Μαθηματικός Λογισμός Ι **Φθινόπωρο 2011**
Σημειώσεις 17-10-11
Μ. Ζαζάνης

1 Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Θα συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών, $\{1, 2, 3, \ldots\}$ με το σύμβολο $\mathbb{N}$. Το σύνολο των φυσικών αριθμών, συμπεριλαμβανομένου και του μηδενός, συμβολίζεται με $\mathbb{N}_0$.

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής. *Εστω $P(n)$ πρόταση που εξαρτάται από τον φυσικό n. Αν η $P(1)$ είναι αληθής και αν $P(n)$ αληθής συνεπάγεται ότι $P(n+1)$ αληθής, τότε η $P(n)$ είναι αληθής $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Παράδειγμα 1: Εστω $P(n)$ η πρόταση $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Η $P(1)$ είναι αληθής διότι $1 = \frac{1}{2}1 \cdot 2$. (Επαληθεύουμε την *βάση της επαγωγής*)

Εστω $P(n)$ αληθής. Τότε $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ και προσθέτοντας και στα δύο μέλη της εξίσωσης την ποσότητα $n + 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = (n+1)\left(\frac{1}{2}n + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν δεχθούμε ότι ισχύει η $P(n)$ τότε θα πρέπει να αληθεύει και η $P(n+1)$. (Επαλήθευση του *επαγωγικού βήματος*).

Άρα η $P(n)$ ισχύει $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 2: Εστω $P(n)$ η πρόταση $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Βάση της επαγωγής: $1^2 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 1 = 1$, συνεπώς η $P(1)$ είναι αληθής.

Επαγωγικό Βήμα: Εστω $P(n)$ αληθής. Ας προσθέσουμε και στα δύο μέλη της εξίσωσης $P(n)$ τον όρο $(n+1)^2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \\ &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1 \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1).\end{aligned}$$

(Η τελευταία ισότητα μπορεί να ελεγχεί εύκολα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(n-1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ και $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.) Επομένως το επαγωγικό βήμα επαληθεύθηκε και η πρόταση ισχύει για κάθε φυσικό.

Πριν προχωρήσουμε αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μαθηματική επαγωγή είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την απόδειξη προτάσεων που σχετίζονται με τους φυσικούς αριθμούς, δεν είναι όμως εργαλείο ανακάλυψης τέτοιων προτάσεων. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, ξεκινήσαμε με μια εικασία για το άθροισμα των πρώτων n φυσικών, ή για το άθροισμα των τετραγώνων τους, την οποία στη συνέχεια αποδείξαμε με την βοήθεια της επαγωγής. Πώς όμως προκύπτουν τέτοιες εικασίες· Για ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων υπάρχουν γενικές μέθοδοι ενώ για άλλες χρειάζεται σκέψη, διαίσθηση και πειραματισμός με ειδικές περιπτώσεις. Για παράδειγμα την απάντηση στο πρώτο πρόβλημα, το άθροισμα των n πρώτων φυσικών, μπορούμε να την βρούμε ως εξής: Εστω $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Τότε

$$2S_n = \begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ & & & & + & & & & \\ n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array} = n(n+1)$$

από όπου αμέσως προκύπτει ότι $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Το δεύτερο παράδειγμα είναι πιο δύσκολο αλλά, βασιζόμενοι στο πρώτο θα μπορούσαμε να υποθέσουμε (χωρίς να είμαστε βέβαιοι για την ορθότητα της υπόθεσης) ότι υπάρχουν αριθμοί A, B, C, D. τέτοιοι ώστε

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = An^3 + Bn^2 + Cn \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Θέτωντας $n = 1, 2, 3$ στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} 1 &= A + B + C \\ 5 &= 8A + 4B + 2C \\ 14 &= 27A + 9B + 3C \end{aligned}$$

Από το παραπάνω σύστημα προκύπτουν οι τιμές $A = 1/3$, $B = 1/2$, $C = 1/6$. Έχοντας μαντέψει την πιθανή λύση μπορούμε τώρα να δοκιμάσουμε να αποδείξουμε ότι είναι σωστή επαγωγικά.

Παράδειγμα 3: [**Ανισότητα του Bernoulli**] Εστω $a > -1$ πραγματικός αριθμός και $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \tag{1}$$

Εχουμε πάλι μια πρόταση για κάθε φυσικό n, η οποία προφανώς ισχύει για $n = 1$. (Πράγματι όταν $n = 1$ η πρόταση γίνεται $1 + a \geq 1 + a$.) Συνεπώς η βάση της επαγωγής έχει επαληθευθεί. Εστω ότι η πρόταση ισχύει για n. Αφού εξ υποθέσεως $a > -1$, έχουμε $1+a > 0$ και συνεπώς αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας με $(1 + a)$ η φορά της δέν αλλάζει. Συνεπώς έχουμε

$$(1 + a)^{(n+1)} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

(Η τελευταία ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι $a^2 \geq 0$). Επομένως δείξαμε ότι, αν η ανισότητα ισχύει για n θα πρέπει να ισχύει και για $n + 1$, δηλαδή επαληθεύσαμε το επαγωγικό βήμα. Συνεπώς η ανισότητα ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\frac{1}{1 + a} \geq 1 - a \tag{2}$$

υπό την προϋπόθεση πάντα ότι $a > -1$. Πράγματι η ανισότητα (2) είναι ισοδύναμη με την $1 \geq (1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$ που είναι αληθής.