

1 Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A, B . Με πιθανότητα 0.5 θα συμβεί το A , με πιθανότητα 0.4 θα συμβεί το B και με πιθανότητα 0.3 θα συμβούν και τα δύο. Ποια είναι η πιθανότητα να μη συμβεί κανένα από τα δύο;

Λύση: Η πιθανότητα να συμβεί ένα από τα δύο είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6.$$

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το συμπλήρωμα του συμπλήρωμα του ενδεχομένου να συμβεί ένα από τα δύο και έτσι

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = .4$$

□

Άσκηση 2 Κατά την ρίψη δύο ζαριών, ποια είναι η πιθανότητα, το άθροισμα τους να ισούται με 7;

Λύση: Θα λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, με την προϋπόθεση ότι όλα τα 36 αποτελέσματα είναι το ίδιο πιθανά να πραγματοποιηθούν. Καθώς υπάρχουν 6 πιθανά αποτελέσματα $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ έτσι ώστε το αποτέλεσμα στο άθροισμα των ζαριών να είναι 7, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

□

Άσκηση 3 Αν «επιλέξουμε τυχαία» 3 μπάλες από ένα κουτί που περιέχει 6 λευκές και 5 μαύρες μπάλες, ποια η πιθανότητα μία από τις μπάλες της επιλογής μας να είναι λευκή και οι δύο άλλες μαύρες;

Λύση: Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία κάνουμε την επιλογή των μπαλών, τότε ο δειγματοχώρος αποτελείται από $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ δυνατά αποτελέσματα. Επίσης υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ αποτελέσματα για τα οποία πρώτη μπάλα της επιλογής θα είναι λευκή και οι άλλες δύο μαύρες· $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ αποτελέσματα όπου η πρώτη θα είναι μαύρη, η δεύτερη λευκή και η τρίτη μαύρη και $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ αποτελέσματα όπου οι δύο πρώτες θα είναι μαύρες και η τρίτη λευκή. Έτσι υποθέτοντας την «τυχαία επιλογή», δηλαδή ότι κάθε αποτέλεσμα είναι το ίδιο πιθανό να πραγματοποιηθεί, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{120 + 120 + 120}{990} = \frac{4}{11}.$$

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί θεωρώντας το αποτέλεσμα του πειράματος σαν το μη διατεταγμένο σύνολο από μπάλες που επιλέξαμε. Έτσι υπάρχουν $\binom{11}{3} = 165$ δυνατά αποτελέσματα στον δειγματοχώρο. Καθένα σύνολο από

3 μπάλες αντιστοιχεί σε $3!$ αποτελέσματα όταν λαμβάνεται υπόψιν η διάταξη. Αν όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα να πραγματοποιηθούν όταν μας ενδιαφέρει η σειρά που επιλέγουμε τις μπάλες, τότε συμπεραίνουμε ότι παραμένουν εξίσου ισοπίθανα όταν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα μη διατεταγμένο σύνολο από τις μπάλες της επιλογής μας. Έτσι θα έχουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{6}{1} \binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11},$$

που συμφωνεί, φυσικά, με το αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν. $\square$

Άσκηση 4 Μία επιτροπή από 5 άτομα επιλέγεται από μία ομάδα από 6 άντρες και 9 γυναίκες. Αν η επιλογή γίνεται τυχαία, ποια η πιθανότητα η επιτροπή να αποτελείται από 3 άντρες και 2 γυναίκες;

Λύση: Ας υποθέσουμε ότι *τυχαία επιλογή* σημαίνει ότι καθένα από τους $\binom{15}{5}$ δυνατούς συνδυασμούς είναι το ίδιο πιθανό να επιλεγεί. Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{\binom{6}{3} \binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

$\square$

Άσκηση 5 Ένα κουτί περιέχει n μπάλες, από τις οποίες μία είναι άσπρη και οι υπόλοιπες μαύρες. Αν τραβήξουμε k από αυτές, μία κάθε φορά, ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε την άσπρη μπάλα;

Λύση: Αν δεν μεροληπτούμε στην επιλογή μας, θα έχουμε ότι το σύνολο από k μπάλες που επιλέξαμε είναι το ίδιο πιθανό να είναι οποιοδήποτε από τα $\binom{n}{k}$ σύνολα από k μπάλες. Γιαυτό,

$$P\{\text{να επιλεγεί η ιδιαίτερη μπάλα}\} = \frac{\binom{1}{1} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}.$$

Θα μπορούσαμε να πάρουμε το παραπάνω αποτέλεσμα θέτοντας A_i να συμβολίζει το ενδεχόμενο η άσπρη μπάλα να είναι η i -οστή μπάλα που θα επιλεγεί, με

$i = 1, \dots, k$. Τότε καθώς κάθε μία από τις n μπάλες είναι το ίδιο πιθανό να είναι η i -οστή μπάλα που θα επιλεγθεί, συνεπάγεται ότι $P(A_i) = 1/n$. Έτσι, καθώς αυτά τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα κατά ζεύγη, θα έχουμε

$$P\{\text{να επιλεγεί η άσπρη μπάλα}\} = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = \frac{k}{n}.$$

Τέλος θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι $P(A_i) = 1/n$, παρατηρώντας ότι υπάρχουν $n(n-1) \cdots (n-k+1) = n!/(n-k)!$ ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος, από τα οποία $(n-1)(n-2) \cdots (n-i+1)(1)(n-i) \cdots (n-k+1) = (n-1)!/(n-k)!$ αντιστοιχούν σε αυτά όπου η i -οστή μπάλα της επιλογής μας θα είναι η ιδιαίτερη μπάλα. Από αυτό, έπεται ότι

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

□

Άσκηση 6 Έστω πως $n + m$ μπάλες, εκ των οποίων οι n είναι κόκκινες και οι m μπλε, τοποθετούνται σε μία διατεταγμένη σειρά, με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι $(n+m)!$ δυνατές διατάξεις να είναι ισοπίθανες. Αν καταγράψουμε τα αποτελέσματα αυτού του πειράματος σημειώνοντας μόνο τα χρώματα των διαδοχικών μπαλών, δείξτε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα παραμένουν ισοπίθανα.

Λύση: Ας πάρουμε κάθε μία από τις $(n+m)!$ δυνατές διατάξεις και να παρατηρήσουμε ότι κάθε μετάθεση των κόκκινων μπαλών μεταξύ τους, δεν επηρεάζει την ακολουθία των χρωμάτων. Σαν αποτέλεσμα αυτού, κάθε διάταξη των χρωμάτων αντιστοιχεί σε $n! m!$ διαφορετικές διατάξεις των $n + m$ μπαλών, έτσι κάθε διάταξη των χρωμάτων έχει πιθανότητα $\frac{n!m!}{(n+m)!}$ να πραγματοποιηθεί.

Για παράδειγμα, έστω ότι υπάρχουν 2 κόκκινες μπάλες, με αρίθμηση κ_1, κ_2 και δύο μπλε με αρίθμηση μ_1, μ_2 . Τότε, από τις 4! δυνατές διατάξεις, θα υπάρχουν 2! 2! διατάξεις που θα πραγματοποιούνται σε κάθε ένα χρωματικό συνδυασμό. Για παράδειγμα, οι παρακάτω διατάξεις αφορούν τις διαδοχικές μπάλες που εναλλάσσονται στο χρώμα αν η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη:

$$\kappa_1, \mu_1, \kappa_2, \mu_2 \quad \kappa_1, \mu_2, \kappa_2, \mu_1 \quad \kappa_2, \mu_1, \kappa_1, \mu_2 \quad \kappa_2, \mu_2, \kappa_1, \mu_1.$$

Έτσι, κάθε μία από τις δυνατές χρωματικές διατάξεις έχει πιθανότητα $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ να πραγματοποιηθεί. □