

IV

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

1 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 *Ας υποθέσουμε ότι το πείραμά μας συνίσταται στην ρίψη 3 τήμων νομισμάτων. Ας συμβολίσουμε με Y τον αριθμό που μας λείει πόσες φορές εμφανίστηκε κορώνα. Να βρεθούν οι τιμές που παίρνει η Y και να βρεθούν οι αντίστοιχες πιθανότητες.*

Λύση: Η Y που λαμβάνει μια από τις τιμές 0, 1, 2, 4 με αντίστοιχες πιθανότητες

$$\begin{aligned}P\{Y = 0\} &= P\{(T, T, T)\} = \frac{1}{8} \\P\{Y = 1\} &= P\{(T, T, H), (T, H, T), (H, T, T)\} = \frac{3}{8} \\P\{Y = 2\} &= P\{(T, H, H), (H, T, H), (H, H, T)\} = \frac{3}{8} \\P\{Y = 3\} &= P\{(H, H, H)\} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Αφού η Y πρέπει να πάρει μια από τις τιμές 0 έως και 3, θα πρέπει να έχουμε

$$1 = P\left(\bigcup_{i=0}^3 \{Y = i\}\right) = \sum_{i=0}^3 P\{Y = i\}$$

το οποίο συμφωνεί, βεβαίως, με τις προηγούμενες πιθανότητες. $\square$

Άσκηση 2 *Τρεις μπάλες διαλέγονται τυχαία - χωρίς επανατοποθέτηση - από ένα δοχείο το οποίο περιέχει 20 μπάλες αριθμημένες από το ένα έως και το είκοσι. Αν στοιχηματίσουμε ότι μια τουλάχιστον από τις τρεις μπάλες θα φέρει αριθμό μεγαλύτερο ή ίσο από 17, ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα;*

Λύση: Ας συμβολίσουμε με X τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς που έχουν επιλεχτεί. Τότε η X είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει μια από τις τιμές 3, 4, ..., 20. Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι κάθε μια από τις $\binom{20}{3}$ δυνατές

επιλογές έχει την ίδια πιθανότητα να συμβεί, τότε

$$P\{X = i\} = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}} \quad i = 3, \dots, 20 \quad (1)$$

Η Εξίσωση (1.1) ισχύει γιατί ο αριθμός των επιλογών που μπορούν να συμβούν όταν $\{X = i\}$ είναι ακριβώς ο αριθμός των επιλογών ώστε να επιλεγεί η μπάλα με τον αριθμό i και δυο από τις μπάλες με αριθμούς από το 1 έως και το $i-1$. Καθώς υπάρχουν φανερά $\binom{1}{1} \binom{i-1}{2}$ τέτοιες επιλογές, θα πάρουμε τις πιθανότητες που εκφράζονται στην Εξίσωση (1.1). Από αυτή την εξίσωση βλέπουμε πως

$$P\{X = 20\} = \frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{3}{20} = .150$$

$$P\{X = 19\} = \frac{\binom{18}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{51}{380} \approx .134$$

$$P\{X = 18\} = \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{34}{285} \approx .119$$

$$P\{X = 17\} = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{2}{19} \approx .105$$

Συνεπώς, αφού το γεγονός $\{X \geq 17\}$ είναι η ένωση των ξένων γεγονότων $\{X = i\}, i = 17, 18, 19, 20$, προκύπτει ότι η πιθανότητα να κερδίσουμε το στοίχημα δίνεται από τον αριθμό

$$P\{X \geq 17\} \approx 0,105 + 0,119 + 0,134 + 0,150 = 0,508$$

□

Άσκηση 3 Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από την σχέση

$$p(i) = c \frac{\lambda^i}{i!}, i = 0, 1, 2, \dots$$

όπου λ είναι κάποιος θετικός αριθμός. Να υπολογιστούν τα (α) $P\{X = 0\}$ και (β) $P\{X > 2\}$.

Λύση: Αφού $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$, θα έχουμε πως

$$c \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = 1$$

το οποίο συνεπάγεται, επειδή $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} x^i/i!$, ότι

$$ce^{\lambda} = 1 \quad \text{ή} \quad c = e^{-\lambda}$$

Συνεπώς

$$(α) \quad P\{X = 0\} = e^{-\lambda} \lambda^0 / 0! = e^{-\lambda}$$

$$(β) \quad P\{X > 2\} = 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} \\ - P\{X = 2\}$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

□

Άσκηση 4 Να βρείτε την $E[X]$ όπου X είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός τμήνου ζαριού.

Λύση: Αφού $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}$, θα έχουμε ότι

$$E[X] = 1 \left(\frac{1}{6}\right) + 2 \left(\frac{1}{6}\right) + 3 \left(\frac{1}{6}\right) + 4 \left(\frac{1}{6}\right) + 5 \left(\frac{1}{6}\right) + 6 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{7}{2}$$

□

Άσκηση 5 Λέμε ότι η I είναι μια δείκτρια μεταβλητή για το ενδεχόμενο A αν

$$I = \begin{cases} 1 & \text{αν συμβαίνει το } A \\ 0 & \text{αν δεν συμβαίνει το } A \end{cases}$$

Να βρεθεί η $E[I]$.

Λύση: Αφού $p(1) = P(A)$, $p(0) = 1 - P(A)$, θα έχουμε ότι

$$E[I] = P(A)$$

Συνεπώς η μέση τιμή της δείκτριας τυχαίας μεταβλητής ενός ενδεχομένου A ισούται με την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο A . □

Άσκηση 6 Κάποιος παίκτης σε ένα τηλεπαιχνίδι έρχεται αντιμέτωπος με δύο ερωτήσεις, τις οποίες ας ονομάσουμε ερώτηση 1 και ερώτηση 2, τις οποίες θα απαντήσει με τη σειρά που θα επιλέξει ο ίδιος. Αν αποφασίσει να απαντήσει πρώτα στην ερώτηση i τότε του επιτρέπεται να προχωρήσει στην άλλη ερώτηση j , $j \neq i$, μόνο αν η απάντηση στην ερώτηση i είναι σωστή (αν είναι λάθος δεν δικαιούται να προχωρήσει). Ο παίκτης πρόκειται να κερδίσει V_i ευρώ αν απαντήσει στην ερώτηση i σωστά, $i = 1, 2$. Έτσι, για παράδειγμα θα πάρει $V_1 + V_2$ ευρώ αν απαντήσει και τις δύο ερωτήσεις. Αν η πιθανότητα να απαντήσει την ερώτηση i είναι P_i , $i = 1, 2$, με ποια ερώτηση πρέπει να ξεκινήσει ούτως ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο κέρδος του; Υποθέσετε ότι τα ενδεχόμενα E_i , $i = 1, 2$, να γνωρίζει την απάντηση στην ερώτηση i , είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Λύση: Αν επιχειρήσει να απαντήσει την ερώτηση 1 πρώτα τότε θα κερδίσει

$$\begin{array}{ll} 0 & \text{με πιθανότητα } 1 - P_1 \\ V_1 & \text{με πιθανότητα } P_1(1 - P_2) \\ V_1 + V_2 & \text{με πιθανότητα } P_1P_2 \end{array}$$

Συνεπώς το αναμενόμενο κέρδος του σε αυτή την περίπτωση θα είναι

$$V_1P_1(1 - P_2) + (V_1 + V_2)P_1P_2$$

Αν επιχειρήσει να απαντήσει πρώτα την ερώτηση 2 τα αναμενόμενα κέρδη του θα είναι

$$V_2P_2(1 - P_1) + (V_1 + V_2)P_1P_2$$

Συνεπώς είναι προτιμότερο να ξεκινήσει με την ερώτηση 1 μόνο αν

$$V_1P_1(1 - P_2) \geq V_2P_2(1 - P_1)$$

ή ισοδύναμα αν

$$\frac{V_1P_1}{1 - P_1} \geq \frac{V_2P_2}{1 - P_2}$$

Για παράδειγμα αν είναι 60 τοις εκατό σίγουρος ότι θα απαντήσει την ερώτηση 1 στην οποία θα κερδίσει 200 ευρώ, και είναι σίγουρος 80 τοις εκατό ότι θα απαντήσει σωστά την ερώτηση, με έπαθλο 100 ευρώ, τότε θα πρέπει να ξεκινήσει με την ερώτηση 2 γιατί

$$400 = \frac{(100)(0,8)}{0,2} > \frac{(200)(0,6)}{0,4} = 300$$

□

Άσκηση 7 Μια σχολική τάξη με 120 μαθητές θα πάει να επισκευτεί με 3 λεωφορεία ένα μουσείο. Οι μαθητές έχουν κατανομηθεί 36 στο πρώτο, 40 στο δεύτερο και 44 στο τρίτο λεωφορείο. Μόλις τα λεωφορεία φθάσουν επιλέγουμε στη τύχη ένα μαθητή. Έστω X να είναι ο αριθμός των μαθητών που είναι στο λεωφορείο του τυχαία διαλεγμένου μαθητή. Να βρεθεί η $E[X]$.

Λύση: Αφού ο κάθε μαθητής που επιλέγεται τυχαία από τους 120 μαθητές έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί θα έχουμε πως

$$P\{X = 36\} = \frac{36}{120} \quad P\{X = 40\} = \frac{40}{120} \quad P\{X = 44\} = \frac{44}{120}$$

Συνεπώς

$$E[X] = 36 \left(\frac{3}{10} \right) + 40 \left(\frac{1}{3} \right) + 44 \left(\frac{11}{30} \right) = \frac{1208}{30} = 40.2667$$

□

Άσκηση 8 Έστω X να είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τις τιμές $-1, 0, 1$ με αντίστοιχες πιθανότητες

$$P\{X = -1\} = 0.2 \quad P\{X = 0\} = 0.5 \quad P\{X = 1\} = 0.3$$

Να υπολογίσετε το $E[X^2]$.

Λύση: Θέτοντας $Y = X^2$, θα έχουμε ότι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας της Y θα δίνεται από την

$$\begin{aligned} P\{Y = 1\} &= P\{X = -1\} + P\{X = 1\} = 0.5 \\ P\{Y = 0\} &= P\{X = 0\} = 0.5 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$E[X^2] = E[Y] = 1(0.5) + 0(0.5) = 0.5$$

□

Άσκηση 9 Να υπολογίσετε την $\text{Var}(X)$ αν η X παριστάνει το αποτέλεσμα της ρίψης ενός τμήνου ζαριού.

Λύση: Όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 3α, $E[X] = \frac{7}{2}$. Επίσης,

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1^2 \left(\frac{1}{6} \right) + 2^2 \left(\frac{1}{6} \right) + 3^2 \left(\frac{1}{6} \right) + 4^2 \left(\frac{1}{6} \right) + 5^2 \left(\frac{1}{6} \right) + 6^2 \left(\frac{1}{6} \right) \\ &= \left(\frac{1}{6} \right) (91) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2} \right)^2 = \frac{35}{12}$$

□

Άσκηση 10 Να δείξετε πως ότι για οποιεσδήποτε σταθερές a και b .

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$$

Λύση: Θέτουμε $\mu = E[X]$ και παρατηρούμε πως αφού, $E[aX + b] = a\mu + b$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\text{Var}(aX + b) &= E[(aX + b - a\mu - b)^2] \\ &= E[a^2(X - \mu)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu)^2] \\ &= a^2 \text{Var}(X)\end{aligned}$$

□

Άσκηση 11 Ρίχνουμε πέντε τίμια νομίσματα. Αν τα αποτελέσματα των ρίψεων είναι ανεξάρτητα, να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του αριθμού των κορώνων που επιτυγχάνονται.

Λύση: Αν θέσουμε X να είναι ίση με τον αριθμό των κορώνων (επιτυχίες) που εμφανίζονται σε πέντε ρίψεις, τότε η X είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(n = 5, p = \frac{1}{2})$. Συνεπώς από την Εξίσωση (6.2),

$$\begin{aligned}P\{X = 0\} &= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \\ P\{X = 1\} &= \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32} \\ P\{X = 2\} &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} \\ P\{X = 3\} &= \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} \\ P\{X = 4\} &= \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32} \\ P\{X = 5\} &= \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 12 Είναι γνωστό ότι οι βίδες που παράγει ένα αυγκεκριμένο εργοστάσιο είναι ελαττωματικές με πιθανότητα 0,01 ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Η εταιρία που πουλάει τις βίδες που παράγει το εργοστάσιο τις συσκευάζει σε πακέτα των δέκα και προσφέρει μια εγγύηση επιστροφής των χρημάτων αν παραπάνω από μία από τις 10 βίδες είναι ελαττωματικές. Πόσο ποσοστό των πακέτων αναμένεται η εταιρία να αντικαθιστά;

Λύση: Αν X είναι ο αριθμός των ελαττωματικών βιδών σε ένα πακέτο, τότε η X είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(10, 0,01)$. Συνεπώς η πιθανότητα ώστε να αντικατασταθεί ένα πακέτο θα είναι ίση με

$$1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} = 1 - \binom{10}{0} (.01)^0 (.99)^{10} - \binom{10}{1} (.01)^1 (.99)^9 \\ \approx 0,004$$

Συνεπώς μόνο 0,4 τοις εκατό από τα πακέτα πρέπει να αντικατασταθούν. $\square$

Άσκηση 13 Το παρακάτω τυχερό παιχνίδι, γνωστό σαν και ο «τροχός της τύχης» παίζεται σε Λούνα Παρκ. Ένας παίκτης ποντάρει σε έναν από τους αριθμούς 1 έως 6. Ένας τροχός γυρνά τρεις φορές και σταματά κάθε φορά σε έναν από τους αριθμούς 1 έως 6. Αν ο αριθμός που στοιχημάτισε ο παίκτης εμφανιστεί i φορές, $i = 1, 2, 3$, τότε ο παίκτης κερδίζει i μονάδες· αν πάλι ο αριθμός που στοιχημάτισε ο παίκτης δεν εμφανιστεί σε κανένα από τα τρία ζάρια χάνει 1 μονάδα. Είναι το παιχνίδι συμφέρον για τον παίκτη;

Λύση: Αν υποθέσουμε ότι ο τροχός σταματά με πιθανότητα $1/6$ σε κάθε αριθμό και το κάθε αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα. Τότε ο αριθμός των φορών όπου ο αριθμός που στοιχημάτισε ο παίκτης εμφανίζεται είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $(3, \frac{1}{6})$. Συνεπώς αν θέσουμε X να είναι τα κέρδη του παίκτη σε ένα παιχνίδι, έχουμε

$$P\{X = -1\} = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \\ P\{X = 1\} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216} \\ P\{X = 2\} = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216} \\ P\{X = 3\} = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

Για να προσδιορίσουμε αν αυτό συμφέρει ή όχι τον παίκτη, θα προσδιορίσουμε την μέση τιμή $E[X]$. Από τις προηγούμενως υπολογισμένες πιθανότητες έχουμε

$$E[X] = \frac{-125 + 75 + 30 + 3}{216} \\ = \frac{-17}{216}$$

Συνεπώς, σε βάθος χρόνου, ο παίκτης αναμένεται να χάσει 17 μονάδες κάθε 216 παιχνίδια. $\square$

Άσκηση 14 Ένα σύστημα επικοινωνίας αποτελείται από n μονάδες, η κάθε μια από τις οποίες έχει πιθανότητα να λειτουργεί σωστά ίση με p . Το σύστημα είναι σε θέση να λειτουργεί αποτελεσματικά αν τουλάχιστον οι μισές μονάδες λειτουργούν.

(α) Για ποιες τιμές του p θα συμβαίνει ένα σύστημα από 5 μονάδες να έχει περισσότερη πιθανότητα να λειτουργεί σωστά από ένα σύστημα 3 μονάδων;

(β) Γενικότερα, πότε ένα σύστημα $(2k + 1)$ -μονάδων είναι καλύτερο από ένα σύστημα $(2k - 1)$ -μονάδων;

Λύση: (α) Ο αριθμός των μονάδων που λειτουργούν σε ένα σύστημα είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους (n, p) . Από αυτό προκύπτει ότι η πιθανότητα ώστε ένα σύστημα 5 μονάδων να είναι λειτουργικό αποτελεσματικά θα είναι

$$\binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p) + p^5$$

ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για ένα σύστημα με 3 μονάδες θα είναι

$$\binom{3}{2} p^2 (1-p) + p^3$$

Συνεπώς το σύστημα 5 μονάδων θα είναι καλύτερο αν

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 > 3p^2(1-p) + p^3$$

το οποίο ανάγεται στο

$$3(p-1)^2(2p-1) > 0$$

ή

$$p > \frac{1}{2}$$

(β) Γενικότερα, ένα σύστημα με $2k + 1$ μονάδες θα είναι καλύτερο από ένα σύστημα με $2k - 1$ μονάδες αν (και μόνο αν) $p > \frac{1}{2}$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας αυτό, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα από $2k + 1$ μονάδες και ας θέσουμε X να είναι ο αριθμός των $2k - 1$ πρώτων μονάδων του συστήματος που λειτουργούν. Ας ονομάσουμε ένα σύστημα που λειτουργεί σωστά λειτουργικό. Τότε

$$P_{2k+1}(\text{λειτουργικό}) = P\{X \geq k+1\} + P\{X = k\}(1 - (1-p)^2) + P\{X = k-1\}p^2$$

αφού ένα σύστημα με $(2k+1)$ μονάδες θα είναι λειτουργικό αν είτε λειτουργούν περισσότερες ή ίσες από $k + 1$ μονάδες

(i) $X \geq k + 1$ · είτε

- (ii) $X = k$ και τουλάχιστον μια από τις δύο υπόλοιπες μονάδες λειτουργεί, είτε
 (iii) $X = k - 1$ και οι δύο από τις υπόλοιπες μονάδες λειτουργούν.

Αφού

$$\begin{aligned} P_{2k-1}(\text{λειτουργικό}) &= P\{X \geq k\} \\ &= P\{X = k\} + P\{X \geq k + 1\} \end{aligned}$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} P_{2k+1}(\text{λειτουργικό}) - P_{2k-1}(\text{λειτουργικό}) &= P\{X = k - 1\}p^2 - (1 - p)^2 P\{X = k\} \\ &= \binom{2k-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^k p^2 - (1-p)^2 \binom{2k-1}{k} p^k(1-p)^{k-1} \\ &= \binom{2k-1}{k} p^k(1-p)^k [p - (1-p)] \text{ αφού } \binom{2k-1}{k-1} = \binom{2k-1}{k} \\ &> 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 15 Να υπολογιστεί η μέση τιμή και διασπορά μιας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής με παραμέτρους n και p .

Λύση: Θα έχουμε

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \sum_{i=0}^n i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= \sum_{i=1}^n i^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

Με χρήση της ταυτότητας,

$$i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$$

θα πάρουμε πως

$$\begin{aligned} E[X^k] &= np \sum_{i=1}^n i^{k-1} \binom{n-1}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \quad \text{θέτουμε } j = i - 1 \\ &= np E[(Y+1)^{k-1}] \end{aligned}$$

όπου η Y είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $n - 1, p$. Θέτοντας $k = 1$ στην προηγούμενη εξίσωση θα πάρουμε

$$E[X] = np$$

Αυτό σημαίνει πως ο αναμενόμενος αριθμός επιτυχιών που εμφανίζονται σε n ανεξάρτητες δοκιμές όπου η επιτυχία έχει πιθανότητα p είναι ίσος με np . Θέτοντας $k = 2$ στην προηγούμενη εξίσωση και χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο της μέσης τιμής μιας διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής θα πάρουμε πως

$$\begin{aligned} E[X^2] &= npE[Y + 1] \\ &= np[(n - 1)p + 1] \end{aligned}$$

Αφού $E[X] = np$ θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= np[(n - 1)p + 1] - (np)^2 \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$

□

Άσκηση 16 Αν X είναι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους (n, p) , όπου $0 < p < 1$. Να δείξετε πως καθώς το k πηγαίνει από το 0 προς το n , $P\{X = k\}$ πρώτα αυξάνει μονότονα και ύστερα φτάνει μονότονα, φθάνοντας την μεγαλύτερη τιμή όταν το k γίνει ίσο με τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος με $(n + 1)p$.

Λύση: Για να αποδείξουμε την πρόταση θα θεωρήσουμε την ποσότητα $P\{X = k\}/P\{X = k - 1\}$ και θα προσδιορίσουμε για ποιες τιμές του k είναι μεγαλύτερη ή ίση από 1.

Θα έχουμε,

$$\begin{aligned} \frac{P\{X = k\}}{P\{X = k - 1\}} &= \frac{\frac{n!}{(n - k)!k!}p^k(1 - p)^{n - k}}{\frac{n!}{(n - k + 1)!(k - 1)!}p^{k - 1}(1 - p)^{n - k + 1}} \\ &= \frac{(n - k + 1)p}{k(1 - p)} \end{aligned}$$

Συνεπώς θα συμβαίνει $P\{X = k\} \geq P\{X = k - 1\}$ όταν και μόνο όταν

$$(n - k + 1)p \geq k(1 - p)$$

ισοδύναμα, όταν και μόνο όταν

$$k \leq (n + 1)p.$$

□

Άσκηση 17 Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα αυτού του βιβλίου είναι Poisson τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = \frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα λάθος σε αυτήν εδώ την σελίδα.

Λύση: Ας συμβολίσουμε με X τον αριθμό των τυπογραφικών λαθών σε αυτήν εδώ την σελίδα, θα έχουμε πως

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.393$$

□

Άσκηση 18 Υποθέτουμε πως η πιθανότητα να παραχθεί ένα ελαττωματικό προϊόν από μια συγκεκριμένη μηχανή είναι 0.1. Να βρεθεί η πιθανότητα ώστε σε ένα δείγμα 10 τεμαχίων του προϊόντος που παρήγαγε η συγκεκριμένη μηχανή περιέχει τουλάχιστον 1 ελαττωματικό τεμάχιο και να συγκριθεί με αυτή που δίνει η προσέγγιση με την Poisson.

Λύση: Η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\binom{10}{0} (0,1)^0 (0,9)^{10} + \binom{10}{1} (0,1)^1 (0,9)^9 = 0,7361,$$

ενώ η προσέγγιση κατά Poisson μας δίνει την τιμή

$$e^{-1} + e^{-1} \approx 0,7358$$

□

Άσκηση 19 Θεωρείστε ένα πείραμα στο οποίο μετράμε τον αριθμό των σωματιδίων α που παράγονται στο χρονικό διάστημα 1 δευτερολέπτου από 1 γραμμάριο ραδιενεργού υλικού. Γνωρίζουμε από μετρήσεις στο παρελθόν ότι κατά μέσον όρο παράγονται 3.2 τέτοια σωματίδια- α . Ποια είναι μια καλή προσέγγιση της πιθανότητας ώστε να μη παραχθούν περισσότερα από 2 τέτοια σωματίδια σε 1 δευτερόλεπτο;

Λύση: Φανταζόμαστε κάθε γραμμάριο του ραδιενεργού υλικού να αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό ατόμων, ας πούμε n , το καθένα από τα οποία έχει πιθανότητα $3,2n$ να διασπαστεί και να εκπέμψει ένα σωματίδιο α στο χρονικό διάστημα ενός δευτερολέπτου. Με αυτή την άποψη βλέπουμε, με αρκετά καλή προσέγγιση, ότι ο αριθμός των ατόμων που διασπώνται και εκπέμπουν ένα α -σωματίδιο μέσα στη χρονική διάρκεια ενός δευτερολέπτου θα είναι μια Poisson τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 3,2$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι περίπου

$$P\{X \leq 2\} = e^{-3,2} + 3,2e^{-3,2} + \frac{(3,2)^2}{2}e^{-3,2} \approx 0,3799.$$

□

Άσκηση 20 Να υπολογίσετε την μέση τιμή και την διασπορά της Poisson τυχαίας μεταβλητής με παράμετρο λ .

Λύση:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
 &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \quad \text{βψ λεττινγ} \quad j = i - 1 \\
 &= \lambda \quad \text{σινςε} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}
 \end{aligned}$$

Συνεπώς η μέση τιμή μιας Poisson τυχαίας μεταβλητής X είναι ίση με την παράμετρό της λ . Για να προσδιορίσουμε την διασπορά της, ας υπολογίσουμε πρώτα την μέση τιμή του τετραγώνου της, $E[X^2]$.

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2 e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i e^{-\lambda} \lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
 &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+1) e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \quad \text{θέτοντας} \quad j = i - 1 \\
 &= \lambda \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!} \right] \\
 &= \lambda(\lambda + 1)
 \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει αφού το πρώτο άθροισμα είναι η μέση τιμή μιας Poisson τυχαίας μεταβλητής με παράμετρο λ και το δεύτερο είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων αυτής της τυχαίας μεταβλητής. Συνεπώς, αφού έχουμε ήδη δείξει πως $E[X] = \lambda$, παίρνουμε πως :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

□

Άσκηση 21 Μια κάληπη περιέχει N λευκές και M μαύρες μπάλες. Διαλέγουμε τυχαία μπάλες, μια κάθε φορά, έως ότου να εμφανιστεί μια μαύρη μπάλα. Αν η

υποθέσουμε ότι κάθε μπάλα που επιλέγεται επανατοποθετείται στην κάλπη πριν την επόμενη επιλογή, ποια είναι η πιθανότητα ώστε

(α) να χρειαστούν ακριβώς n επιλογές;

(β) να χρειαστούν τουλάχιστον k επιλογές;

Λύση: Αν με X συμβολίσουμε τον αριθμό των επιλογών που απαιτούνται μέχρι να εμφανιστεί μια μαύρη μπάλα, τότε η X ικανοποιεί την Εξίσωση (8.1) με $p = M/(M + N)$. Συνεπώς

(α)

$$P\{X = n\} = \left(\frac{N}{M + N}\right)^{n-1} \frac{M}{M + N} = \frac{MN^{n-1}}{(M + N)^n}$$

(β)

$$\begin{aligned} P\{X \geq k\} &= \frac{M}{M + N} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{N}{M + N}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{M}{M + N}\right) \left(\frac{N}{M + N}\right)^{k-1} \left/ \left[1 - \frac{N}{M + N}\right]\right. \\ &= \left(\frac{N}{M + N}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 22 Να βρείτε την μέση τιμή (αναμενόμενη τιμή) μιας γεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής.

Λύση: Με $q = 1 - p$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p \\ &= p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^n) \\ &= p \frac{d}{dq} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{1-q} \right) \\
&= \frac{p}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια αν εκτελέσουμε ανεξάρτητες δοκιμές που έχουν η κάθε μία πιθανότητα επιτυχίας ίση με p μέχρις ότου εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία, τότε ο αναμενόμενος αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών θα είναι ίσος με $\frac{1}{p}$. Για παράδειγμα ο αναμενόμενος αριθμός φορών που πρέπει να ρίξουμε ένα ζάρι για να πάρουμε την τιμή 1 είναι ίσος με 6. $\square$

Άσκηση 23 Να βρεθεί η διασπορά μιας γεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής.

Λύση: Για να βρούμε την $\text{Var}(X)$ θα υπολογίσουμε πρώτα την $E[X^2]$. Θέτοντας $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} p \\
&= p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq} (nq^n) \\
&= p \frac{d}{dq} \left(\sum_{n=1}^{\infty} nq^n \right) \\
&= p \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} E[X] \right) \\
&= p \frac{d}{dq} [q(1-q)^{-2}] \\
&= p \left[\frac{1}{p^2} + \frac{2(1-p)}{p^3} \right] \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Αφού $E[X] = 1/p$,

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

$\square$

Άσκηση 24 Ας υποθέσουμε ότι εκτελούμε ανεξάρτητες δοκιμές, η κάθε μία από τις οποίες έχει πιθανότητα p , ($0 < p < 1$) να είναι επιτυχία, έως ότου να εμφανιστούν

συνολικά r επιτυχίες. Αν θέσουμε με X να είναι ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών, να δείξετε πως

$$P\{X = n\} = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \quad n = r, r+1, \dots \quad (2)$$

Λύση: Η Εξίσωση προκύπτει από το γεγονός ότι για να εμφανιστεί η $r^{\text{η}}$ επιτυχία στην $n^{\text{η}}$ δοκιμή πρέπει να έχουν γίνει $r-1$ επιτυχίες στις πρώτες $n-1$ δοκιμές, και στην n δοκιμή πρέπει να εμφανιστεί επιτυχία. Η πιθανότητα του πρώτου ενδεχομένου είναι

$$\binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}$$

και η πιθανότητα του δεύτερου είναι ίση με p . συνεπώς, λόγω ανεξαρτησίας, προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση, $\square$

Άσκηση 25 Αν εκτελέσουμε ανεξάρτητες δοκιμές σε κάθε μία από τις οποίες θα έχουμε επιτυχία με πιθανότητα p , ποια είναι η πιθανότητα ώστε να εμφανιστούν r επιτυχίες πριν από m αποτυχίες;

Λύση: Θα λύσουμε το πρόβλημα παρατηρώντας πως θα συμβούν r επιτυχίες πριν από m αποτυχίες αν και μόνο αν η r επιτυχία δεν συμβεί μετά από την $r+m-1$ δοκιμή. Αυτό συμβαίνει γιατί η αν r επιτυχία συμβεί στην $r+m-1$ δοκιμή ή πριν από αυτήν τότε θα συμβεί πριν από την m αποτυχία και αντίστροφα. Συνεπώς από την Εξίσωση (8.2), η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι

$$\sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

$\square$

Άσκηση 27 Να υπολογίσετε την μέση τιμή και την διασπορά μιας αρνητικής διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής με παραμέτρους r και p .

Λύση:

$$\begin{aligned}
 E[X^k] &= \sum_{n=r}^{\infty} n^k \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \\
 &= \frac{r}{p} \sum_{n=r}^{\infty} n^{k-1} \binom{n}{r} p^{r+1} (1-p)^{n-r} \quad \text{συνξε} \quad n \binom{n-1}{r-1} = r \binom{n}{r} \\
 &= \frac{r}{p} \sum_{m=r+1}^{\infty} (m-1)^{k-1} \binom{m-1}{r} p^{r+1} (1-p)^{m-(r+1)} \quad \text{Θέτοντας } m = n+1 \\
 &= \frac{r}{p} E[(Y-1)^{k-1}]
 \end{aligned}$$

όπου η Y είναι μια αρνητική διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $r+1, p$.
Θέτοντας $k=1$ στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε

$$E[X] = \frac{r}{p}$$

Θέτοντας $k=2$ στην προηγούμενη εξίσωση και χρησιμοποιώντας τον τύπο που μας δίνει την μέση τιμή μιας αρνητικής τυχαίας μεταβλητής θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \frac{r}{p} E[Y-1] \\
 &= \frac{r}{p} \left(\frac{r+1}{p} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \frac{r}{p} \left(\frac{r+1}{p} - 1 \right) - \left(\frac{r}{p} \right)^2 \\
 &= \frac{r(1-p)}{p^2}
 \end{aligned}$$

□

Άσκηση 28 Να βρεθεί η μέση τιμή και διασπορά σε ένα πείραμα ρίψεως ενός ζαριού του αριθμού των ρίψεων που απαιτούνται ώστε η ένδειξη 1 εμφανιστεί 4 φορές.

Λύση: Αφού η τυχαία μεταβλητή που μας ενδιαφέρει είναι μια αρνητική διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $r = 4$ και $p = \frac{1}{6}$, βλέπουμε πως

$$E[X] = 24$$

$$\text{Var}(X) = \frac{4 \left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 120.$$

□

Άσκηση 29 Προσδιορίστε την μέση τιμή και διασπορά μιας υπεργεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής X με παραμέτρους n, N, m .

Λύση:

$$E[X^k] = \sum_{i=0}^n i^k P\{X = i\}$$

$$= \sum_{i=1}^n i^k \binom{m}{i} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N}{n}$$

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$i \binom{m}{i} = m \binom{m-1}{i-1} \quad \text{ανδ} \quad n \binom{N}{n} = N \binom{N-1}{n-1}$$

καταλήγουμε πως

$$E[X^k] = \frac{nm}{N} \sum_{i=1}^n i^{k-1} \binom{m-1}{i-1} \binom{N-m}{n-i} / \binom{N-1}{n-1}$$

$$= \frac{nm}{N} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{k-1} \binom{m-1}{j} \binom{N-m}{n-1-j} / \binom{N-1}{n-1}$$

$$= \frac{nm}{N} E[(Y+1)^{k-1}]$$

όπου η Y είναι μια υπεργεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $n-1, N-1, m-1$. Συνεπώς θα έχουμε, θέτοντας $k=1$, ότι

$$E[X] = \frac{nm}{N}$$

Ερμηνεύοντας σε καθημερινή γλώσσα την προηγούμενη σχέση, αν επιλεχθούν τυχαία n μπάλες από ένα σύνολο από N μπάλες, από τις οποίες οι m είναι λευκές

τότε η μέση τιμή του αριθμού των λευκών μπαλών που έχουν επιλεχτεί είναι ίση με nm/N .

Θέτοντας $k = 2$ στην έκφραση για την $E[X^k]$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{nm}{N} E[Y + 1] \\ &= \frac{nm}{N} \left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 \right] \end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την τελική εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο αποτέλεσμα μας για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της υπεργεωμετρικής τυχαιάς μεταβλητής Y .

Επειδή $E[X] = nm/N$ συμπεραίνουμε ότι

$$\text{Var}(X) = \frac{nm}{N} \left[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N} \right]$$

Θέτοντας $p = m/N$ και με χρήση της ταυτότητας

$$\frac{m-1}{N-1} = \frac{Np-1}{N-1} = p - \frac{1-p}{N-1}$$

παίρνουμε πως

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= np[(n-1)p - (n-1)\frac{1-p}{N-1} + 1 - np] \\ &= np(1-p)(1 - \frac{n-1}{N-1}) \end{aligned}$$

□

Άσκηση 30 Η συνάρτηση κατανομής της τυχαιάς μεταβλητής X δίνεται από την

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τα (α) $P\{X < 3\}$, (β) $P\{X = 1\}$, (γ) $P\{X > \frac{1}{2}\}$, και (δ) $P\{2 < X \leq 4\}$.

Λύση:

$$(a) \quad P\{X < 3\} = \lim_n P\left\{X \leq 3 - \frac{1}{n}\right\} = \lim_n F\left(3 - \frac{1}{n}\right) = \frac{11}{12}$$

(b)

$$\begin{aligned} P\{X = 1\} &= P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} \\ &= F(1) - \lim_n F\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} &= 1 - P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} \\ &= 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P\{2 < X \leq 4\} &= F(4) - F(2) \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

□