ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ

. **(στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών)** Έστω $A$ τετραγωνικός $n \quad n$ πίνακας. Σχηματίζουμε τον $n \quad 2n$ πίνακα $C = A|I$ τοποθετώντας δίπλα στον $A$ τον μοναδιαίο πίνακα I. Στον $C$ εφαρμόζουμε *στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών* (ήτοι, πρόσθεση σε μια γραμμή αριθμητικού πολλαπλασίου άλλης γραμμή ή/και πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό ή/και εναλλαγή θέσης δύο γραμμών) με σκοπό να προκύψει πίνακας της μορφής $I|B$. Αν αυτό είναι δυνατό, τότε ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και το αντίστροφό του είναι το $B$. Σε διαφορετική περίπτωση, ο $A$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Εφαρμογή

**1)** Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή αρχικά σε ένα πολύ απλό παράδειγμα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών έχουμε

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \to -\frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Άρα ο $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (Στο τελευταίο βήμα των πράξεων, το $\Gamma_2 \to -\frac{1}{2}\Gamma_2$ σημαίνει ότι η δεύερη γραμμή πολλαπλασιάζεται με το $-\frac{1}{2}$.)

**2)** Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Τότε $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 - 3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to -\frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 + \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Άρα $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -2 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.