγεται ο τετραγωνικός πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία εκτός της κυρίας διαγωνίου μηδέν (0), και

$$\text{συμβολίζεται με } \text{diag}A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Μοναδιαίος λέγεται ο διαγώνιος που τα στοιχεία του είναι ίσα με ένα (1), και συμβολίζεται με

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Για το μοναδιαίο ισχύει η ιδιότητα: $I \cdot A = A \cdot I = A$

Ανάστροφος ενός πίνακα A λέγεται ο πίνακας που έχει γραμμές τις στήλες του A και στήλες τις γραμμές του A.

$$\text{Συμβολίζεται με } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ π.χ. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ιδιότητα } (A^T)^T = A$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **συμμετρικός** αν είναι ίσος με τον ανάστροφό του και **αντισυμμετρικός** αν είναι ίσος με το μείον ανάστροφό του. Δηλ. $A = A^T$ συμμετρικός και $A = -A^T$ αντισυμμετρικός. Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ άρα A συμμετρικός, } B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -B \text{ άρα B αντισυμμετρικός.}$$

$$\text{Ο } \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \Gamma^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \neq \Gamma \text{ δεν είναι συμμετρικός.}$$

Πίνακες με μιγαδικά στοιχεία

Έστω A τετραγωνικός πίνακας με μιγαδικά στοιχεία.

Συμβολίζουμε με $\bar{A}$ τον **συζυγή** του A όπου όλα τα στοιχεία του $\bar{A}$ είναι τα συζυγή των στοιχείων του A και με A^* τον αναστροφοςυζυγή του A, δηλ. $A^* = (\bar{A})^T$.

Ο A λέγεται **Ερμιτιανός** όταν $A = A^*$ και **αντιερμιτιανός** όταν $A = -A^*$ π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 3i & 3-i \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ -3i & 3+i \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Delta} = \begin{bmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta^* = \begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 4 \end{bmatrix} = \Delta \text{ ο } \Delta \text{ είναι ερμιτιανός.}$$

Οι πίνακες A με την ιδιότητα $AA^* = A^*A$ λέγονται **κανονικοί**

Πράξεις πινάκων

Πρόσθεση

Για να προσθέσουμε πίνακες πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις (ιδίου τύπου). Προσθέτουμε τα αντίστοιχα ομοτάξια στοιχεία τους π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με πραγματικό αριθμό είναι ο πολλαπλασιασμός κάθε στοιχείου του πίνακα επί τον αριθμό αυτόν π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}. \text{ Να υπολογιστούν το } A+B \text{ και το } 3A+2B-5I$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$3A + 2B - 5I = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες

- i) $A + B = B + A$ αντιμεταθετική
- ii) $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$ προσεταιριστική
- iii) $A + 0 = 0 + A = A$ ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου
- iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ύπαρξη αντιθέτου στοιχείου
- v) $\kappa(A + B) = \kappa A + \kappa B$
- vi) $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$
- vii) $\kappa(\lambda A) = (\kappa \lambda)A$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathfrak{R}$

Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Για να είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός πινάκων πρέπει ο αριθμός των στηλών του 1^{ου} πίνακα να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του 2^{ου} πίνακα, τότε το γινόμενο θα είναι ένας πίνακας με αριθμό γραμμών τον αριθμό των γραμμών του 1^{ου} πίνακα και αριθμό στηλών τον αριθμό στηλών του 2^{ου} πίνακα και τα στοιχεία θα είναι το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της i-γραμμής του 1^{ου} πίνακα με τα στοιχεία της j-στήλης του 2^{ου} πίνακα. Δηλ.

Για να υπολογίσουμε το γινόμενο των πινάκων A και B θα πρέπει το πλήθος των στηλών του B να ισούται με το πλήθος των γραμμών του A.

$$A_{\mu \times \nu} \bullet B_{\nu \times \rho} \rightarrow \Gamma_{\mu \times \rho}$$

το στοιχείο γ_{ij} του πίνακα Γ είναι ίσο με το αλγεβρικό άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων στοιχείων της i-γραμμής και j-στήλης.

$$\text{Π.χ.: Αν } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \text{ τότε το γινόμενο θάναι πίνακας } 2 \times 3:$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \alpha_{11}b_{11} + \alpha_{12}b_{21} & \alpha_{11}b_{12} + \alpha_{12}b_{22} & \alpha_{11}b_{13} + \alpha_{12}b_{23} \\ \alpha_{21}b_{11} + \alpha_{22}b_{21} & \alpha_{21}b_{12} + \alpha_{22}b_{22} & \alpha_{21}b_{13} + \alpha_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

Αριθμητικά παραδείγματα

$$\alpha) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 39 \end{bmatrix}$$

$$\beta) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\gamma) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 5 & 8 \\ 16 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\delta) [1 \quad 2 \quad 3] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32 \text{ (αριθμός)}$$

$$\varepsilon) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [4 \quad 5 \quad 6] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\zeta) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot [5 \quad 6] \text{ Δεν γίνεται ο πολλαπλασιασμός}$$

Ιδιότητες γινομένου

$$A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$(A \pm B)\Gamma = A\Gamma \pm B\Gamma$$

$$A(B \pm \Gamma) = AB \pm A\Gamma$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Συνήθως $AB \neq BA$ γιατί δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολ/σμό πινάκων.

$$\text{Π.χ. Αν } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & \kappa \end{bmatrix}, \text{ για ποια τιμή του } \kappa \text{ οι πίνακες } A, B \text{ είναι αντιμεταθετικοί;}$$

Λύση: Πρέπει $AB=BA$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4(3-\kappa) \\ -30 & \kappa-20 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & -24 \\ 5(3-\kappa) & \kappa-20 \end{bmatrix}, \text{ οπότε προκύπτει } \kappa=9$$

Δυνάμεις Πινάκων – Ιδιότητες

$$A^m = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \text{ (} m \text{ φορές) όπου } A \text{ τετραγωνικός και } m \in \mathbb{N}$$

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$$

$$(A^m)^n = A^{m \cdot n}$$

$$(k \cdot A)^n = k^n \cdot A^n \text{ και}$$

$$(A \cdot B)^n = A^n \cdot B^n, \text{ όταν } A \cdot B = B \cdot A$$

1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω εκφράσεις όταν αυτό είναι δυνατό :

$$\alpha) 3A - 2B \quad \beta) AE \quad \gamma) CA \quad \delta) EA \quad \varepsilon) AB^T + D \quad \sigma\tau) D^2$$

όπου B^T δηλώνει τον ανάστροφο πίνακα του B .

1.α

$$\begin{aligned} 3 \cdot A - 2 \cdot B &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - (-2) & 3 - 2 & 0 - 2 \\ 0 + 2 & 3 - 0 & -3 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.β

$$A \cdot E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 2 \times 3 & \cdot & 3 \times 1 \\ \downarrow \\ \text{θα προκύψει} \\ \text{πίνακας } 2 \times 1 \end{matrix}$

Ο αριθμός των στηλών του A ισούται με τον αριθμό των γραμμών του E

$$1.\gamma \quad C \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 3 \times 2 & \cdot & 2 \times 3 \\ \downarrow \\ 3 \times 3 \end{matrix}$

1.δ

$$E \cdot A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 3 \times 1 & \cdot & 2 \times 3 \\ \downarrow \end{matrix}$

Επειδή το πλήθος των στηλών του E(1) δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του A, ο πολ/σμός των πινάκων E,A δεν είναι δυνατός

1.ε $A \cdot B^T + D$

$$B^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB^T + D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 1 + 0 & -1 + 0 + 0 \\ 0 + 1 - 1 & 0 + 0 - 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{matrix} 2 \times 3 & \cdot & 3 \times 2 \\ \downarrow \\ 2 \times 2 \\ 2 \times 2 \oplus 2 \times 2 \\ \downarrow \\ 2 \times 2 \end{matrix}$

1.στ

$$D^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ο D είναι τετραγωνικός } D^2 = D \cdot D \Rightarrow D^2 = \begin{bmatrix} 1-1 & -1-1 \\ 1+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$