

Πινακές προβολής

Ορισμός 1 (Πίνακας προβολής) Ως πίνακα προβολής ορίζουμε τον

$$P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top$$

Θεώρημα 1 Ένας πίνακας P είναι προβολή αν

- $P^2 = P$
- $P^\top = P$

Ο πίνακας προβολής προβάλει στον $\mathcal{R}(A)$, το σύνολο τιμών δηλαδή του A (ή ισοδύναμα των χώρων των στηλών του A) και είναι $m \times n$ - όχι απαραίτητα τετραγώνικος.

Αν $b \notin \mathcal{R}(A)$ τότε $P_A b = b_1$ και $b = b_1 + b_2$ όπου $b_1 \in \mathcal{R}(A)$ και $b_2 \in \mathcal{R}(A)^\perp$. Άρα παρατηρούμε ότι “κόβει” το διάνυσμα b σε 2 άλλα, τα b_1 και b_2 .

Αν ο πίνακας A αντιστρέφεται τότε $P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top = AA^{-1}A^{\top^{-1}}A^\top = I$. Άρα $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$.

Παράδειγμα Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\text{rank}(A) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x+y \\ 3x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ x+k \\ 2x+k \end{bmatrix} \quad x, k \in \mathbb{R}$$

Ας βρούμε τον πίνακα προβολής. Έχουμε

$$P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top = \dots = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 \end{bmatrix}$$

Αν δράσουμε στο $u^\top = (1, -2, 3)$ τον πίνακα προβολής θα έχουμε:

$$P_A u = \dots = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

όπου παρατηρούμε ότι ανήκει στον $\mathcal{R}(A)$.

