ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ο **ανάστροφος** πίνακας του $A=[a_{ij}]$ σημειώνεται με $A^T=[a_{ji}]$, (δηλαδή, οι γραμμές γίνονται στήλες και αντίστροφα).

Ιδιότητες: • $(A^T)^T=A$ • $(A+B)^T=A^T+B^T$

• $(\lambda A)^T=\lambda A^T$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$ • $(AB)^T=B^TA^T$

Ο **αντίστροφος** ενός $n\times n$ πίνακα $A=[a_{ij}]$ συμβολίζεται με A^{-1} και ισχύει $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$.

Ιδιότητες αντίστροφων πινάκων:

• $(A^{-1})^{-1}=A$ • $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

• $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ • $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

Ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας τετραγωνικού πίνακα $A=[a_{ij}]$ ως προς την i γραμμή ή την j στήλη:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

όπου $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ και M_{ij} η ελάσσων ορίζουσα του στοιχείου ij (ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει εάν αφαιρέσουμε την i γραμμή και την j στήλη από τον *A*).

Ιδιότητες ορίζουσας του $n\times n$ πίνακα A:

- $\det(A^T)=\det(A)$
- $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$, $\forall \lambda\in\mathbb{R}$
- $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
- $\det(A^k)=[\det(A)]^k$, $\forall k\in\mathbb{R}$
- A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ και

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)$$

όπου $adj(A)=\left[A_{ij}\right]^T=\left[(-1)^{i+j}M_{ij}\right]^T$.

* * * * * * * * * * * * *

• Ένα μη κενό υποσύνολο U του πραγματικού διανυσματικού χώρου V είναι **υπόχωρος** του δ.χ. V αν και μόνο αν $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\forall\ \boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in U$ ισχύει $k\boldsymbol{u}_1+\lambda\boldsymbol{u}_2\in U$.

• Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** όταν
$\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{v}_k=\boldsymbol{0}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$

• Ένα σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ του δ.χ. V είναι μία **βάση** του V αν και μόνο αν

I. τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

II. Ο δ.χ. V παράγεται από τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k$

και τότε η **διάσταση** του V είναι $\dim V=k$.

• Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης δ.χ. και U,W υπόχωροι του V, τότε ισχύει

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W).$$

• Για το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων $U,W\subseteq V$ του πεπερασμένης διάστασης δ.χ. V ισχύει

$V=U\oplus W\ \Leftrightarrow$

$V=U+W$ και $U\cap W=\{\boldsymbol{0}\}\ \Leftrightarrow$

$V=U+W$ και $\dim V=\dim U+\dim W$

* * * * * * * * * * * * *

Εσωτερικό γινόμενο

Για κάθε $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, το **εσωτερικό γινόμενο** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύουν οι ιδιότητες

I. $(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=k(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})+\lambda(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})$,
$\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$, $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$

II. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$, $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$

III. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\geq 0$ **και** $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

• Το **μέτρο** του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ ορίζεται από τον τύπο $\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$.

• Η **γωνία** $\omega\in[0,\pi]$ **δύο διανυσμάτων** μη μηδενικών ορίζεται από τον τύπο $\cos\omega=\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|}$.

Τα διανύσματα $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ είναι **κάθετα** αν και μόνο αν $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$.

Για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ιδιότητες:

I. $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0\ \Leftrightarrow\ \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$

II. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

III. $\|\lambda\boldsymbol{x}\|\leq|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

IV. $|\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}|\leq\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ (**Cauchy-Schwarz**)

· **Προβολή** $\boldsymbol{p}$ διανύσματος $\boldsymbol{x}$ στη διεύθυνση του $\boldsymbol{y}$ είναι $\boldsymbol{p}=\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}\boldsymbol{y}$.

· Το **ορθογώνιο συμπλήρωμα** ενός υπόχωρου $E\subseteq\mathbb{R}^n$ είναι ο υπόχωρος

$$E^{\perp}=\left\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n:\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0,\ \forall\ \boldsymbol{x}\in E\right\}.$$

Επιπλέον, $E\oplus E^{\perp}=\mathbb{R}^n$, $(E^{\perp})^{\perp}=E$.

· Μία βάση $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_k\in\mathbb{R}^n$ ονομάζεται ορθοκανονική αν και μόνο αν τα διανύσματα ανά δύο κάθετα και μοναδιαία (δηλ. $\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{u}_j=0$, $\|\boldsymbol{u}_i\|=1$)

· Αν $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$, τα διανύσματα

$\eta_1=\xi_1$ και

$$\eta_j=\xi_j-\frac{\xi_j\cdot\eta_1}{\eta_1\cdot\eta_1}\eta_1-\frac{\xi_j\cdot\eta_2}{\eta_2\cdot\eta_2}\eta_2-\cdots-\frac{\xi_j\cdot\eta_{j-1}}{\eta_{j-1}\cdot\eta_{j-1}}\eta_{j-1}$$ για κάθε $j=2,3,\ldots,k$

είναι κάθετα μεταξύ τους, τα δε διανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\eta_1}{\|\eta_1\|},\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{\eta_2}{\|\eta_2\|},\quad \ldots,\boldsymbol{u}_k=\frac{\eta_k}{\|\eta_k\|}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

· Ο πραγματικός τετραγωνικός πίνακας A με την ιδιότητα $AA^T=A^TA=I$ ονομάζεται **ορθογώνιος**.
Στον ορθογώνιο πίνακα οι στήλες του (και οι γραμμές του) είναι ορθοκανονική βάση.
Για τους ορθογώνιους πίνακες ισχύουν επιπλέον οι ιδιότητες:

I. $|\det A|=1$

II. $A^{-1}=A^T$

III. $\|A\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$

IV. $A\boldsymbol{x}\cdot A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$

V. Γινόμενο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

* * * * * * * * * * * * *

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Έστω U,V είναι πραγματικοί διανυσματικοί χώροι. Μία απεικόνιση $f:U\to V$ ονομάζεται **γραμμική** ή **γραμμικός μετασχηματισμός**, όταν $f(k\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y})=kf(\boldsymbol{x})+\lambda f(\boldsymbol{y})$, $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ και $\forall\ k,\lambda\in\mathbb{R}$.

Το σύνολο $\ker f=\{\boldsymbol{x}\in U:\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}\subseteq U$ ονομάζεται **πυρήνας** της f και είναι υπόχωρος του U.

Το σύνολο $\operatorname{Im} f=\{\boldsymbol{y}\in V:\ f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}\in V\}\subseteq V$ λέγεται **εικόνα** της f και είναι υπόχωρος του V.

Για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ ισχύει $\dim U=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **ένα-προς-ένα** (1-1) αν $\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$ με $f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{y})\Rightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

Η $f:U\to V$ λέγεται **επί** αν $\operatorname{Im} f=V$.

· Έστω η γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ και τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ είναι βάση του U, τα δε $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$ είναι βάση του V. Από τις ισότητες

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1)&=a_{11}\boldsymbol{v}_1+a_{21}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{v}_m\\ f(\boldsymbol{u}_2)&=a_{12}\boldsymbol{v}_1+a_{22}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{m2}\boldsymbol{v}_m\\ &\ \vdots\\ f(\boldsymbol{u}_n)&=a_{1n}\boldsymbol{v}_1+a_{2n}\boldsymbol{v}_2+\cdots+a_{mn}\boldsymbol{v}_m\end{aligned}$$

ορίζεται ο $m\times n$ πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},$$

που ονομάζεται **πίνακας αναπαράστασης** της f ως προς τις βάσεις $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ και $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_m$. Για τον πίνακα A ισχύει $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$, για κάθε $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{bmatrix}^T\in U$.

· Αν για τους διανυσματικούς χώρους ισχύει $\dim U=\dim V=n$, τότε για τη γραμμική απεικόνιση $f:U\to V$ οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

I. f αντιστρέψιμη (υπάρχει η f^{-1})

II. f είναι 1-1

III. $\ker f=\{\boldsymbol{0}\}$

IV. f είναι επί

* * * * * * * * * * * * *

Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα πίνακα

Για έναν $n\times n$ πίνακα A οι **ιδιοτιμές** λ_i του πίνακα είναι οι n ρίζες του **χαρακτηριστικού πολυωνύμου**

$$p(\lambda)=\det\left(\lambda I-A\right)=\det\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$
$$=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$$

Αν ο A είναι τριγωνικός ή διαγώνιος, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του.

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, $i=1,2,\ldots,n$, τα αντίστοιχα **ιδιοδιανύσματα** είναι οι μη μηδενικές λύσεις $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\end{bmatrix}^T$ του ομογενούς συστήματος $\left(A-\lambda I\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, που είναι:

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda_i)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda_i)x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=0\\ &\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda_i)x_n&=0\end{aligned}$$

· Για τις ιδιοτιμές του A ισχύουν:

$$\det A=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\cdots\cdot\lambda_n=(-1)^n a_0$$

και $trA=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=-a_{n-1}$,

όπου a_0,a_{n-1} οι αντίστοιχοι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(\lambda)$.

Αν λ_i ιδιοτιμή και $\boldsymbol{x}_i$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A, τότε λ_i^k, $\boldsymbol{x}_i$ είναι ιδιοποσά του A^k.

Οι ιδιοτιμές συμμετρικού πίνακα είναι αριθμοί πραγματικοί, τα δε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

• Ο πίνακας A **διαγωνοποιείται**, όταν $A=PDP^{-1}$, όπου D είναι διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και P είναι ο πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.

• Αν $f(\lambda)$ είναι πολυώνυμο, τότε

$$f(A)=P\,f(D)\,P^{-1}=P\,diag\left(f(\lambda_1),f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_n)\right)P^{-1}$$

• Κάθε συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται και ιδιαίτερα υπάρχει ορθογώνιος πίνακας Q, ώστε

$$A=Q\,diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)Q^T.$$

• Αν $p(\lambda)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα A, τότε ισχύει

$$p(A)=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0I=O,$$

από το *θεώρημα των* ***Cayley-Hamilton.*** Αν $\upsilon(\lambda)$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $f(\lambda)$ δια του $p(\lambda)$, τότε $f(A)=\upsilon(A)$.

Τετραγωνικές μορφές

Το πολυώνυμο των πραγματικών μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ της μορφής $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$, όπου $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$ και A είναι συμμετρικός πίνακας, ονομάζεται **τετραγωνική μορφή**. Αν $A = QDQ^T$, τότε η $F(\boldsymbol{x})$ μετασχηματίζεται στη **διαγώνια μορφή**

$$F(\boldsymbol{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

όπου $\boldsymbol{y} = [y_1\ y_2\ \ldots\ y_n]^T = Q^T \boldsymbol{x}$.

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0\ (<0)$ η F λέγεται **θετικά (αρνητικά) ορισμένη**, αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0\ (\leq 0)$ λέγεται **θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη**, ενώ, σε κάθε άλλο συνδυασμό προσήμων των λ_i ονομάζεται **αόριστη**.

* * * * * * * * * * * * *

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$

$f: A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y$ ή $y = f(x),\ x \in A$,

Γραφική παράσταση συνάρτησης f

$C_f = \{M(x,y) : y = f(x)\}$

- Συνάρτηση f **γνησίως αύξουσα** στο A
$f(x_1) < f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- Συνάρτηση f **γνησίως φθίνουσα** στο A
$f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$.
- **Άνω φραγμένη** συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$

Υπάρχει αριθμός s (άνω φράγμα της f) με την ιδιότητα: $f(x) \leq s$, $\forall\ x \in A$.

(Ανάλογα ορίζεται η κάτω φραγμένη).

Φραγμένη λέγεται η συνάρτηση αν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

- 1-1 συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$: $\forall\ x_1, x_2 \in A$ αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα: αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Σύνθεση της $f: A \to \mathbb{R}$ με την $g: B \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in A$ για τα οποία $f(x) \in B$.

Αντίστροφη συνάρτηση μιας 1-1 συνάρτησης f είναι η $f^{-1}: f(A) \to A$, που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ στο μοναδικό x, για το οποίο ισχύει $y = f(x)$, δηλ. $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

✓ *Όριο συνάρτησης στο x_0 - Πλευρικά όρια*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

✓ *Κριτήριο παρεμβολής*:

Αν $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Η ιδιότητα αυτή ισχύει και στην περίπτωση που $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

✓ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

✓ *Συνέχεια*

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

* * * * * * * * * * * * *

Παράγωγος συνάρτησης

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη ευθεία της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

- Αν f είναι παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής

Ιδιότητες παραγώγων

- $\left(cf(x)\right)' = cf'(x),\quad c \in \mathbb{R}$
- $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ g(x) \neq 0$
- Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφη f^{-1} είναι παραγωγίσιμη τότε

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'},\quad f' \neq 0$$

- Η παράγωγος της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ είναι

$$\left(f(g(x))\right)' = \frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))g'(x) = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Παράγωγοι στοιχειωδών συναρτήσεων

$f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = k\,x^{k-1}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \sin^{-1} x = arc\sin x$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$f(x) = \tan^{-1} x = arc\tan x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Κανόνας l' Hospital

Πρώτη διατύπωση: Αν $f(a) = g(a) = 0$ και $f'(a), g'(a)$ υπάρχουν και $g'(a) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Δεύτερη διατύπωση : Αν $f(x_0) = g(x_0) = 0$, με $f(x), g(x)$ διαφορίσιμες στο (a,b), και $g'(x) \neq 0$, εκτός πιθανώς του $x_0 \in (a,b)$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ο κανόνας ξαναχρησιμοποιείται αν ισχύουν οι ίδιες συνθήκες και για τις παραγώγους των $f(x), g(x)$.

- Στις απροσδιόριστες $\dfrac{\pm\infty}{\mp\infty}, \infty - \infty, \infty \cdot 0$ γίνονται οι μετατροπές

$\infty / \infty \to \dfrac{f}{g} = \dfrac{1/g}{1/f}$ $\qquad 0 \times (\pm\infty) \to fg = \dfrac{f}{1/g}$

$\infty - \infty \to f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/fg}$

- Τις απροσδιόριστες 0^0, $+\infty^0$, 1^∞ τις μετατρέπουμε με βάση τη σχέση $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a}(g(x)\ln f(x))}$ ($f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$)

Εφαρμογές των παραγώγων στο σχεδιασμό της C_f της $f: A \to \mathbb{R}$, με I διάστημα τέτοιο ώστε $I \subseteq A$

✓ *Από πρώτη παράγωγο*

- Αν $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in I$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο I.
- Αν $f'(x) < 0$, $\forall\ x \in I$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο I.
- Αν $f'(x_0) = 0$, για κάποιο $x_0 \in A$ με $f'(x) > 0$, $\forall\ x < x_0$ και $f'(x) < 0$, $\forall\ x > x_0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου. (Ανάλογα για το ελάχιστο).

✓ *Από δεύτερη παράγωγο*

- Αν $f''(x) > 0$, $\forall\ x \in I$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο I.
- Αν $f''(x) < 0$, $\forall\ x \in I$, τότε η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο I.
- Αν $f''(x) > 0$, $\forall\ x < x_0$ και $f''(x) < 0$, $\forall\ x > x_0$ (ή αντίστροφα), τότε το x_0 είναι σημείο καμπής.
- **α)** Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

  β) Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε το x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Ασύμπτωτες

- *Κάθετη* ασύμπτωτη η ευθεία $x = a \in \mathbb{R}$, αν

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

- *Οριζόντια* ασύμπτωτη η ευθεία $y = b \in \mathbb{R}$, αν

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

- *Πλάγια ασύμπτωτη* της C_f στο $\pm\infty$ η ευθεία $y = ax + b$, αν $\lim_{x \to \pm\infty}\left(f(x) - ax - b\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to \pm\infty}(f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$

* * * * * * * * * * * * *

Σημαντικά θεωρήματα

Έστω η συνάρτηση $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

✓ *Bolzano:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

✓ *Ενδιάμεσης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και $f(a) \neq f(b)$, τότε, για κάθε αριθμό ρ μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \rho$.

✓ *Μέγιστης - ελάχιστης τιμής:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$. Επιπλέον υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ έτσι ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall\ x \in [a,b]$.

✓ *Θεώρημα μέσης τιμής* (ΘΜΤ)*:* Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

✓ *Rolle:* Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi) = 0$.

✓ Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f'(x) = 0$, $\forall\ x \in (a,b)$, τότε $f(x) = c$, $\forall\ x \in (a,b)$.

✓ *Cauchy:* Αν οι $f(x), g(x)$ είναι ορισμένες, συνεχείς στο $[a,b]$, είναι διαφορίσιμες στο (a,b) και $g'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in (a,b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

✓ *Darboux:* Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f'(a) \geq f'(b)$. Αν $c \in \mathbb{R}$ με $f'(b) < c < f'(a)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = c$.

Εφαρμογή του θεωρήματος για την προσέγγιση ρίζας: Έστω ότι η εξίσωση $x = f(x)$ έχει ρίζα a, με f να είναι παραγωγίσιμη στο $[a - h, a + h]$, να ισχύει $|f'(x)| < m < 1$, $\forall\ x \in [a - h, a + h]$ και έστω αυθαίρετο $x_0 \in [a - h, a + h]$. Τότε η ακολουθία $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, συγκλίνει μονότονα στη ρίζα a.

* * * * * * * * * * * * *

Ορισμένο ολοκλήρωμα

- Κάθε συνεχής f είναι ολοκληρώσιμη
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$
- ΘΜΤ f συνεχής, τότε για κάποιο $\xi \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Αόριστο ολοκλήρωμα ή αντιπαράγωγος

$f(x)+c = \int g(x)dx \Leftrightarrow \left(f(x)+c\right)' = g(x)$

Ιδιότητες

$\int \left(c_1 f(x) + c_2 h(x)\right)dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int h(x)dx$

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

(παραγοντική ολοκλήρωση)

$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$

Τυπολόγιο

- $\int k dx = kx + c$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{adx}{x^2+a^2} = \tan^{-1}(\frac{x}{a}) + c = arc\tan(\frac{x}{a}) + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c = arc\sin(\frac{x}{a}) + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$

Θεμελιώδη θεωρήματα Ολοκληρωτικού Λογισμού

I. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

II. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

* * * * * * * * * * * * *

Γενικευμένα Ολοκληρώματα

(α' είδους) $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$

ή $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

(β' είδους) $\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

(b ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

(a ιδιόμορφο σημείο)

(γ' είδους) = συνδυασμός α', β' είδους

$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)dx$

με $a<c<b$ (a,b ιδιόμορφα σημεία)

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$

$\int_{-\infty}^{a^-} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^c f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_c^{a-\varepsilon} f(x)dx$

(a ιδιόμορφο σημείο)

$\int_{a^+}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$

(a ιδιόμορφο σημείο)

(εσωτερικό ιδιόμορφο σημείο $c\in[a,b]$ **- πρωτεύουσα τιμή του Cauchy)**

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$

(c ιδιόμορφο σημείο)

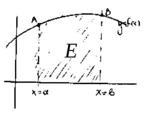
$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ (a ιδιόμορφο σημείο)

Ο **μετασχηματισμός Laplace** μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι

$L\{f(t)\}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$, για κάθε τιμή του x για την οποία το παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

* * * * * * * * * * * * *

Εφαρμογές Ολοκληρωμάτων



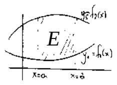
$E = \int_a^b f(x)dx,\ \ f(x) \ge 0$

$S = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$ (μήκος επίπεδης καμπύλης)

$E_{ox} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$ (επιφάνεια από περιστροφή)

$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$ (όγκος από περιστροφή)

$E = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$



$V_{ox} = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x)\right]dx$

* * * * * * * * * * * * *

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ-ΣΕΙΡΕΣ

- **Ακολουθία** είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Συμβολίζεται $a_n = a(n)$.

Πρόοδοι

Αριθμητική: $a_{n+1} = a_n + \omega$, $a_n = a_1 + (n-1)\cdot\omega$

Άθροισμα n όρων α.π.: $S_n = \frac{n\cdot[2a_1 + (n-1)\cdot\omega]}{2}$

Γεωμετρική: $a_{n+1} = \lambda a_n$ ή $a_n = \lambda^{n-1}\cdot a_1$

Άθροισμα n όρων γ.π.: $S_n = a_1\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$, $\lambda \ne 1$.

Γεωμετρικός μέσος: Αν a,b,c είναι 3 διαδοχικοί όροι γ.π. τότε $b^2 = a\cdot c$.

Σημαντικά όρια

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,\ \ \|x\|<1$
$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty$	$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1,\ \ x>0$
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

όπου x σταθερός αριθμός.

Φραγμένες ακολουθίες

- _άνω φραγμένη_: $a_n \le M$, $n\in\mathbb{N}$, για κάποιο $M\in\mathbb{R}$.
- _κάτω φραγμένη_: $m \le a_n$, $n\in\mathbb{N}$, για κάποιο $m\in\mathbb{R}$.
- _Φραγμένη_: συγχρόνως άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν $m\le a_n\le M$, $n\in\mathbb{N}$, για κάποια $m,M\in\mathbb{R}$.

✓ Μια ακολουθία απολύτως φραγμένη είναι και φραγμένη και αντιστρόφως.

✓ Μία φραγμένη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.

Μονότονες ακολουθίες

Μία ακολουθία a_n, $\forall n\in\mathbb{N}$ ονομάζεται

- **αύξουσα** αν ισχύει $a_n \le a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
- **φθίνουσα** αν ισχύει $a_n \ge a_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
- **μονότονη** εάν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες-Σύγκλιση

✓ Μία μονότονη ακολουθία δε συγκλίνει κατ' ανάγκη.

✓ Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία a_n είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{R}$.

✓ Κάθε συγκλίνουσα σε πραγματικό αριθμό ακολουθία είναι φραγμένη.

✓ Αν $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ και $|a_n| \le |b_n|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

* * * * * * * * * * * * *

Ειδικές Κατηγορίες Σειρών

α) Γεωμετρικές Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$.

- αν $|r|<1$: συγκλίνει. Άθροισμα: $\frac{1}{1-r}$,
- αν $r\ge 1$: απειρίζεται θετικά
- αν $r\le -1$: κυμαίνεται, το όριό της δεν υπάρχει.

β) p-Σειρές: $V(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p}$,

- αν $p>1$: συγκλίνει • αν $p\le 1$: αποκλίνει

γ) Τηλεσκοπικές: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n = b_n - b_{n+1}$

Συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Άθροισμα: $b_0 - \lim_{n\to\infty} b_n$

δ) Εναλλάσσουσες Σειρές: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n>0$ ή $a_n<0$ για όλα τα $n=0,1,2,...$

ε) Σειρές Taylor: Αν η συνάρτηση f και οι πρώτες τις παράγωγοι $f^{(1)}, f^{(2)},..., f^{(n)}$ είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και αν η $f^{(n)}$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b), τότε για $x\in(a,x)$ ισχύει

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ είναι το υπόλοιπο της πολυωνυμικής προσέγγισης n-βαθμού. Όταν $a=0$, τότε το ανάπτυγμα ονομάζεται ανάπτυγμα Maclaurin.

Συνήθη αναπτύγματα Taylor

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

$arc\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$

στ) Σειρές Fourier:

Έστω μία $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$, περιοδική με περίοδο $T=2L$, τότε η σειρά Fourier είναι:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$

όπου $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$,

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$, $n = 1,2,\ldots$

Εάν $f(x)$ άρτια τότε $b_n = 0$, ενώ εάν $f(x)$ περιττή τότε $a_0, a_n = 0$.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

I. Αν $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει.

II. α) Αν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε για κάθε $k,\lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(ka_n+\lambda b_n) = k\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

β) Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δε συγκλίνει, τότε $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ δε συγκλίνει.

III. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

IV. (Απλό κριτήριο σύγκρισης) Έστω $0 \le a_n \le b_n$.

- αν $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ δε συγκλίνει.

V. (Γενικευμένο κριτήριο σύγκρισης) Έστω $0 \le a_n$, $0 < b_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Τότε οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

VI. (Κριτήριο λόγου - d' Alembert) Έστω $a_n \neq 0$ για $n \ge n_0$ και $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$. Τότε:

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VII. (Κριτήριο Ρίζας - Cauchy). Έστω $a_n > 0$ και $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lambda$

- αν $\lambda < 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει
- αν $\lambda > 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ δε συγκλίνει
- αν $\lambda = 1$, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

VIII. (Κριτήριο Leibnitz.). Έστω $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Αν η ακολουθία (a_n) είναι θετική, φθίνουσα και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει.

IX. Αν η ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι θετική και φθίνουσα, τότε το $I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ και η σειρά $S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγχρόνως συγκλίνουν ή αποκλίνουν. Στην περίπτωση σύγκλισης ισχύει $I < S < I + f(1)$.

* * * * * * * * * * * * *

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κλασικός ορισμός πιθανότητας: Αν ένα πείραμα έχει **ν** ισοδύναμα δυνατά αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου A είναι ο λόγος *ν(A)/ν*, όπου *ν(A)* είναι ο αριθμός των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του πειράματος για το A.

Στατιστικός ορισμός πιθανότητας: Η πιθανότητα ενός ενδεχόμενου *A* κάποιου πειράματος είναι ο αριθμός *P(A)* στον οποίο σταθεροποιείται η σχετική συχνότητα *n(A)/n* του *A* σε ένα μεγάλο αριθμό *n* επαναλήψεων του πειράματος με παρόμοιες συνθήκες.

Συνδυασμοί: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

Διατάξεις: $P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

Διατάξεις με επανάθεση: $R_{n,r} = n^r$

Μεταθέσεις ν αντικειμένων: $P_{n,n} = n!$

Χρήσιμοι τύποι: $(A^c)^c = A$, $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

✓ Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: $A\cap B = \emptyset$

✓ $P(A^c) = 1 - P(A)$

✓ $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

✓ <u>Δεσμευμένη Πιθανότητα</u> $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

✓ <u>Ανεξάρτητα ενδεχόμενα:</u> $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

✓ <u>Ολική Πιθανότητα</u>: αν $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n = \Omega$ και $A_i\cap A_j = \emptyset$, $i\neq j = 1,\dots,n$, τότε

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n).$$

✓ <u>Τύπος Bayes:</u>

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)},$$

όπου $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ και $A_i\cap A_j = \emptyset$, $i\neq j = 1,\dots,n$.

Μέση τιμή διακριτής τ.μ: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$

Μέση συνεχούς τ.μ.: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

Διασπορά: $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Τυπική απόκλιση: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

Διωνυμική κατανομή: $B(n,p)$:

$f(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n$

$E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$

Poisson $P(\lambda)$: $f(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0,1,\dots$

$E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$

Αρνητική διωνυμική:

$f(k) = \binom{k-1}{\nu-1}p^{\nu}(1-p)^{k-\nu}$, $k = \nu,\nu+1,\dots$

$E(X) = \nu/p$, $Var(X) = \nu(1-p)/p^2$

Γεωμετρική κατανομή $G(p)$ είναι η αρνητική διωνυμική για $\nu = 1$.

Υπεργεωμετρική κατανομή: $f(k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

$k = 0,\dots,n$, $N_1 + N_2 = N$

$E(X) = \frac{n\cdot N_1}{N}$, $Var(X) = \frac{n\cdot N_1\cdot N_2\cdot(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}$

Ομοιόμορφη κατανομή: $U(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$

$E(X) = (a+b)/2$, $Var(X) = (b-a)^2/12$

Κανονική κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$:

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $-\infty < x < \infty$

$E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

Τυποποιημένη κανονική κατανομή $N(0,1)$:

προκύπτει από την κανονική κατανομή με $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, για $z < 0$ ισχύει $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

Εκθετική $f(x) = \begin{cases} a e^{-ax}, & x \ge 0\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

$E(X) = 1/a$, $Var(X) = 1/a^2$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες με $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$, τότε $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ ή $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$, $n \ge 30$.

* * * * * * * * * * * * *

<u>**Χρήσιμες ταυτότητες και σχέσεις:**</u>

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{r}a^{n-r}b^r + \dots + b^n$

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $n = 1,2,3,\dots$

$(1+a)^n \ge 1 + na$, $a > 0$, $n = 1,2,3,\dots$

* * * * * * * * * * * * *

Βασικοί τριγωνομετρικοί τύποι, $x\in\mathbb{R}$

$\sin(x) = -\sin(-x)$, $\cos(x) = \cos(-x)$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \sin y\cos x$

$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

$\tan(x\pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\cdot\tan y}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin(0) = \cos(\pi/2) = 0$, $\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$

$\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = 1/2$,

$\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$

$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$

* * * * * * * * * * * * *

Σύνολο μιγαδικών $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y\in\mathbb{R}\}$

✓ <u>*Συζυγής:*</u> $\bar{z} = x - iy$

✓ <u>*Αντίστροφος:*</u> $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

✓ <u>*Μέτρο μιγαδικού αριθμού:*</u>

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ και $r^2 = |z|^2 = z\cdot\bar{z}$

✓ <u>*Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού*</u>

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, όπου θ *πρωτεύον όρισμα.*

✓ <u>*Θεώρημα De Moivre*</u>

$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$, n ακέραιος

✓ Οι n διακεκριμένες **ρίζες** της εξίσωσης $x^n = z$, $z \neq 0$, $n\in\mathbb{N}$, (που λέγονται και n-οστές ρίζες του z), δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

<u>Σχέση καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων</u>:

$x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$