

III

Δεσμευμένη Πιθανότητα

1 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 Στρίβουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Υποθέτοντας ότι και τα τέσσερα στοιχεία του δειγματοχώρου $\Omega = \{(K, K), (K, \Gamma), (\Gamma, K), (\Gamma, \Gamma)\}$ είναι ισοπίθανα, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα και στις δύο ρίψεις να πάρουμε κορώνα, δεδομένου ότι

(α) στην πρώτη ρίψη παίρνουμε κορώνα,

(β) σε τουλάχιστον μία ρίψη το αποτέλεσμα είναι κορώνα;

Λύση: Έστω $B = \{(K, K)\}$ να συμβολίζει το ενδεχόμενο να πάρουμε και στις δύο ρίψεις κορώνα, έστω $F = \{(K, K), (K, \Gamma)\}$ να είναι το ενδεχόμενο να πάρουμε στην πρώτη ρίψη κορώνα και τέλος ας συμβολίσουμε με $A = \{(K, K), (K, \Gamma), (\Gamma, K)\}$ το ενδεχόμενο, τουλάχιστον σε μια ρίψη να πάρουμε κορώνα. Η πιθανότητα για το (α) μπορεί να προκύψει από

$$P(B|F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(\{(K, K)\})}{P(\{(K, K), (K, \Gamma)\})} = \frac{1/4}{2/4} = 1/2.$$

Για το (β), έχουμε

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{(K, K)\})}{P(\{(K, K), (K, \Gamma), (\Gamma, K)\})} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3.$$

□

Άσκηση 2 Ας υποθέσουμε ότι ένα κουτί περιέχει 8 κόκκινες και 4 λευκές μπάλες. Τραβάμε 2 μπάλες χωρίς επαναποδοθέτηση. Αν θεωρήσουμε ότι κάθε μπάλα που βρίσκεται στο κουτί είναι το ίδιο πιθανό να επιλεγεί, ποια είναι η πιθανότητα και οι δύο μπάλες που θα τραβήξουμε να είναι κόκκινες;

Λύση: Έστω K_1 και K_2 να συμβολίζουν, αντίστοιχα, τα ενδεχόμενα η πρώτη, η δεύτερη μπάλα να είναι κόκκινη. Δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα της επιλογής μας είναι κόκκινου χρώματος, υπάρχουν 7 εναπομείναντες κόκκινες και 4 λευκές

μπάλες· συνεπώς $P(K_2|K_1) = \frac{7}{11}$. Καθώς $P(K_1)$ είναι $\frac{8}{12}$, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$P(K_1 \cap K_2) = P(K_1)P(K_2|K_1) = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{7}{11}\right) = \frac{14}{33}$$

Βέβαια, η παραπάνω πιθανότητα θα μπορούσε να είχε υπολογιστεί από

$$P(K_1 \cap K_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$$

□

Άσκηση 3 Ένας φοιτητής εξετάζεται σε ένα διαγώνισμα που διαρκεί το πολύ μια ώρα. Υποθέστε ότι η πιθανότητα ο φοιτητής να τελειώσει την εξέταση σε λιγότερο από x ώρες, είναι $x/2$ για κάθε $0 \leq x \leq 1$. Γνωρίζοντας ότι ο φοιτητής γράφει ακόμα μετά από 0,75 ώρες, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να εξαντλήσει όλη την ώρα της εξέτασης;

Λύση: Έστω L_x , να συμβολίζει το ενδεχόμενο ο φοιτητής να τελειώσει την εξέταση σε λιγότερο από x ώρες, με $0 \leq x \leq 1$ και υποθέστε A , να είναι το ενδεχόμενο ο φοιτητής να εξαντλήσει όλη την ώρα της εξέτασης. Καθώς F είναι το ενδεχόμενο ο φοιτητής να μην τελειώσει σε λιγότερο από 1 ώρα, θα έχουμε ότι

$$P(A) = P(L_1^c) = 1 - P(L_1) = 0,5.$$

Επίσης, καθώς το ενδεχόμενο ο φοιτητής να δουλεύει ακόμα μετά από 0,75 ώρες είναι το συμπλήρωμα του ενδεχομένου $L_{0,75}$, η ζητούμενη πιθανότητα θα ισούται με

$$P(A|L_{0,75}^c) = \frac{P(A \cap L_{0,75}^c)}{P(L_{0,75}^c)} = \frac{P(A)}{1 - P(L_{0,75})} = \frac{0,5}{0,625} = 0,8$$

□

Άσκηση 4 Μια συνηθισμένη τράπουλα 52 καρτών χωρίζεται τυχαία σε 4 στοίβες των 13 καρτών. Υπολογίστε την πιθανότητα κάθε στοίβα να περιέχει ακριβώς έναν άσσο.

Λύση: Ορίζουμε τα ενδεχόμενα $E_i, i = 1, 2, 3, 4$ ως εξής :

$E_1 = \{\text{ο άσσος μπαστούνι βρίσκεται σε κάποια από τις στοίβες}\}$

$E_2 = \{\text{ο άσσος μπαστούνι και ο άσσος κούπα βρίσκονται σε διαφορετικές στοίβες}\}$

$E_3 = \{\text{οι άσσοι μπαστούνι, κούπα και καρό βρίσκονται σε διαφορετικές στοίβες}\}$

$E_4 = \{\text{όλοι οι 4 άσσοι βρίσκονται σε διαφορετικές στοίβες}\}$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$ και από το πολλαπλασιαστικό θεώρημα θα έχουμε

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

Τώρα,

$$P(E_1) = 1,$$

καθώς E_1 είναι ο δειγματοχώρος Ω . Επίσης

$$P(E_2|E_1) = \frac{39}{51},$$

καθώς η στοίβα που περιέχει τον άσο μπαστούνι θα περιέχει 12 από τις εναπομείναντες 51 κάρτες. Επίσης,

$$P(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{26}{50},$$

καθώς οι στοίβες που περιέχουν τους άσσους μπαστούνι και κούπα θα περιέχουν και 24 από τις υπόλοιπες 50 κάρτες. Τέλος,

$$P(E_4|E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{13}{49}.$$

Έτσι η πιθανότητα κάθε στοίβα να περιέχει ακριβώς έναν άσο είναι

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4) = \frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49} \approx 0,105.$$

□

Άσκηση 5 Σε μια εξέταση με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, ο φοιτητής είτε γνωρίζει την απάντηση είτε μαντεύει. Ας συμβολίσουμε με p την πιθανότητα ο φοιτητής να γνωρίζει την απάντηση και με $1 - p$ την πιθανότητα ο φοιτητής να την μαντεύει. Υποθέστε ότι ο φοιτητής που μαντεύει την απάντηση θα είναι σωστός με πιθανότητα $1/m$, όπου m είναι ο αριθμός των προσφερόμενων απαντήσεων σε κάθε ερώτηση της εξέτασης. Ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ένας φοιτητής να γνώριζε την απάντηση σε μια ερώτηση, δεδομένου ότι απάντησε σωστά σε αυτήν;

Λύση: Έστω C και K να συμβολίζουν αντίστοιχα, τα ενδεχόμενα ο φοιτητής να απαντήσει την ερώτηση σωστά και να γνωρίζει την απάντηση. Θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P(K|C) &= \frac{P(K \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C|K)P(K)}{P(C|K)P(K) + P(C|K^c)P(K^c)} \\ &= \frac{p}{p + (1/m)(1 - p)} \\ &= \frac{mp}{1 + (m - 1)p}. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν $m = 5, p = \frac{1}{2}$, τότε η πιθανότητα ο φοιτητής να γνώριζε την απάντηση σε μια ερώτηση που απάντησε σωστά είναι $\frac{5}{6}$. □

Άσκηση 6 Ένα αιματολογικό εργαστήριο παρουσιάζει 95 τοις εκατό εγκυρότητα στην διάγνωση μιας συγκεκριμένης ασθένειας. Παρ'όλα αυτά μπορεί να δώσει λάθος αποτέλεσμα για το 1 επί τοις εκατό από τα υγιή άτομα που εξετάζονται. (Δηλαδή, αν ένα υγιές άτομο εξεταστεί από το εργαστήριο, τότε, με πιθανότητα 0,1, η διάγνωση θα δείξει ότι αυτός ή αυτή πάσχει από την ασθένεια.) Αν το 0,5 τοις εκατό του πληθυσμού είναι πάσχοντες, ποια η πιθανότητα ένα άτομο να πάσχει από την ασθένεια, δεδομένου ότι η εξέταση από το εργαστήριο είναι θετική για την ασθένεια;

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι D συμβολίζει το ενδεχόμενο το άτομο που κάνει την εξέταση πάσχει από την εν λόγω ασθένεια και E το ενδεχόμενο το αποτέλεσμα της εξέτασης να είναι θετικό. Η ζητούμενη πιθανότητα $P(D|E)$, έπεται από

$$\begin{aligned} P(D|E) &= \frac{P(D \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|D)P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)P(D^c)} \\ &= \frac{(0,95)(0,005)}{(0,95)(0,005) + (0,01)(0,995)} \\ &= \frac{95}{294} \approx 0,323. \end{aligned}$$

Έτσι μόνο το 32 επί τοις εκατό των ατόμων που τα αποτελέσματα των εξετάσεων τους είναι θετικά στην ασθένεια, πράγματι πάσχουν από αυτήν. $\square$

Άσκηση 7 Υποθέστε ότι έχουμε 3 κάρτες ίδιου σχήματος, με την πρώτη να είναι κόκκινου χρώματος και οι δυο πλευρές της, η δεύτερη να έχει τις πλευρές της μαύρες και η τρίτη κάρτα να έχει την μια πλευρά της κόκκινη και την άλλη μαύρη. Οι 3 κάρτες ανακατεύονται μέσα σε ένα καπέλο και μια κάρτα επιλέγεται τυχαία και τοποθετείται κάτω στο έδαφος. Αν η πάνω της πλευρά είναι κόκκινου χρώματος, ποια είναι η πιθανότητα η άλλη πλευρά να είναι μαύρου χρώματος;

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι KK , MM και KM συμβολίζουν αντίστοιχα τα ενδεχόμενα η επιλεγμένη κάρτα να είναι όλη κόκκινη, όλη μαύρη, ή η κόκκινη-μαύρη. Συμβολίζοντας με K το ενδεχόμενο η πάνω πλευρά της επιλεγμένης κάρτας να είναι κόκκινη, θα έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι η

$$\begin{aligned} P(KM|K) &= \frac{P(KM \cap K)}{P(K)} \\ &= \frac{P(K|KM)P(KM)}{P(K|KK)P(KK) + P(K|KM)P(KM) + P(K|MM)P(MM)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(1\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 8 Ένας κουτί περιέχει 3 διαφορετικούς τύπους χρησιμοποιημένων λαμπτήρων. Η πιθανότητα ο τύπος λαμπτήρα 1, να λειτουργήσει στο μέγιστον πάνω από 100 ώρες, είναι 0,7, με τις αντίστοιχες πιθανότητες για τους τύπους 2 και 3 να είναι 0,4 και 0,3 αντίστοιχα. Υποθέστε ότι ένα 20 τοις εκατό των λαμπτήρων είναι τύπου 1, 30 τοις εκατό είναι τύπου 2 και 50 τοις εκατό τύπου 3.

- (α) Ποια η πιθανότητα μια τυχαία επιλεγμένη λάμπα, να δουλέψει πάνω από 100 ώρες;
- (β) Δεδομένου ότι η λάμπα δούλεψε 100 ώρες, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα να ήταν τύπου j , με $j = 1, 2, 3$;

Λύση: (α) Έστω A να συμβολίζει το ενδεχόμενο, ο λαμπτήρας της επιλογής μας να λειτουργήσει πάνω από 100 ώρες και F_j , ας συμβολίζει το ενδεχόμενο μια λάμπα τύπου j να έχει επιλεχτεί, $j = 1, 2, 3$. Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(A)$, δεσμεύουμε με τον τύπο λαμπτήρα, για να πάρουμε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) \\ &= (0,7)(0,2) + (0,4)(0,3) + (0,3)(0,5) = 0,41. \end{aligned}$$

Υπάρχει μια πιθανότητα 41 επί τοις εκατό, ο λαμπτήρας να διαρκέσει πάνω από 100 ώρες.

(β) Η πιθανότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Bayes:

$$\begin{aligned} P(F_j|A) &= \frac{P(A \cap F_j)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|F_j)P(F_j)}{0,41}. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} P(F_1|A) &= (0,7)(0,2)/0,41 = 14/41 \\ P(F_2|A) &= (0,4)(0,3)/0,41 = 12/41 \\ P(F_3|A) &= (0,3)(0,5)/0,41 = 15/41. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, ενώ η αρχική πιθανότητα της επιλογής ενός λαμπτήρα τύπου 1 είναι μόνο 0,2, η πληροφορία ότι η λάμπα λειτουργήσει για πάνω από 100 ώρες, αυξάνει την πιθανότητα πραγματοποίησης αυτού του ενδεχομένου σε $14/41 \approx 0,341$. $\square$

Άσκηση 9 Αν αν το E και F είναι ανεξάρτητα, δείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για τα E, F^c .

Λύση: Υποθέστε ότι τα E και F είναι ανεξάρτητα. Καθώς $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$, με τα $E \cap F$ και $E \cap F^c$ να είναι προφανώς ανεξάρτητα, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \\ &= P(E)P(F) + P(E \cap F^c) \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα

$$\begin{aligned} P(E \cap F^c) &= P(E)[1 - P(F)] \\ &= P(E)P(F^c) \end{aligned}$$

και με αυτόν τον τρόπο το αποδειξάμε το ζητούμενο. $\square$

Άσκηση 10 Μια άπειρη ακολουθία από ανεξάρτητες δοκιμές θα αρχίσει να πραγματοποιείται. Κάθε δοκιμή έχει επιτυχία με πιθανότητα p και αποτυχία, με πιθανότητα $1 - p$. Ποια είναι η πιθανότητα, να

(α) έχουμε τουλάχιστον 1 επιτυχία στις n πρώτες δοκιμές;

(β) έχουμε ακριβώς k επιτυχίες στις n πρώτες δοκιμές;

(γ) έχουμε επιτυχία σε όλες τις δοκιμές;

Λύση: Για να καθορίσουμε την πιθανότητα τουλάχιστον 1 επιτυχίας στις n πρώτες δοκιμές, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα του συμπληρωματικού ενδεχομένου, αυτό της καμιά επιτυχίας στις n πρώτες δοκιμές. Αν συμβολίσουμε με E_i το ενδεχόμενο αποτυχίας στην i -οστή δοκιμή, τότε η πιθανότητα καμιάς επιτυχίας είναι, από την ανεξαρτησία ενδεχομένων,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i\right) = P(E_1)P(E_2) \cdots P(E_n) = (1 - p)^n.$$

Γι'αυτό η απάντηση στο ερώτημα (α) είναι $1 - (1 - p)^n$.

Για να υπολογίσουμε το δεύτερο μέρος, ας συλλογιστούμε κάθε τυχαία ακολουθία από τα πρώτα n αποτελέσματα, που περιέχουν k επιτυχίες και $n - k$ αποτυχίες. Κάθε μια από αυτές τις ακολουθίες, από την ανεξαρτησία των δοκιμών που έχουμε υποθέσει, θα πραγματοποιηθεί με πιθανότητα $p^k(1 - p)^{n-k}$. Καθώς υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τέτοιες ακολουθίες (υπάρχουν $n!/k!(n - k)!$ μεταθέσεις από k επιτυχίες και $n - k$ αποτυχίες), η ζητούμενη πιθανότητα στο ερώτημα (β) είναι

$$P\{\text{ακριβώς } k \text{ επιτυχίες}\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (γ), παρατηρούμε από το πρώτο μέρος, ότι η πιθανότητα να έχουμε επιτυχία σε όλες τις n πρώτες δοκιμές, δίνεται από

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) = p^n.$$

Έτσι χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέχειας της πιθανότητας έχουμε ότι την ζητούμενη πιθανότητα $P\left(\bigcap_1^\infty E_i^c\right)$, να δίνεται από

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^\infty E_i^c\right) &= P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) \\ &= \lim_n p^n = \begin{cases} 0 & \text{αν } p < 1 \\ 1 & \text{αν } p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 11 Ένα σύστημα που αποτελείται από n διαφορετικά μέρη, λέγεται ότι είναι ένα παράλληλο σύστημα αν λειτουργεί, όταν τουλάχιστον ένα από τα μέρη του λειτουργεί. Για ένα τέτοιο σύστημα, αν το μέρος i , ανεξαρτήτως από τα υπόλοιπα μέρη, λειτουργεί με πιθανότητα $p_i, i = 1, \dots, n$, ποια είναι η πιθανότητα να λειτουργεί το σύστημα;

Λύση: Ας συμβολίσουμε με A_i , το ενδεχόμενο το μέρος i να λειτουργεί. Τότε

$$\begin{aligned} P\{\text{το σύστημα λειτουργεί}\} &= 1 - P\{\text{το σύστημα δεν λειτουργεί}\} \\ &= 1 - P\{\text{όλα τα μέρη δεν λειτουργούν}\} \\ &= 1 - P\left(\bigcap_i A_i^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) \quad \text{από ανεξαρτησία} \end{aligned}$$

□

Άσκηση 12 Εκτελούνται ανεξάρτητες δοκιμές, που αποτελούνται από την ρίψη ενός ζεύγους δίκαιων ζαριών. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα 5 πριν να φέρουμε άθροισμα 7;

Λύση: Έστω E_n , να συμβολίζει το ενδεχόμενο να μην φέρουμε άθροισμα 5 ή 7 στις $n - 1$ πρώτες δοκιμές και να φέρουμε άθροισμα 5 στην n οστή δοκιμή. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

Τώρα καθώς $P\{\text{άθροισμα 5 σε κάθε δοκιμή}\} = \frac{4}{36}$ και $P\{\text{άθροισμα 7 σε κάθε δοκιμή}\} = \frac{6}{36}$, παίρνουμε, από την ανεξαρτησία των ενδεχομένων ότι

$$P(E_n) = \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36}$$

και γι'αυτό

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{9} \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει, χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες. Αν θέσουμε με E το ενδεχόμενο να φέρουμε άθροισμα 5 πριν να φέρουμε άθροισμα 7, τότε μπορούμε να πάρουμε την ζητούμενη πιθανότητα, $P(E)$, δεσμεύοντας με ένα το αποτέλεσμα της πρώτης δοκιμής, ως εξής : Έστω F να είναι το ενδεχόμενο, στην πρώτη δοκιμή να φέρουμε άθροισμα 5· G το ενδεχόμενο να φέρουμε 7 και H το ενδεχόμενο στην πρώτη δοκιμή, πάντα να μην φέρουμε άθροισμα 5, ούτε 7. Δεσμεύοντας με όποιο από τα παραπάνω ενδεχόμενα πραγματοποιηθεί, θα έχουμε

$$P(E) = P(E|F)P(F) + P(E|G)P(G) + P(E|H)P(H).$$

Ωστόσο,

$$\begin{aligned} P(E|F) &= 1 \\ P(E|G) &= 0 \\ P(E|H) &= P(E) \end{aligned}$$

Οι πρώτες δύο ισότητες είναι προφανείς. Η τρίτη έπεται γιατί αν στην πρώτη δοκιμή δεν φέρουμε άθροισμα 5 ή 7, τότε σε αυτό το σημείο η κατάσταση έχει ακριβώς όπως ήταν στην αρχή του προβλήματος· δηλαδή, το πείραμα με τις ρίψεις ζαριών θα συνεχιστεί μέχρι να φέρουμε άθροισμα 5 ή 7. Επίσης, οι δοκιμές είναι ανεξάρτητες, γι'αυτό το αποτέλεσμα της πρώτης δοκιμής δεν θα επηρεάσει

καθόλου τις άλλες ρίψεις που ακολουθούν. Καθώς $P(F) = \frac{4}{36}$, $P(G) = \frac{6}{36}$ και $P(H) = \frac{26}{36}$, βλέπουμε ότι

$$P(E) = \frac{1}{9} + P(E) \frac{13}{18},$$

ή

$$P(E) = \frac{2}{5}.$$

□

Άσκηση 13 Κάποιος κάνει συλλογή από κουπόνια. Υπάρχουν n είδη από κουπόνια και κάθε καινούργιο που συλλέγει είναι, ανεξαρτήτως κάθε προηγούμενου, τύπου i , με πιθανότητα p_i , $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Αν A_i , συμβολίζει το ενδεχόμενο να υπάρχει τουλάχιστον ένας τύπος i κουπονιού σε αυτά που έχει είδη συλλέξει, τότε για $i \neq j$, βρείτε

(α) $P(A_i)$

(β) $P(A_i \cup A_j)$

(γ) $P(A_i | A_j)$

Λύση:

$$\begin{aligned} P(A_i) &= 1 - P(A_i^c) \\ &= 1 - P\{\text{κανένα κουπόνι δεν είναι τύπου } i\} \\ &= 1 - (1 - p_i)^k, \end{aligned}$$

όπου για τα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε ότι κάθε κουπόνι, ανεξαρτήτως των υπολοίπων, δεν είναι τύπου i με πιθανότητα $1 - p_i$. Όμοια

$$\begin{aligned} P(A_i \cup A_j) &= 1 - P((A_i \cup A_j)^c) \\ &= 1 - P\{\text{κανένα κουπόνι δεν είναι τύπου } i \text{ ή τύπου } j\} \\ &= 1 - (1 - p_i - p_j)^k, \end{aligned}$$

όπου για τα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε ότι κάθε κουπόνι, ανεξαρτήτως των υπολοίπων, δεν είναι τύπου i ή j , με πιθανότητα $1 - p_i - p_j$. Για να καθορίσουμε τα $P(A_i | A_j)$, θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$P(A_i \cup A_j) = P(A_i) + P(A_j) - P(A_i \cap A_j),$$

το οποίο, σε συνδυασμό με τα (α) και (β), μας δίνει ότι

$$\begin{aligned} P(A_i A_j) &= 1 - (1 - p_i)^k + 1 - (1 - p_j)^k - [1 - (1 - p_i - p_j)^k] \\ &= 1 - (1 - p_i)^k - (1 - p_j)^k + (1 - p_i - p_j)^k. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$P(A_i | A_j) = \frac{P(A_i A_j)}{P(A_j)} = \frac{1 - (1 - p_i)^k - (1 - p_j)^k + (1 - p_i - p_j)^k}{1 - (1 - p_j)^k}$$

□