

4^ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Να δείξετε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_n = \sin \frac{\pi}{2} n^{\frac{2}{3}}$ δεν έχει όριο. Τι έχετε να πείτε για τα \limsup και \liminf .
2. Να δείξετε ότι εν γένει $\limsup(a_n + b_n) \neq \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$
3. Να δείξετε ότι η διπλή ακολουθία $a_{n,m} = \frac{1}{n+m}$ συγκλίνει στο 0 για $n, m \in \mathbb{N}$
4. Τι έχετε να πείτε για τις διπλές ακολουθίες
 - α) $a_{n,m} = \frac{m}{n+m}$ και β) $a_{n,m} = \frac{n \cdot m}{n^2 + m^2}$
5. Δείξτε ότι εν γένει για μια ακολουθία ισχύει $\liminf a_n \leq \limsup a_n$. Τι συμβαίνει αν το άνω και κάτω όριο είναι ίσα;
6. Δείξτε ότι $\limsup(-a_n) = -\liminf(a_n)$
7. Χρησιμοποιείστε παραδείγματα για να καταλάβετε την άλγεβρα του άνω και του κάτω ορίου.
8. * Δείξτε ότι $\limsup(a_n + b_n) = \limsup(a_n) + \limsup(b_n)$ αν τουλάχιστον μια από τις δύο ακολουθίες συγκλίνει. Προσπαθείστε να δείτε τι συμβαίνει με το κάτω όριο.
9. α) ΝΔΟ η $\{x_n\} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει
 β) ΝΔΟ η $\{x_n\} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ συγκλίνει
 γ) Αν $\{x_{2n}\} \in x$ και $\{x_{2n+1}\} \in x$ τότε ΝΔΟ η $\{x_n\} \in x$
 δ) Έστω $\{x_n\}$ και $\{x_{2n}\}, \{x_{2n+1}\}, \{x_{3n}\}$ συγκλίνουν τότε ΝΔΟ η $\{x_n\}$ συγκλίνει
10. Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ συγκλίνει στο 0.
11. * Δείξτε ότι αν $\limsup a_n = a$ τότε για κάθε ϵ , υπάρχει μόνο πεπερασμένο το πλήθος όροι της ακολουθίας για τους οποίους ισχύει $a_n > a + \epsilon$ και άπειροι το πλήθος όροι για τους οποίους ισχύει $a_n > a - \epsilon$. Επίσης δείξτε ότι $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$.