

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

6^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f(tx) = tf(x)$ για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.
2. Σχεδιάστε τις συναρτήσεις $f(x) = [x]$ και $g(x) = x - [x]$, όπου $[\]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος. Είναι συνεχείς συναρτήσεις ναι ή όχι και γιατί; Αν δεν είναι συνεχείς ποιά είναι τα σημεία ασυνέχειας;
3. Υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
Υπόδειξη: Επιλέξτε διαφορετικές ακολουθίες $a_n \rightarrow 0$.
4. $\diamond \star$ Δείξτε ότι ένα πολυώνυμο τάξης m , όπου m περιττός έχει πάντοτε μια πραγματική ρίζα.
5. ΝΔΟ η σύνθεση μιας αύξουσας και κυρτής με μια κυρτή συνάρτηση είναι κυρτή
6. $\diamond \star$ Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής τότε και η συνάρτηση $|f|$ είναι επίσης συνεχής. Επίσης δείξτε ότι αν f, g συνεχείς τότε και $\max(f, g)$ συνεχής και $\min(f, g)$ συνεχής.
Υπόδειξη: Θυμηθείτε την τριγωνική ανισότητα $||x| - |y|| \leq |x - y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Προσπαθείστε να γράψετε το $\max(f, g)$ και $\min(f, g)$ χρησιμοποιώντας την απόλυτη τιμή.
7. Έστω $I, m \neq 0$, διάστημα I και $f, g : I \rightarrow \hat{\mathbb{A}}$ κυρτές στο I . ΝΔΟ οι $f + mg : I \rightarrow \hat{\mathbb{A}}$ και $\max\{f, g\} : I \rightarrow \hat{\mathbb{A}}$ είναι κυρτές στο I
8. Έστω συνάρτηση f συνεχής και 1-1 στο διάστημα I . ΝΔΟ η f είναι γνησίως μονότονη στο I
9. ΝΔΟ αν μια συνάρτηση είναι αυστηρά κυρτή έχει μοναδικό ελάχιστο.
10. ΝΔΟ η $f(x) = e^{x^2}$ είναι κυρτή συνάρτηση