

Γραμμικά Συστήματα

Ένα γραμμικό σύστημα m εξισώσεων και n αγνώστων είναι ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned},$$

όπου τα a_{ij}, b_i είναι πραγματικοί αριθμοί και τα x_i είναι οι άγνωστοι. Υπενθυμίζουμε ότι ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση ή ακριβώς μία λύση ([παράδειγμα](#)). Ένα γραμμικό σύστημα που δεν έχει λύση ονομάζεται **ασυμβίβαστο**. Διαφορετικά, ονομάζεται **συμβίβαστο**. Στο κεφάλαιο αυτό μας ενδιαφέρει να μάθουμε πότε ένα γραμμικό σύστημα έχει λύσεις και - στην περίπτωση που υπάρχουν λύσεις - πόσες είναι αυτές και πως τις βρίσκουμε. Αυτό επιτυγχάνεται κατά συστηματικό τρόπο με τη χρήση πινάκων, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Υπό μορφή πινάκων, το προηγούμενο σύστημα μπορεί να γραφεί

$$AX = b$$

όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Ο A ονομάζεται πίνακας των συντελεστών του συστήματος και ο

b πίνακας των σταθερών του συστήματος. Ο $m \times (n+1)$ πίνακας $(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ ονομάζεται

επαυξημένος πίνακας του συστήματος. Για παράδειγμα, στο γραμμικό σύστημα

$$2x - 3y = 4$$

$$5x + y = 7$$

έχουμε $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Κλιμακωτή μορφή πίνακα. Ένας πίνακας της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1j_1} & a_{2j_1} & \dots & & & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{2j_2} & a_{2j_2+1} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rj_r} & a_{rj_r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{mj_m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

όπου

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r \text{ και } a_{1j_1} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \dots, a_{rj_r} \neq 0$$

λέμε ότι βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή. Παρατηρούμε ότι εκτός ενδεχομένως από την πρώτη γραμμή, κάθε άλλη αρχίζει με διαδοχικά 0 και η αμέσως επόμενη αρχίζει με περισσότερα διαδοχικά 0 (εκτός ενδεχομένως από τις τελευταίες γραμμές που είναι δυνατόν να αποτελούνται αποκλειστικά από 0). Για παράδειγμα, από τους πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \boxed{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

μόνο ο δεύτερος και ο τέταρτος δεν είναι σε κλιμακωτή μορφή λόγω των στοιχείων που έχουν σημειωθεί σε τετραγωνάκι.

2. Οι **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** πίνακα είναι οι ακόλουθοι

1. εναλλαγή δύο γραμμών
2. πολλαπλασιασμός γραμμής με μη μηδενική σταθερά
3. πρόσθεση σε μια γραμμή αριθμητικού πολλαπλασίου άλλης.

(Σημείωση: Τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εφαρμόσαμε και στην Ιδιότητα 16 του II.2 για τον υπολογισμό αντίστροφου πίνακα)

Παραδείγματα επίλυσης γραμμικών συστημάτων

Ένας τρόπος να λύσουμε το σύστημα

$$2x - y = 1$$

$$6x + 5y = 2$$

είναι: πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με 3 και στη συνέχεια αφαιρούμε από τη δεύτερη. Λαμβάνουμε τα ισοδύναμα συστήματα

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 6x + 5y = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{3\Gamma_1} \left. \begin{array}{l} 6x - 3y = 3 \\ 6x + 5y = 2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\Gamma_2 - \Gamma_1} \left. \begin{array}{l} 6x - 3y = 3 \\ 8y = -1 \end{array} \right\}.$$

Από την τελευταία εξίσωση του συστήματος $\begin{array}{l} 6x - 3y = 3 \\ 8y = -1 \end{array}$ βρίσκουμε το y και αντικαθιστώντας στην πρώτη

βρίσκουμε το x . Έχοντας κατά νου αυτό το απλό παράδειγμα, παρατηρούμε ότι ένα γραμμικό σύστημα $AX = b$ μπορεί να λυθεί συστηματικά μετατρέποντας τον επαυξημένο πίνακα (A, b) σε κλιμακωτή μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών. Ακολουθούν μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\x + 3y + z &= 11 \\2x + 5y - 4z &= 13 \\2x + 6y + 2z &= 22.\end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{aligned}(A, b) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Αφού μηδενίσαμε τα στοιχεία της πρώτης στήλης που ευρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο, συνεχίζουμε με τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\Gamma_4 - 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή, πράγμα που σημαίνει ότι το αντίστοιχο σύστημα

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= 4 \\y + 4z &= 7 \\-2z &= -2 \\0 &= 0\end{aligned}$$

επιλύεται εύκολα. Πράγματι, από την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε $z = 1$, οπότε αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε $y = 3$, και από την πρώτη $x = 1$. Τελικά, το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x, y, z) = (1, 3, 1)$.

Παράδειγμα 2. *Ας δούμε ένα παράδειγμα όπου το σύστημα είναι ασυμβίβαστο. Να λυθεί το*

$$x + 2y - 3z = -1$$

$$3x - y + 2z = 7 \quad .$$

$$5x + 3y - 4z = 2$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - 5\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

$$x + 2y - 3z = -1$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι $-7y + 11x = 10$ που είναι ασυμβίβαστο λόγω της εξίσωσης $0 = -3$.

$$0 = -3$$

Παράδειγμα 3. *Τέλος ας δούμε ένα παράδειγμα όπου υπάρχουν άπειρες λύσεις. Να λυθεί το σύστημα*

$$x + 2y - 3z = 6$$

$$2x - y + 4z = 2$$

$$4x + 3y - 2z = 14.$$

Λύση

Έχουμε $(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών εύκολα βρίσκουμε ότι ο

πίνακας μετατρέπεται στην κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$x + 2y - 3z = 6$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι $y - 2z = 2$.

$$0 = 0$$

Από την δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε $y = 2 + 2z$, οπότε η πρώτη δίνει $x = 2 - z$. Τελικά έχουμε τις άπειρες λύσεις $(x, y, z) = (2 - z, 2 + 2z, z)$, όπου το z διατρέχει τους πραγματικούς αριθμούς (το z είναι 'ελεύθερη μεταβλητή'). Για παράδειγμα, αν $z = 1$, η αντίστοιχη λύση είναι $(1, 4, 1)$.

Περίληψη

Έστω το γραμμικό σύστημα $AX = b$ και έστω K η κλιμακωτή μορφή του επανζημένου πίνακα (A, b) .

- Το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν το K δεν περιέχει γραμμή της μορφής $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ c$ με $c \neq 0$.
- Έστω ότι το σύστημα είναι συμβιβαστό. Αν το K δεν περιέχει γραμμή της μορφής $0 \ 0 \ \dots \ 0$, τότε το σύστημα έχει ακριβώς μία λύση. ([Προσοχή](#))

Τάξη πίνακα Η τάξη ενός πίνακα ορίζεται ως το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών στην κλιμακωτή μορφή του

πίνακα. Για παράδειγμα, η τάξη του $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{pmatrix}$ είναι 2 γιατί η κλιμακωτή μορφή είναι (βλ. προηγούμενο

παράδειγμα) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ που έχει 2 μη μηδενικές γραμμές. Η τάξη του $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (που είναι ήδη σε

κλιμακωτή μορφή) είναι 3. Η τάξη του A συμβολίζεται $\text{rank} A$.

Παράδειγμα συστήματος με παράμετρο

$$\alpha x + y + z = 1$$

Για ποιές τιμές της παραμέτρου α το παρακάτω σύστημα

$$x + \alpha y + z = 1$$

$$x + y + \alpha z = 1$$

(α) έχει άπειρες λύσεις, (β) έχει ακριβώς μία λύση, (γ) δεν έχει λύση. Να βρεθούν οι λύσεις όπου υπάρχουν.

Λύση

$$1x + y + \alpha z = 1$$

Αλλάζοντας τη σειρά των γραμμών γράφουμε το σύστημα ως $x + \alpha y + z = 1$. Μετά από στοιχειώδεις πράξεις, ο

$$\alpha x + y + z = 1$$

επανζημένος πίνακας γίνεται $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(2+\alpha) & (1-\alpha)(1+\alpha) \end{pmatrix}$. Αν $\alpha = 1$, ο πίνακας γίνεται

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, οπότε υπάρχουν άπειρες λύσεις $(x, y, z) = (1 - y - z, y, z)$ με $y, z \in \mathbb{R}$.

Έστω τώρα $\alpha \neq 1$. Διαιρώντας με το $1 - \alpha$ τη δεύτερη και τρίτη γραμμή παίρνουμε $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$.

Εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν $\alpha = -2$, τότε από την τελευταία γραμμή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα δεν έχει λύσεις.

Αν $\alpha \neq -2$, τότε παίρνουμε από την τελευταία γραμμή $z = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$. Συνεπώς η δεύτερη δίνει $y = z = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$. Τότε η

πρώτη δίνει $x = \frac{1-\alpha-\alpha^2}{2+\alpha}$.

Παράδειγμα χρήσης του κανόνα Cramer

$$2x + y - 2z = 10$$

Έστω το σύστημα $3x + 2y + 2z = 1$. Ο πίνακας των συντελεστών είναι αντιστρέψιμος γιατί

$$5x + 4y + 3z = 4$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = -7 \neq 0. \text{ Συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση. Έχουμε}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τις ορίζουσες και σύμφωνα με τον κανόνα του Cramer έχουμε

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-7}{-7} = 1, y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-14}{-7} = 2, z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{21}{-7} = -3.$$

Επομένως, το σύστημα έχει :

- Μοναδική λύση όταν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -3$,

$$\left\{ x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{(3+\lambda)}, x_3 = \frac{1}{(3+\lambda)} \right\}$$

- Άπειρες λύσεις όταν $\lambda = 2$ τις $\{x_1 = 5x_3, x_2 = 1 - 4x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$
- Καμία λύση όταν $\lambda = -3$.

Παρατηρήσεις

Αν η ορίζουσα είναι 0 τότε έχουμε κάτι παρόμοιο με το $0 \cdot x = b$. Ακόμα δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα. Το αν υπάρχει λύση εξαρτάται από το b . Αν $b=0$ τότε έχουμε πολλές λύσεις η εξίσωση είναι η $0 \cdot x = 0$.

Αν $b \neq 0$, τότε έχουμε $0 \cdot x = 5$ αδύνατη εξίσωση.

Κάτι ανάλογο έχουμε και με τα συστήματα αλλά πιο πολύπλοκο. Δεν φτάνει μόνο η ορίζουσα, πρέπει να δούμε και κάποιες άλλες ορίζουσες επιπλέον για να βγάλουμε συμπέρασμα.

Η ιδέα είναι ότι αν στον τύπο για τον x_i έχουμε παρανομαστή 0 και έναν τουλάχιστο αριθμητή όχι 0 τότε έχουμε αδύνατο σύστημα. Αν όλοι οι αριθμητές και παρανομαστές είναι 0 τότε είμαστε στην περίπτωση $0 \cdot x = 0$, αόριστο.