

Διανυσματική Γεωμετρία

Διάνυσμα (γεωμετρική περιγραφή) ονομάζεται γενικά ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, που το ένα άκρο του είναι η αρχή και το άλλο το πέρας. (έχει δηλ. καθορισμένη αρχή και τέλος).

Δύο διανύσματα θα θεωρούμε ότι είναι **ίσα** εάν το ένα προκύπτει από το άλλο με παράλληλη μετατόπιση, δηλ. δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα θα θεωρούμε ότι περιγράφουν το ίδιο διάνυσμα αν έχουν το ίδιο μήκος και την ίδια κατεύθυνση.

Φορέας είναι η ευθεία πάνω στην οποία ολισθαίνει το διάνυσμα π.χ. $\overrightarrow{OA}$ ή $\vec{A}$ (βλέπε σχήμα). Η **διεύθυνση** μας δείχνει ποια είναι η αρχή και ποιο το πέρας του διανύσματος (κατεύθυνση).

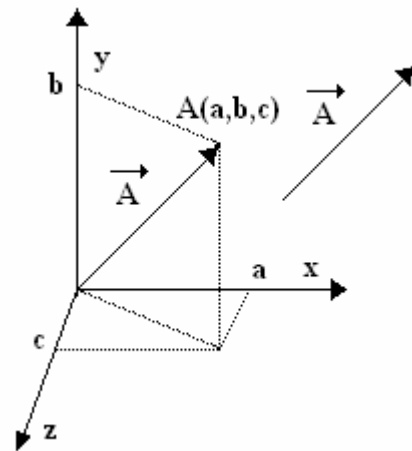
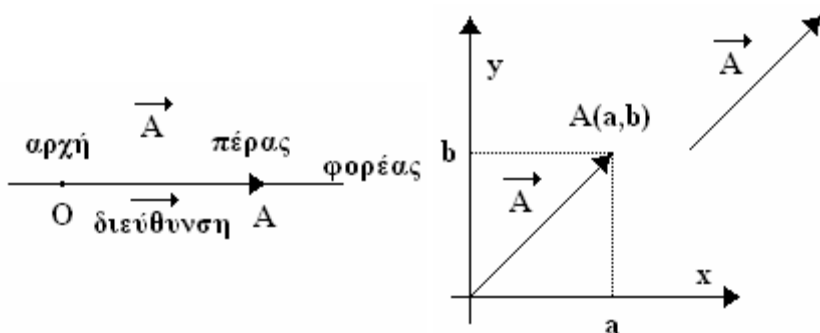
Το **διάνυσμα** λοιπόν (αλγεβρική περιγραφή) $\overrightarrow{OA}$ ή $\vec{A}$ στο επίπεδο περιγράφεται σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος $\vec{A} = \overrightarrow{OA} = (a, b)$, όπου (a, b) είναι το σημείο που αποτελεί το πέρας του $\overrightarrow{OA}$ ή $\vec{A}$ αν θεωρήσουμε, ότι η αρχή O ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων (βλέπε σχήμα). Επειδή υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου με τα στοιχεία των πινάκων του τύπου $[2 \times 1]$ θα είναι $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Στο χώρο το **διάνυσμα** $\overrightarrow{OA}$ ή $\vec{A}$ περιγράφεται σαν μια διατεταγμένη τριάδα $\vec{A} = \overrightarrow{OA} = (a, b, c)$, όπου (a, b, c) είναι οι συντεταγμένες του σημείου που αποτελεί το

πέρας του $\overrightarrow{OA}$ ή $\vec{A}$ ως προς τον x, y και z καρτεσιανό άξονα (βλέπε σχήμα).

Λόγω της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας μεταξύ των σημείων του χώρου με τα στοιχεία

των πινάκων του τύπου $[3 \times 1]$ θα είναι $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.



Το **μέτρο** του διανύσματος $\vec{A} = \overrightarrow{OA} = (a, b)$ ή $\vec{A} = \overrightarrow{OA} = (a, b, c)$ συμβολίζεται με $\|\vec{A}\|$ ή

$\|\overrightarrow{OA}\|$, ισούται με $\sqrt{a^2 + b^2}$ ή $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ και εκφράζει το μήκος του

προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος που περιγράφει το $\|\vec{A}\|$ ή $\|\overrightarrow{OA}\|$.

Μοναδιαίο διάνυσμα είναι αυτό που έχει μέτρο τη μονάδα. Δηλ. $\|\overrightarrow{OA}\| = 1$

Οι δύο $\parallel$ ανάμεσα σε ένα διάνυσμα είναι το μέτρο του διανύσματος OA (Βλέπε σελίδα 11)

Διανυσματική μονάδα $\vec{A}_0$ του $\vec{A}$ είναι το $\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$

Παρατήρηση: Εάν $\vec{A} = (a, b)$ μη μηδενικό διάνυσμα, το διάνυσμα

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \left(\frac{a}{\|\vec{A}\|}, \frac{b}{\|\vec{A}\|} \right) = (\cos \theta, \sin \theta) \text{ είναι μοναδιαίο και έχει την ίδια κατεύθυνση με το } \vec{A}$$

Βασικά διανύσματα

Είναι τα $\hat{i} = (1, 0)$ και $\hat{j} = (0, 1)$ που είναι μοναδιαία διανύσματα που έχουν την κατεύθυνση των αξόνων. Για κάθε διάνυσμα $\vec{A} = (a, b)$ παρατηρούμε ότι:
 $\vec{A} = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\hat{i} + b\hat{j}$

Παράλληλα διανύσματα είναι αυτά που βρίσκονται στον ίδιο ή σε παράλληλους φορείς (λέγονται και συγγραμμικά)
 Ομόρροπα λέγονται όταν έχουν την ίδια φορά.

Εφαρμοστό διάνυσμα λέγεται αυτό που έχει καθορισμένη αρχή π.χ. $\vec{AB}$

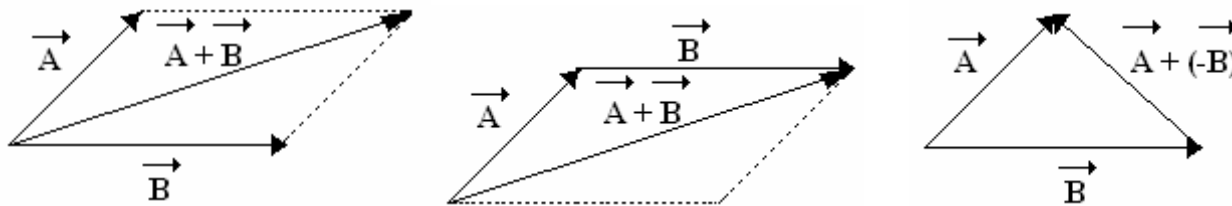
Ολισθαίνων διάνυσμα λέγεται αυτό που βρίσκεται πάνω σε καθορισμένη ευθεία (ή σύνολο διανυσμάτων που είναι ίσα και πάνω στην ίδια ευθεία)

Ελεύθερο διάνυσμα είναι αυτό που έχει καθορισμένο μέτρο, διεύθυνση, φορά αλλά όχι σημείο εφαρμογής (ή σύνολο ίσων διανυσμάτων του χώρου).

Πράξεις Διανυσμάτων

Πρόσθεση διανυσμάτων (γεωμετρική ερμηνεία)

$\vec{a} + \vec{b}$ = η διαγώνιος του παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ή



$\vec{a} + \vec{b}$ = η 3^η πλευρά του τριγώνου με φορά την αρχή του 1^{ου} και το πέρας του 2^{ου}.

Αφαίρεση διανυσμάτων

Η διαφορά $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ και η κατασκευή της

Πολλαπλασιασμός με αριθμό. Αν $\vec{A} = (a, b)$ και $m \in \mathbb{R}$ τότε $m\vec{A} = (ma, mb)$. Η γεωμετρική του ερμηνεία είναι το διάνυσμα $m\vec{A}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{A}$ αν $m > 0$, ενώ θα έχει αντίθετη κατεύθυνση αν $m < 0$. Επίσης θα έχουμε $\|m \cdot \vec{A}\| = |m| \cdot \|\vec{A}\|$. Με πίνακες οι πράξεις γίνονται συνιστώσα με συνιστώσα όπως αναφέραμε στην αρχή.

$$\text{Αν } \vec{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ και } m = 5 \text{ τότε}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{A} - \vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ και } m \cdot \vec{A} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό Γινόμενο

Το εσωτερικό γινόμενο δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων $\vec{A} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και

$\vec{B} = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ συμβολίζεται με $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ή $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και ορίζεται ως εξής:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$. Είναι εμφανές βέβαια ότι για να είναι εφικτό το

γινόμενο πρέπει αντί για $\vec{A}$ να πάρουμε τον ανάστροφο πίνακα $\vec{A}^T$, π.χ. το εσωτερικό

γινόμενο των $\vec{A} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ και $\vec{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ είναι

$$\vec{A}^T \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 5 \end{bmatrix} = 11$$

Ιδιότητες

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

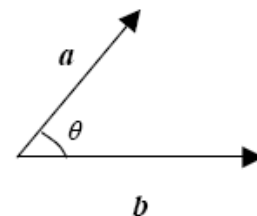
$$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$$

$$\vec{0} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\text{Αν } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \eta \quad \vec{a} = \vec{0} \\ \eta \quad \vec{b} = \vec{0} \\ \eta \quad \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \end{cases}$$

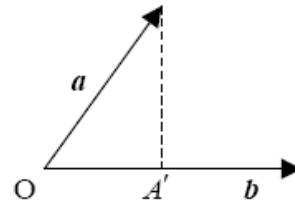
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \text{ όταν τα διανύσματα είναι παράλληλα μεταξύ τους}$$



Η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων (βλέπε σχήμα) $\vec{a}, \vec{b}$ δίνεται από τη σχέση

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Η προβολή του διανύσματος $\vec{a}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{b}$ ορίζεται ως



$$OA' = \text{προβ}_{\vec{b}} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b}$$

Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ συμβολίζεται με $[\vec{a}, \vec{b}]$ ή $[\vec{a} \times \vec{b}]$ είναι το διάνυσμα που έχει

$$\text{Μέτρο } \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Διεύθυνση κάθετη προς τα $\vec{a}, \vec{b}$

Με φορά τέτοια ώστε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα.

Ιδιότητες

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = -[\vec{b} \times \vec{a}]$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow [\vec{a} \times \vec{b}] = 0$$

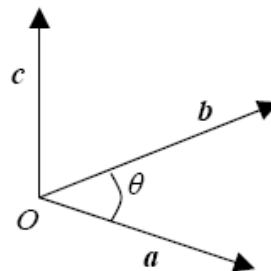
$$\text{Ειδικά: } [\vec{a} \times \vec{a}] = 0$$

$$[\vec{a} \times \vec{0}] = [\vec{0} \times \vec{a}] = \vec{0}$$

$$\text{Αν } [\vec{a} \times \vec{b}] = 0 \text{ και } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$[\lambda \vec{a} \times \vec{b}] = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}] = [\vec{a} \times \lambda \vec{b}], \lambda \in \mathbb{R}$$

Γεωμετρικά $[\vec{a} \times \vec{b}]$ = εμβαδό παραλληλογράμμου με πλευρές $\vec{a}, \vec{b}$



Το Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ συμβολίζεται ως $[\vec{a}, \vec{b}]$ και δίνεται από την σχέση

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$$

Εάν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά τότε $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$.

Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ συμβολίζεται με $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ και είναι $\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]$

Ιδιότητα

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \sin(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) \cos(\widehat{\vec{a}, [\vec{b} \times \vec{c}]})$$

Γεωμετρικά το $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ όγκος παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Ιδιότητες

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ συνεπίπεδα}$$

$$\text{Με συντεταγμένες το μικτό γινόμενο είναι } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Δισεξωτερικό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ συμβολίζεται $[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]]$ ή απλώς $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$

Ιδιότητες

$$[\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a} \times \vec{b}] + [\vec{a} \times \vec{c}]$$

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] \neq [[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}]$$

$$[\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$[[\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}] = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

Σχέση μεταξύ εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου (τύπος) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - [\vec{a} \times \vec{b}]^2$

Σημείωση: Το Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων είναι αριθμός ενώ το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων είναι διάνυσμα

Παράδειγμα:

Αν $OA = [1 \ 2 \ -1]^T$, $OB = [0 \ 1 \ 2]^T$, $OG = [1 \ -1 \ 0]^T$ να βρεθούν οι συντεταγμένες του $OD = ([OA, OB] \cdot [OB, OG])OA - (OA \cdot OB)OG$

Λύση Εξωτερικό Γινόμενο:

$$\begin{aligned}
[OA, OB] &= [a_1 i + a_2 j + a_3 k, \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k] = \\
&= [a_1 i + a_2 j + a_3 k, \beta_1 i] + [a_1 i + a_2 j + a_3 k, \beta_2 j] + [a_1 i + a_2 j + a_3 k, \beta_3 k] = \\
&= \{[a_1 i, \beta_1 i] + [a_2 j, \beta_1 i] + [a_3 k, \beta_1 i]\} + \{[a_1 i, \beta_2 j] + [a_2 j, \beta_2 j] + [a_3 k, \beta_2 j]\} + \\
&+ \{[a_1 i, \beta_3 k] + [a_2 j, \beta_3 k] + [a_3 k, \beta_3 k]\} = \\
&= a_1 \cdot \beta_1 \cdot [i, i] + a_2 \cdot \beta_1 \cdot [j, i] + a_3 \cdot \beta_1 \cdot [k, i] + a_1 \cdot \beta_2 \cdot [i, j] + a_2 \cdot \beta_2 \cdot [j, j] + a_3 \cdot \beta_2 \cdot [k, j] + \\
&+ a_1 \cdot \beta_3 \cdot [i, k] + a_2 \cdot \beta_3 \cdot [j, k] + a_3 \cdot \beta_3 \cdot [k, k] = (\lambda \acute{o} \gamma \omega \quad \tau \eta \varsigma \quad 1.3. \sigma \epsilon \lambda.13) \\
&= 0 + a_2 \cdot \beta_1 \cdot (-k) + a_3 \cdot \beta_1 \cdot j + 0 + a_1 \cdot \beta_2 \cdot k + 0 + a_3 \cdot \beta_2 \cdot (-i) + a_1 \cdot \beta_3 \cdot (-j) + a_2 \cdot \beta_3 \cdot i + 0 = \\
&= (a_2 \cdot \beta_3 - a_3 \cdot \beta_2) \cdot i + (a_3 \cdot \beta_1 - a_1 \cdot \beta_3) \cdot j + (a_1 \cdot \beta_2 - a_2 \cdot \beta_1) \cdot k \quad (1.4)
\end{aligned}$$

$$\text{Όμοια } [OB, OG] = (\beta_2 \cdot \gamma_3 - \beta_3 \cdot \gamma_2) \cdot i + (\beta_3 \cdot \gamma_1 - \beta_1 \cdot \gamma_3) \cdot j + (\beta_1 \cdot \gamma_2 - \beta_2 \cdot \gamma_1) \cdot k$$

$$\text{Άρα: } [OA, OB] = [5 \quad -2 \quad 1]^T, [OB, OG] = [2 \quad 2 \quad -1]^T$$

Το εσωτερικό γινόμενο

$$([OA, OB] \cdot [OB, OG]) = [5 \quad -2 \quad 1]^T \cdot [2 \quad 2 \quad -1]^T = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = 5$$

$$\text{και } (OA \cdot OB) = ([1 \quad 2 \quad -1]^T \cdot [0 \quad 1 \quad 2]^T) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$$

$$\text{Οπότε } O\Delta = 5OA = 5[1 \quad 2 \quad -1]^T = [5 \quad 10 \quad -5]^T$$

Συνοπτικά

$$\text{Αν } (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \text{ και αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\text{Αν } [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{0} \text{ και αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\text{Διάνυσμα } \vec{c} \perp \text{ στο επίπεδο των } \vec{a}, \vec{b} \text{ είναι το } [\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Διάνυσμα } \vec{c} \text{ συνεπίπεδο των } \vec{a}, \vec{b} \text{ είναι το } [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{0}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ δεξιόστροφo σύστημα.}$$

$$[\vec{i} \times \vec{j}] = \vec{k}, [\vec{j} \times \vec{k}] = \vec{i}, [\vec{k} \times \vec{i}] = \vec{j}$$