3ο ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ

1. Δείξτε ότι αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε $a_n b_n \to ab$.
2. ♠ Δείξτε ότι μια συγκλίνουσα ακολουθία (δηλ. σε πεπερασμένο πραγματικό αριθμό) είναι φραγμένη.
3. Δείξτε ότι μια ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη. Ισχύει πάντοτε το αντίστροφο;
4. ⋆ ♠ Δίνεται μια ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq C\,|a_{n+1} - a_n|$ για $C < 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει. (Υποδειξη: Προσπαθείστε να δείξετε ότι μια τέτοια ακολουθία έχει την ιδιότητα Cauchy.)
5. Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι απόλυτα φραγμένη.
6. Αν $\{a_n\}$ μηδενική ακολουθία και $\{b_n\}$ φραγμένη ακολουθία, να δείξετε ότι η $\{a_n b_n\}$ μηδενική.
7. Αν $\{a_n\}$ μηδενική ακολουθία και $|b_n| \leq |a_n| \ \forall\, n > n_0$, να δείξετε ότι η $\{b_n\}$ μηδενική.
8. Αν μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει σ’ένα πραγματικό αριθμό α, τότε και κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο α.
9. Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.
10. Αν $0 < a < 1$ και $|a_{n+1} - a_n| \leq a^n$ να δείξετε ότι η $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{a_n\},\ \forall\, n \in \mathbb{N} : |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ και η $\{a_n\},\ n \in \mathbb{N}$ να μην συγκλίνει.