

Η ΔΙΑΣΠΑΣΗ CHOLESKY

Οι θετικά ορισμένοι πίνακες, επειδή ο αντίστοιχος πίνακας τους είναι συμμετρικός, μπορούν να παραγοντοποιηθούν με τον ακόλουθο τρόπο:

Κάθε θετικά ορισμένος πίνακας A μπορεί να γραφτεί με την μορφή $A = LDL^T$, όπου ο L είναι κάτω τριγωνικός με την μονάδα στην κύρια διαγώνιο του, και ο D διαγώνιος με θετικά τα στοιχεία της διαγωνίου του.

Η παραγοντοποίηση αυτή μπορεί να γραφτεί και με την μορφή $A = LL^T$, όπου ο L είναι κάτω τριγωνικός με θετικά τα στοιχεία της διαγωνίου του.

(Διάσπαση Cholesky)

Για να υπολογίσουμε αρχικά την μορφή $A = LDL^T$, φέρνουμε πρώτα τον πίνακα στην μορφή $A = LU$, όπου U ένας άνω τριγωνικός πίνακας που προκύπτει εφαρμόζοντας την μέθοδο Gauss στον A και φέρνοντας τον σε κλιμακωτή μορφή. Ο πίνακας L έχει μονάδες στην διαγώνιο του, και τα στοιχεία του L που είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι οι πολλαπλασιαστές των οδηγών κατά την αναγωγή του A σε κλιμακωτό.

Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπάνω την παραγοντοποίηση LU , μπορούμε να πάρουμε τα διαγώνια στοιχεία του U και να τον «σπάσουμε» σε δύο πίνακες, κάνοντας τα έναν ξεχωριστό διαγώνιο πίνακα, τον D . Μάλιστα, λόγω της συμμετρίας του πίνακα A , ο πίνακας που θα πάρουμε στο τέλος θα είναι ο L^T .

Δηλαδή, η παραγοντοποίηση $A = LU$ παίρνει την μορφή $A = LDL^T$.

Ο πίνακας D έχει θετικά διαγώνια στοιχεία. Βασιζόμενοι σε αυτό το γεγονός, μπορούμε να πάρουμε τις τετραγωνικές ρίζες των διαγώνιων αυτών στοιχείων, και να πάμε την παραγοντοποίηση ακόμα ένα βήμα πιο πέρα: Θέτουμε $L_1 = LD^{\frac{1}{2}}$ και έτσι

έχουμε $A = LDL^T = LD^{\frac{1}{2}} \left(D^{\frac{1}{2}} \right)^T L^T = L_1 L_1^T$, με L_1 κάτω τριγωνικό με θετικά διαγώνια στοιχεία.

Όλα αυτά θα γίνουν πιο κατανοητά με το επόμενο παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Έστω $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Αυτός είναι θετικά ορισμένος.

Για να μηδενίσουμε τα στοιχεία από το 4 και κάτω, κάνουμε την γραμμοπράξη:

Γραμμή 2 = Γραμμή 2 - $\frac{1}{2}$ Γραμμή 1.

Γραμμή 3 = Γραμμή 3 + $\frac{1}{2}$ Γραμμή 1

Τότε, ο πίνακας γίνεται : $A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Τώρα, θα μηδενίσουμε το στοιχείο κάτω

από το 9: Γραμμή 3 = Γραμμή 3 - $\frac{1}{3}$ Γραμμή 2. Έτσι έχουμε:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U. \text{ Ο πίνακας } L \text{ είναι ο } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι ισχύει $A = LU$. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, παίρνουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T.$$

Δηλαδή, η $A = LU$ θα γίνει $A = LDL^T$, με $U = DL^T$.

$$\text{Θέτουμε } L_1 = LD^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \text{ και έτσι}$$

$$L_1 L_1^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix} = A$$

Η μορφή που καταλήξαμε λέγεται διάσπαση Cholesky και είναι χρήσιμη σε αριθμητικούς υπολογισμούς.

Υπάρχουν πολλοί αλγόριθμοι που την χρησιμοποιούν για να λύσουν συμμετρικά θετικά ορισμένα γραμμικά συστήματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Έστω $B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ένας θετικά ορισμένος πίνακας.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο Gauss στον B και έχουμε:

Για να μηδενίσουμε το στοιχείο από το 9 και κάτω, κάνουμε την γραμμοπράξη:

Γραμμή 2 = Γραμμή 2 + 1/3 Γραμμή 1.

$$B^1 = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = U. \text{ Τότε, ο πίνακας } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Έτσι, } B = LU = LDL^T \text{ με } D = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } L^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Θέτουμε } L_1 = LD^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και έτσι παίρνουμε :}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = L_1 L_1^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ (Διάσπαση Cholesky)}$$