

I

Συνδυαστική

1 Λυμένες Ασκήσεις στην Συνδυαστική

Άσκηση 1 Πόσες διαφορετικές διατάξεις είναι δυνατές σε μια ομάδα ποδοσφαίρου που αποτελείται από 11 παίκτες;

Λύση: Υπάρχουν $11!$ δυνατές διατάξεις των παικτών. $\square$

Άσκηση 2 Κάποιος αγόρασε 10 βιβλία τα οποία πρόκειται να τοποθετήσει σε ένα ράφι. Από αυτά τα 4 είναι βιβλία μαθηματικών, τα 3 βιβλία χημείας, τα 2 βιβλία ιστορίας και ένα βιβλίο γραμματικής. Αν θέλει να τοποθετήσει τα βιβλία έτσι ώστε τα βιβλία με κοινό θέμα να είναι μαζί πόσες διαφορετικές αναδιατάξεις των βιβλίων είναι δυνατές;

Λύση: Υπάρχουν $4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$ διατάξεις τέτοιες ώστε μαθηματικά βιβλία να είναι τα πρώτα στη σειρά, μετά τα τα βιβλία χημείας, μετά τα βιβλία ιστορίας και τελευταίο το βιβλίο γραμματικής. Όμοια για κάθε άλλη διάταξη των αντικειμένων θα υπάρχουν $4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$ δυνατές αναδιατάξεις. Συνεπώς αφού υπάρχουν $4!$ διατάξεις των αντικειμένων η ζητούμενη απάντηση είναι $4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! = 6912$. $\square$

Άσκηση 3 Πόσες διαφορετικές πινακίδες αυτοκινήτων 7 θέσεων μπορούμε να φτιάξουμε ώστε οι τρεις πρώτες θέσεις πρέπει να έχουν κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και οι τέσσερις τελικές με αριθμούς;

Λύση: Αφού υπάρχουν 24 λατινικά γράμματα (A, B, C, ..., Y, W, Z) για τις τρεις πρώτες θέσεις και 10 ψηφία ($\{0, 1, \dots, 9\}$) για τις υπόλοιπες, από την βασική αρχή μέτρησης η απάντηση είναι : $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175,760,000$. $\square$

Άσκηση 4 Πόσες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα σύνολο με n στοιχεία υπάρχουν αν οι δυνατές τιμές της κάθε συνάρτησης είναι είτε 0 είτε 1;

Λύση: Ας θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία του συνόλου του πεδίου ορισμού της συνάρτησης f είναι τα $1, 2, \dots, n$. Αφού το $f(i)$ πρέπει να είναι είτε 0 είτε 1 για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, θα έχουμε ότι υπάρχουν 2^n δυνατές συναρτήσεις. $\square$

Άσκηση 5 Θεωρείστε μια ομάδα από n κεραίες από τις οποίες οι m είναι ελαττωματικές και οι $n - m$ είναι λειτουργικές. Υποθέστε επιπλέον ότι όλες οι ελαττωματικές και όλες οι λειτουργικές είναι πανομοιότυπες μεταξύ τους (δηλαδή δεν ξεχωρίζουμε δύο ελαττωματικές ή δύο λειτουργικές). Πόσες δυνατές διατάξεις σε γραμμή των n κεραιών είναι δυνατές ώστε να μην εμφανίζονται δύο διαδοχικές ελαττωματικές;

Λύση: Φανταστείτε σε μια γραμμική διάταξη των κεραιών τις $n - m$ λειτουργικές κεραίες μόνον με τα πιθανά κενά μεταξύ τους όπου βρίσκονται οι ελαττωματικές. Αν δεν υπάρχουν δύο διαδοχικές ελαττωματικές κεραίες τότε τα κενά μεταξύ δύο λειτουργικών κεραιών είναι το πολύ 1. Συνεπώς στις $n - m + 1$ δυνατές κενές θέσεις στο σχήμα:

_1_1_1_1_..._1_

1 = λειτουργική

_ = θέση όπου θα τοποθετηθεί το πολύ μια ελαττωματική

μεταξύ των $n - m$ λειτουργικών κεραιών, πρέπει να επιλέξουμε m από αυτές στις οποίες θα το τοποθετήσουμε τις ελαττωματικές κεραίες. συνεπώς υπάρχουν συνολικά $\binom{n - m + 1}{m}$ δυνατές γραμμικές διατάξεις στις οποίες υπάρχει τουλάχιστον μια λειτουργική κεραία μεταξύ δύο ελαττωματικών. $\square$

Άσκηση 6 Σε ένα διαγωνισμό μετέχουν 6 άντρες και 4 γυναίκες. Σε μια γραπτή εξέταση οι διαγωνιζόμενοι μπαίνουν σε μια σειρά κατάταξης ανάλογα με τον βαθμό που πήραν. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν δύο διαγωνιζόμενοι που να πήραν ακριβώς τον ίδιο βαθμό.

(α) Πόσες δυνατές κατατάξεις μπορούν να γίνουν;

(β) Αν οι άντρες και οι γυναίκες κατατάσσονται σε ξεχωριστές λίστες πόσες δυνατές κατατάξεις μπορούν να γίνουν;

Λύση: (α) Αφού κάθε κατάταξη αντιστοιχεί σε μια διατεταγμένη αναδιάταξη 10 ανθρώπων, η απάντηση είναι στο πρώτο ερώτημα $10! = 3.628.800$.

(β) Αφού υπάρχουν $6!$ δυνατές κατατάξεις των αντρών και $4!$ δυνατές κατατάξεις των γυναικών προκύπτει -από την Βασική Αρχή- ότι είναι δυνατές $(6!)(4!) = (720)(24) = 17.280$ κατατάξεις σε αυτή την περίπτωση. $\square$

Άσκηση 7 Πόσες διαφορετικές μεταθέσεις γραμμάτων (λέξεις) μπορούμε να φτιάξουμε χρησιμοποιώντας τα PEPPER;

Λύση: Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 6! μεταθέσεις των γραμμάτων $P_1 E_1 P_2 P_3 E_2 R$ όπου τα 3 P καθώς και τα 2 E δεν ξεχωρίζονται μεταξύ τους.

Θεωρείστε, τώρα οποιαδήποτε από αυτές τις μεταθέσεις για παράδειγμα την $P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R$. Αν μεταθέσουμε τα P μεταξύ τους και τα E μεταξύ τους τότε το αποτέλεσμα της διατάξης θα παραμένει στη μορφή $PPEPER$. Θα έχουμε συνολικά $3! \cdot 2!$ τέτοιες μεταθέσεις

$$\begin{array}{ll} P_1 P_2 E_1 P_3 E_2 R & P_1 P_2 E_2 P_3 E_1 R \\ P_1 P_3 E_1 P_2 E_2 R & P_1 P_3 E_2 P_2 E_1 R \\ P_2 P_1 E_1 P_3 E_2 R & P_2 P_1 E_2 P_3 E_1 R \\ P_2 P_3 E_1 P_1 E_2 R & P_2 P_3 E_2 P_1 E_1 R \\ P_3 P_1 E_1 P_2 E_2 R & P_3 P_1 E_2 P_2 E_1 R \\ P_3 P_2 E_1 P_1 E_2 R & P_3 P_2 E_2 P_1 E_1 R \end{array}$$

που είναι της μορφής $PPEPER$. Συνεπώς υπάρχουν $6!/(3! \cdot 2!) = 60$ δυνατές αναδιατάξεις των γραμμάτων $PEPPER$. $\square$

Άσκηση 8 Σε ένα τουρνουά σκακιού υπάρχουν 10 παίκτες από τους οποίους οι 4 είναι από την Ρωσία, οι 3 από τις Ηνωμένες Πολιτείες, από την Μεγάλη Βρετανία και 1 από την Βραζιλία. Αν τα αποτελέσματα αναφέρουν μόνο την εθνικότητα των παικτών στην διάταξη κατάταξης, πόσες τέτοιες λίστες αποτελεσμάτων είναι δυνατές;

Λύση: Υπάρχουν

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = 12,600$$

δυνατές λίστες. $\square$

Άσκηση 9 Μια επιτροπή από 3 άτομα θα σχηματιστεί μέσα από μια ομάδα 20 ατόμων. Πόσες διαφορετικές επιτροπές είναι δυνατές;

Λύση: Υπάρχουν $\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ δυνατές επιτροπές. $\square$

Άσκηση 10 Από μια ομάδα από 5 γυναίκες και 7 άντρες πόσες διαφορετικές επιτροπές που θα αποτελούνται από 2 γυναίκες και 3 άντρες μπορούν να σχηματιστούν; Πόσες στην περίπτωση που δύο συγκεκριμένοι άντρες δεν δέχονται να συμμετέχουν στην ίδια επιτροπή;

Λύση: Αφού υπάρχουν $\binom{5}{2}$ δυνατές ομάδες από 2 γυναίκες, και $\binom{7}{3}$ δυνατές ομάδες από 3 άντρες, προκύπτει από τη βασική αρχή μέτρησης ότι υπάρχουν $\binom{5}{2} \binom{7}{3} = \binom{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 350$ δυνατές επιτροπές 2 γυναικών και 3 αντρών. Τώρα ας υποθέσουμε ότι 2 άντρες αρνούνται να συμμετέχουν στην ίδια επιτροπή.

Τότε αφού μπορούν να σχηματιστούν συνολικά $\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$ από τα $\binom{7}{3} = 35$ δυνατά σύνολα 3 αντρών που να περιέχουν αυτούς τους δύο άντρες προκύπτει ότι $35 - 5 = 30$ δεν τους περιέχουν. Αφού υπάρχουν $\binom{5}{2} = 10$ τρόποι να επιλεχτούν οι δύο γυναίκες, προκύπτει από τη βασική αρχή μέτρησης ότι υπάρχουν $30 \cdot 10 = 300$ δυνατές επιτροπές. $\square$

Άσκηση 11 Να βρεθεί ο συντελεστής του x^8 στο ανάπτυγμα του $(1+x)^{11}$

Λύση: Θα είναι

$$\binom{11}{8} = \binom{11}{11-8} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165.$$

$\square$

Άσκηση 12 Να βρεθεί ο συντελεστής του $x^8 y^3$ στο ανάπτυγμα του $(y+x)^{11}$

Λύση: Θα είναι

$$\binom{11}{8} = \binom{11}{11-8} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165.$$

$\square$

Άσκηση 13 Πρόκειται να διαιρέσουμε 10 άτομα σε τρεις ομάδες με πέντε στην πρώτη, δύο στη δεύτερη και τρεις στην τρίτη. Πόσες διαφορετικές διαιρέσεις των 10 ατόμων στις 3 ομάδες είναι δυνατές;

Λύση: Υπάρχουν $\frac{10!}{5! 2! 3!} = 2520$ δυνατές διαιρέσεις. $\square$

Άσκηση 14 Πρόκειται να διαιρέσουμε δέκα παιδιά στην ομάδα Α και στην ομάδα Β που θα έχει 5 μέλη η κάθε μια. Η ομάδα Α θα παίξει σε ένα τουρνουά και η ομάδα Β σε διαφορετικό. Πόσες δυνατές τέτοιες διαιρέσεις είναι δυνατές;

Λύση: Υπάρχουν $\frac{10!}{5! 5!} = 252$ δυνατές διαιρέσεις. $\square$

Άσκηση 15 Για να οργανωθεί ένα παιχνίδι μπάσκετ, 10 παιδιά θα φτιάξουν δύο ομάδες από 5 παίκτες η κάθε μια. Πόσες διαφορετικές διαιρέσεις είναι δυνατές;

Λύση: Υπάρχει μια διαφορά με την προηγούμενη άσκηση, όπου δεν υπάρχει τώρα Α και Β ομάδα αλλά απλώς μια διαίρεση 10 ατόμων σε 2 ομάδες από 5 μέλη η κάθε μία. Η ζητούμενη απάντηση είναι

$$\frac{10!/(5! 5!)}{2!} = \frac{252}{2} = 126$$

$\square$