

Παράδειγμα:

Σε μια μελέτη των αιτίων καταστροφής του οδοστρώματος βρέθηκε ότι στο 8% των περιπτώσεων καταστροφής υπήρχε αστοχία υλικού, στο 85% των περιπτώσεων υπήρχε κατασκευαστική κακοτεχνία και στο 5% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης. Με βάση τα ποσοστά αυτά, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε ένα συγκεκριμένο έλεγχο οδοστρώματος υπάρχει:

- (α) αστοχία υλικού ή κατασκευαστική κακοτεχνία,
- (β) αστοχία υλικού, αλλά όχι κατασκευαστική κακοτεχνία,
- (γ) το πολύ ένα είδος αιτία από τις αναφερόμενες αιτίες,
- (δ) καμιά από τις δύο αναφερόμενες αιτίες.

Έστω A και B συμβολίζουν τα ενδεχόμενα βλάβης αστοχία υλικού και κατασκευαστικής κακοτεχνίας, αντίστοιχα. Με βάση το στατιστικό ορισμό, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις εξής πιθανότητες: $P(A) = 0.08$, $P(B) = 0.85$, $P(A \cap B) = 0.05$.

- (α) Ζητείται η $P(A \cup B)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της προσθέσεως, έχουμε:

$$P(A \cup B) = 0.08 + 0.85 - 0.05 = 0.88.$$

- (β) Ζητείται η $P(A \cap B') = P(A - B)$. Επειδή $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ και τα δύο ενδεχόμενα στην ένωση είναι ασυμβίβαστα έπεται ότι:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A - B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) = 0.08 - 0.05 = 0.03 \end{aligned}$$

- (γ) "το πολύ ένα είδος αιτία από τις αναφερόμενες αιτίες" σημαίνει να μην υπάρχουν και οι δύο είδη αιτίας, δηλαδή είναι το ενδεχόμενο $(A \cap B)'$. Έχουμε:

$$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.05 = 0.95.$$

- (δ) Ζητείται η $P(A' \cap B')$. Εφαρμόζοντας το γνωστό κανόνα De Morgan της θεωρίας συνόλων και $A' \cap B' = (A \cup B)'$ παίρνουμε:

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.88 = 0.12$$

ΜΕΘΟΔΟΣ

Η λύση πολλών προβλημάτων που αναφέρονται σε δύο βασικά ενδεχόμενα A και B (ή σε δύο μεταβλητές με δύο δυνατές τιμές για καθεμιά μεταβλητή) διευκολύνεται με τη θεώρηση ενός 2×2 πίνακα πιθανοτήτων.

Τα ενδεχόμενα που αντιστοιχούν στα τέσσερα εσωτερικά σημεία του πίνακα μπορούν να θεωρηθούν ως τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του πειράματος. Δηλαδή, εδώ, $\Omega = \{A \cap B, A \cap B', A' \cap B, A' \cap B'\}$.

	B	B'	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap B')$	$P(A)$
A'	$P(A' \cap B)$	$P(A' \cap B')$	$P(A')$
	$P(B)$	$P(B')$	1.00

Σε τέτοιους πίνακες ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες:

1. Το άθροισμα των (εσωτερικών) πιθανοτήτων κάθε γραμμής ή στήλης ισούται με την εξωτερική πιθανότητα στο αντίστοιχο περιθώριο του πίνακα
2. Το άθροισμα των περιθωρίων πιθανοτήτων για τις γραμμές ή για τις στήλες ισούται με τη μονάδα.

Ο πίνακας πιθανοτήτων για τα δεδομένα του παραδείγματος

	B	B'	
A	0.05		0.08
A'			
	0.85		1.00

Κάνοντας χρήση αυτών των ιδιοτήτων, μπορούμε να συμπληρώσουμε τον υπόλοιπο πίνακα.

	B	B'	
A	0.05	0.03	0.08
A'	0.80	0.12	0.92
	0.85	0.15	1.00

Από όπου συμπεραίνουμε

$$P(A' \cap B) = 0.80, \quad P(A \cap B') = P(A - B) = 0.03 \quad \text{και} \quad P(A' \cap B') = 0.12$$

Άσκηση 1

Σε μια μελέτη των αιτίων διακοπής του ηλεκτρικού ρεύματος βρέθηκε ότι στο 10% των περιπτώσεων διακοπής υπήρχε βλάβη μετασχηματιστή, στο 75% των περιπτώσεων υπήρχε βλάβη γραμμής μεταφοράς και στο 2% των περιπτώσεων υπήρχαν και τα δύο είδη βλάβης. Με βάση τα ποσοστά αυτά, να βρεθούν οι παρακάτω πιθανότητες ότι σε μια συγκεκριμένη διακοπή ρεύματος υπάρχει:

- (α) βλάβη μετασχηματιστή ή βλάβη γραμμής μεταφοράς,
- (β) βλάβη μετασχηματιστή, αλλά όχι βλάβη γραμμής μεταφοράς,
- (γ) το πολύ ενός είδους βλάβη,
- (δ) καμιά από τις δύο αναφερόμενες βλάβες.

Απάντηση: Έστω A και B συμβολίζουν τα ενδεχόμενα βλάβης μετασχηματιστή και γραμμής μεταφοράς, αντίστοιχα. Με βάση το στατιστικό ορισμό, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις εξής πιθανότητες: $P(A) = 0.10$, $P(B) = 0.75$, $P(A \cap B) = 0.02$.

(α) Ζητείται η $P(A \cup B)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της προσθέσεως, έχουμε:

$$P(A \cup B) = 0.10 + 0.75 - 0.02 = 0.83.$$

(β) Ζητείται η $P(A \cap B') = P(A - B)$. Επειδή $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ και τα δύο ενδεχόμενα στην ένωση είναι ασυμβίβαστα έπεται ότι:

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) = P(A - B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.10 - 0.02 = 0.08$$

(γ) "Υπάρχει το πολύ ενός είδους βλάβη" σημαίνει να μην υπάρχουν και τα δύο είδη βλάβης, δηλαδή είναι το ενδεχόμενο $(A \cap B)'$. Έχουμε:

$$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.02 = 0.98.$$

(δ) Ζητείται η $P(A' \cap B')$. Εφαρμόζοντας το γνωστό κανόνα De Morgan της θεωρίας συνόλων και $A' \cap B' = (A \cup B)'$ παίρνουμε:

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.83 = 0.17.$$

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι

	B	B'	
A	0.02	0.08	0.10
A'	0.73	0.17	0.90
	0.75	0.25	1.00

Άσκηση 2

Η πιθανότητα να πάρει ένα αεροδρόμιο κάποιο βραβείο A για το σχεδιασμό του είναι 0.25, η πιθανότητα να πάρει κάποιο βραβείο B για την αποδοτική χρησιμοποίηση υλικών είναι 0.18 και η πιθανότητα να πάρει το βραβείο A , αλλά όχι το βραβείο B είναι 0.19. Να βρεθούν οι εξής πιθανότητες γι' αυτό το αεροδρόμιο:

- (α) Να πάρει και τα δύο βραβεία.
- (β) Να πάρει τουλάχιστον ένα από τα δύο βραβεία.
- (γ) Να πάρει το πολύ ένα από τα δύο βραβεία.
- (δ) Να πάρει το βραβείο B , αλλά όχι το A .
- (ε) Να πάρει ακριβώς ένα από τα δύο βραβεία.

Απάντηση

Έστω A και B συμβολίζουν τα ενδεχόμενα να πάρει το αεροδρόμιο τα αντίστοιχα βραβεία. Ο πίνακας δείχνει το συμπληρωμένο 2×2 πίνακα πιθανοτήτων, στον οποίο έχουν υπογραμμιστεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Πίνακας πιθανοτήτων			
	B	B'	
A	0.06	<u>0.19</u>	<u>0.25</u>
A'	0.12	0.63	0.75
	<u>0.18</u>	0.82	1.00

(α) Ζητείται η πιθανότητα $P(A \cap B)$, που είναι: $0.25 - 0.19 = 0.06$

(β) Ζητείται η $P(A \cup B)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της προσθέσεως, έχουμε:

$$P(A \cup B) = 0.25 + 0.18 - 0.06 = 0.37.$$

(γ) Έχουμε: $P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.06 = 0.94$.

(δ) Από τον πίνακα βλέπουμε αμέσως ότι $P(B \cap A') = 0.18 - 0.06 = 0.12$.

(ε) "Να πάρει ακριβώς ένα από τα δύο βραβεία" είναι το ενδεχόμενο

$(A \cap B') \cup (A' \cap B)$, και τα δύο ενδεχόμενα στην ένωση είναι ασυμβίβαστα. Άρα, έχουμε:

$$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0.19 + 0.12 = 0.31.$$

4. Στοιχεία Συνδυαστικής

Βασική αρχή απαρίθμησης: Αν ένα πείραμα μπορεί να αναλυθεί σε r υποπειράματα, όπου το πρώτο υποπείραμα έχει v_1 δυνατά αποτελέσματα, το δεύτερο υποπείραμα έχει v_2 δυνατά αποτελέσματα, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί στο πρώτο υποπείραμα, ..., το r υποπείραμα έχει v_r δυνατά αποτελέσματα, ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα που θα εμφανιστούν στα $r-1$ πρώτα υποπειράματα, τότε το συνολικό πείραμα έχει $v = v_1 \cdot v_2 \cdots v_r$ δυνατά αποτελέσματα.

Για **παράδειγμα** εάν έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε τρεις διαφορετικές μπλούζες και δύο διαφορετικά παντελόνια τότε μπορούμε να έχουμε $3 \times 2 = 6$ διαφορετικά ντυσίματα.

Διατάξεις χωρίς επανάληψη (επανατοποθέτηση) Έστω v διαφορετικά αντικείμενα ή, γενικότερα, ένα σύνολο με v στοιχεία. Αν πάρουμε r από αυτά τα αντικείμενα ($1 \leq r \leq v$) και τα κατατάξουμε σε μια σειρά, τότε λέμε ότι παίρνουμε μια *διάταξη των v αντικειμένων ανά r* .

Στις **διατάξεις** η σειρά έχει σημασία.

Έστω το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Βρείτε όλες τις διατάξεις των 3 ανά 2 από αυτό το σύνολο.

Οι ζητούμενες διατάξεις είναι: $\alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\gamma, \gamma\alpha, \beta\gamma, \gamma\beta$.

Πλήθος διατάξεων των v ανά r . Ο αριθμός των διατάξεων των v αντικειμένων ανά r συμβολίζεται με $P_{v,r}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$P_{v,r} = v(v-1)\cdots(v-r+1), \quad r = 1, 2, \dots, v.$$

Ένας διαφορετικός τύπος για το πλήθος των διατάξεων $P_{v,r}$ είναι:

$$P_{v,r} = \frac{v!}{(v-r)!}, \quad r = 1, 2, \dots, v, \quad (2.6)$$

όπου ορίζουμε $0! = 1$ και $v! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (v-1) \cdot v$.

Παράδειγμα: Έστω ένα δοχείο με 10 σφαίρες οι οποίες έχουν αριθμηθεί 1, 2, ..., 10. Επιλέγουμε στην τύχη 3 σφαίρες, τη μια κατόπιν της άλλης, από το δοχείο, και έστω ότι ενδιαφερόμαστε, εκτός από τους αριθμούς των σφαιρών που θα επιλεγούν, και για τη σειρά με την οποία θα επιλεγούν οι σφαίρες. Βρείτε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.

Το πείραμα αναλύεται σε 3 υποπειράματα που έχουν 10, 9, και 8 δυνατά αποτελέσματα, αντίστοιχα, και, επομένως, το πλήθος όλων των αποτελεσμάτων του συνολικού πειράματος είναι ίσο με $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Δηλαδή έχουμε 720 διαφορετικές τριάδες. Με αυτόν τον τρόπο χρησιμοποιήσαμε την βασική αρχή απαρίθμησης. Άμεσα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις διατάξεις 10 αντικειμένων (αριθμών από 1 έως 10) ανά 3 (θέσεις στις τριάδες) χωρίς επανάθεση (επανατοποθέτηση). Οπότε από τον τύπο $P_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Διατάξεις με επανάληψη Έστω και πάλι n διαφορετικά αντικείμενα. Ενώ σε μια κοινή διάταξη των n ανά r όλα τα r αντικείμενα που περιλαμβάνονται στη διάταξη είναι διαφορετικά, σε μια *διάταξη με επανάληψη των n αντικειμένων ανά r* καθένα από τα αντικείμενα που περιλαμβάνονται στη διάταξη μπορεί να επαναληφθεί μέχρι r φορές. Εδώ το r δεν είναι απαραίτητα μικρότερο ή ίσο του n , αλλά μπορεί να είναι και $r > n$.

Έστω το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Να βρεθούν όλες τις διατάξεις με επανάληψη των 3 ανά 2 από αυτό το σύνολο.

Οι ζητούμενες διατάξεις είναι: $\alpha\alpha, \alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\gamma, \gamma\alpha, \beta\beta, \beta\gamma, \gamma\beta, \gamma\gamma$. Δηλαδή έχουμε 9 διατάξεις με επανάληψη των 3 ανά 2, ενώ μόνο $3 \times 2 = 6$ διατάξεις των 3 ανά 2.

Πλήθος διατάξεων με επανάληψη των n ανά r . Ο αριθμός των διατάξεων με επανάληψη των n αντικειμένων ανά r συμβολίζεται με $R_{n,r}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$R_{n,r} = n^r, \quad r = 1, 2, \dots$$

Στην ειδική περίπτωση που $r = n$, οι διατάξεις των n αντικειμένων ανά r χωρίς επανάθεση λέγονται **μεταθέσεις των n αντικειμένων**. Ο τύπος που δίνει το πλήθος των μεταθέσεων των n αντικειμένων είναι:

$$P_{n,n} = n!$$

Έστω ένα δοχείο με 10 σφαίρες οι οποίες έχουν αριθμηθεί 1, 2, ..., 10. Επιλέγουμε στην τύχη 3 σφαίρες, τη μια κατόπιν της άλλης, από το δοχείο, αλλά κάθε φορά που βγάζουμε μια σφαίρα την τοποθετούμε και πάλι στο δοχείο πριν κάνουμε την επόμενη τυχαία επιλογή σφαίρας. Έστω ότι ενδιαφερόμαστε και εδώ, εκτός από τους αριθμούς των σφαιρών που θα επιλεγούν, και για τη σειρά με την οποία θα επιλεγούν οι σφαίρες. Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.

Το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $R_{10,3}$. Από τον παραπάνω τύπο, $R_{10,3} = 10^3 = 1000$.

Συνδυασμοί: Έστω ένα σύνολο με n στοιχεία. Ένα οποιοδήποτε υποσύνολο με r στοιχεία ($0 \leq r \leq n$) από αυτό το σύνολο λέγεται *συνδυασμός των n αντικειμένων ανά r* .

Παράδειγμα Έστω το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Να βρεθούν όλοι οι συνδυασμοί των 3 ανά 2 από αυτό το σύνολο.

Οι ζητούμενοι συνδυασμοί είναι τα τρία υποσύνολα $\{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}$.

Πλήθος συνδυασμών των n ανά r . Ο αριθμός των συνδυασμών των n αντικειμένων ανά r συμβολίζεται με $\binom{n}{r}$ και δίνεται από τον τύπο:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \quad r = 0, 1, \dots, n.$$

Στους συνδυασμούς η σειρά δεν έχει σημασία.

Δειγ/ψία χωρίς επαν/ση και χωρίς παρατήρηση της σειράς Έστω ένα δοχείο με 10 σφαίρες οι οποίες έχουν αριθμηθεί 1, 2, ..., 10. Επιλέγουμε στην τύχη 3 σφαίρες, τη μια κατόπιν της άλλης, από το δοχείο, και έστω ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τους αριθμούς των σφαιρών που θα επιλεγούν, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα επιλεγούν. Να βρεθεί το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος.

Το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{720}{6} = 120$.

Άσκηση 4

Μια παρτίδα εξαρτημάτων περιέχει 20 εξαρτήματα συνολικά, από τα οποία 6 εξαρτήματα είναι ελαττωματικά. Βρείτε την πιθανότητα να περιέχονται 2 ελαττωματικά εξαρτήματα μεταξύ 5 εξαρτημάτων που επιλέχτηκαν στην τύχη (χωρίς επανατοποθέτηση) από την παρτίδα.

Απάντηση

Έστω A το ενδεχόμενο για το οποίο ζητείται η πιθανότητα. Επειδή δε μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των 5 εξαρτημάτων, εργαζόμαστε με συνδυασμούς. Τα ευνοϊκά αποτελέσματα του πειράματος προς το A είναι όσοι οι δυνατοί τρόποι επιλογής 2 ελαττωματικών από τα 6 ελαττωματικά εξαρτήματα και 3 καλών από τα 14 καλά εξαρτήματα της παρτίδας. Με εφαρμογή της βασικής αρχής απαρίθμησης, αυτοί είναι $\binom{6}{2} \cdot \binom{14}{3}$. Ο συνολικός αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος είναι ίσος με το πλήθος των υποσυνόλων 5 στοιχείων ενός συνόλου με 20 στοιχεία, δηλαδή με $\binom{20}{5}$. Επειδή η επιλογή των σφαιρών γίνεται τυχαία, μπορούμε να θεωρήσουμε ισοπίθανα όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος. Άρα βρίσκουμε:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{14}{3}}{\binom{20}{5}} = 0.3522$$

Άσκηση 7

Ένα κουτί με 12 μπαταρίες ραδιοφώνου περιέχει 3 ελαττωματικές μπαταρίες. Αν αγοράσετε 4 μπαταρίες από το κουτί, να βρεθούν οι πιθανότητες να πάρουμε:

- (α) μια ελαττωματική μπαταρία,
- (β) όλες καλές μπαταρίες.

Απάντηση

Με παρόμοια συλλογιστική με αυτή της απάντησης της Άσκησης 4 και συμβολίζοντας με A, B τα ενδεχόμενα που μας ενδιαφέρουν, βρίσκουμε:

$$(α) \quad P(A) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{9}{3}}{\binom{12}{4}} = \frac{3 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3!}}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!}} = \frac{252}{495} = 0.5091,$$

$$(β) \quad P(B) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{9}{4}}{\binom{12}{4}} = \frac{1 \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!}}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4!}} = \frac{14}{55} = 0.2545.$$

5. Δεσμευμένη Πιθανότητα

Ορισμός δεσμευμένης πιθανότητας: Έστω A, B δύο ενδεχόμενα σ' ένα πείραμα και έστω ότι $P(B) > 0$. Η **δεσμευμένη πιθανότητα του A όταν δίνεται το B** συμβολίζεται με $P(A | B)$ και ορίζεται από τη σχέση:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} .$$

Όταν $P(B) = 0$, η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A | B)$ δεν ορίζεται.

Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας προκύπτει η επόμενη πρόταση, που είναι γνωστή **ως ο κανόνας του γινομένου**.

Κανόνας του γινομένου Για δύο ενδεχόμενα A και B ισχύει η σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B), \quad (2.11)$$

υποθέτοντας ότι οι πιθανότητες $P(B | A)$ και $P(A | B)$ μπορούν να οριστούν.

Άσκηση 8

Αναφερόμενοι στην Άσκηση 1 να υπολογιστούν οι πιθανότητες, σε μια διακοπή ρεύματος, να υπάρχει βλάβη:

(α) γραμμής μεταφοράς, δεδομένου ότι υπάρχει βλάβη μετασχηματιστή,

(β) γραμμής μεταφοράς όταν είναι γνωστό ότι δεν υπάρχει βλάβη μετασχηματιστή.

Απάντηση: Έστω A και B συμβολίζουν πάλι τα ενδεχόμενα βλάβης μετασχηματιστή και γραμμής μεταφοράς, αντίστοιχα.

(α) Ζητείται η δεσμευμένη πιθανότητα $P(B | A)$, που είναι:

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.02}{0.10} = 0.20 .$$

(β) Ισχύει όπου τις τιμές τις πήραμε από τον πίνακα της Άσκησης 1.

$$P(B | A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{0.73}{0.90} = 0.8111$$

Άσκηση 9

Αναφερόμενοι στα δεδομένα της Άσκησης 2, να υπολογισθούν οι εξής πιθανότητες για το αεροδρόμιο:

(α) να πάρει το βραβείο A όταν είναι γνωστό ότι δε θα πάρει το βραβείο B ,

(β) να μην πάρει και τα δύο βραβεία, δεδομένου ότι θα πάρει το βραβείο A .

Απάντηση

$$(α) \quad P(A | B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{0.19}{1 - 0.18} = \frac{0.19}{0.82} = 0.2317 .$$

$$(β) \text{ Ζητείται η } P(B' | A) . \text{ Είναι } P(B' | A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{0.19}{0.25} = 0.76 .$$

Άσκηση 9

Από μια συνήθη τράπουλα 52 χαρτιών επιλέγουμε στην τύχη 5 χαρτιά χωρίς επανατοποθέτηση. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(α) τα 2 πρώτα χαρτιά που θα επιλεγούν να είναι άσοι,

(β) τα 2 πρώτα χαρτιά που θα επιλεγούν να περιέχουν ακριβώς έναν άσο,

Απάντηση: Έστω $A_i = \{\text{να βγάλουμε άσο στο } i \text{ χαρτί}\}$, $B_i = \{\text{να βγάλουμε δέκα στο } i \text{ χαρτί}\}$, $K_i = \{\text{να βγάλουμε ρήγα στο } i \text{ χαρτί}\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα, $P(A_1 \cap A_2)$, βρίσκεται από τον κανόνα του γινομένου:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = 0.0045 \text{ .}$$

Εδώ βλέπουμε ότι η δεσμευμένη πιθανότητα $P(A_2 | A_1)$ βρίσκεται αμέσως, με χρήση του κλασικού ορισμού της πιθανότητας στο πείραμα επιλογής του δεύτερου χαρτιού.

(β) Επειδή ο άσος μπορεί να βγει στο πρώτο ή στο δεύτερο χαρτί, αλλά όχι και στα δύο, έχουμε να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $(A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)$. Η πιθανότητα αυτή ισούται με το άθροισμα των πιθανοτήτων των δύο ενδεχόμενων στις παρενθέσεις, επειδή αυτά είναι ασυμβίβαστα. Επομένως, από τον κανόνα του γινομένου:

$$\begin{aligned} P[(A_1 \cap A_2') \cup (A_1' \cap A_2)] &= P(A_1) \cdot P(A_2' | A_1) + P(A_1') \cdot P(A_2 | A_1') \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{(2)(4)(48)}{(52)(51)} = 0.1448 \text{ .} \end{aligned}$$

Τα δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου πειράματος τύχης λέγονται **ανεξάρτητα** όταν η πραγματοποίηση του ενός δεν μας δίνει πληροφορίες για την πραγματοποίηση του άλλου.

Τα δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ανεξάρτητα** όταν ισχύει η σχέση:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ .}$$

Τα n ενδεχόμενα $A_1, A_2, \dots, A_n$ λέγονται **ανεξάρτητα** αν για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό k με $2 \leq k \leq n$ και για οποιοδήποτε υποσύνολο k ενδεχόμενων από τα n , $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, ισχύει:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) \text{ .}$$

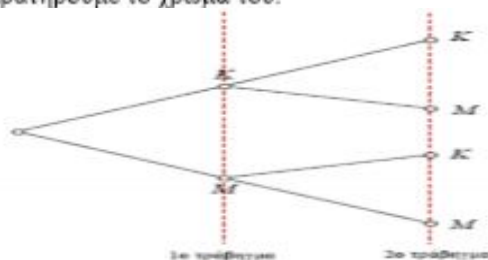
Τα n **πειράματα** $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ λέγονται **ανεξάρτητα** όταν οποιαδήποτε n ενδεχόμενα –ένα ενδεχόμενο από κάθε πείραμα– είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Αν τα A και B είναι ανεξάρτητα και έχουν θετικές πιθανότητες, τότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$P(A | B) = P(A), \quad P(B | A) = P(B) \text{ .}$$

5. Υπολογισμός πιθανοτήτων σε επαναλαμβανόμενα πειράματα

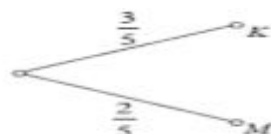
Ένα δοχείο, περιέχει 3 κόκκινα και 2 μπλε σφαιρίδια. Επιλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο, παρατηρούμε το χρώμα του και το αφήνουμε έξω από το κουτί. Στη συνέχεια, επιλέγουμε ένα δεύτερο σφαιρίδιο, και παρατηρούμε το χρώμα του.



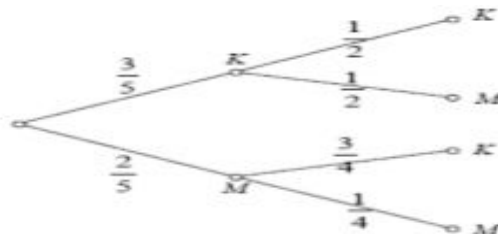
Τα δυνατά αποτελέσματα του παραπάνω πειράματος, είναι KK, KM, MK, MM .

Ας δούμε πώς μπορούμε να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα με ένα δένδροδιάγραμμα.

Το 1^ο βήμα του πειράματος, (1^ο τράβηγμα), αναπαριστάται από δύο κλάδους, που καταλήγουν στους κόμβους K και M . Πάνω στους κλάδους, σημειώνουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες.

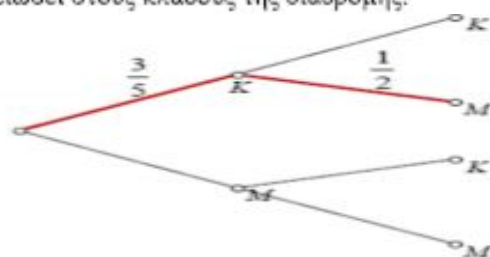


Σε κάθε περίπτωση (K ή M), το 2^ο βήμα του πειράματος (2^ο τράβηγμα), αναπαριστάται με τον ίδιο τρόπο.



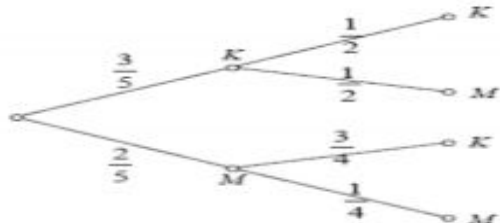
Έτσι, έχουμε ένα δένδροδιάγραμμα που παρουσιάζει τα αποτελέσματα που είναι δυνατόν να εμφανιστούν σε κάθε βήμα του πειράματος, καθώς και τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Τώρα, για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων των αποτελεσμάτων KK, KM, MK, MM , που εμφανίζονται στο τέλος της διαδικασίας εκτέλεσής του, παρατηρούμε ότι αυτά προκύπτουν ως ακολουθίες των ενδιάμεσων βημάτων. Έτσι, για να βρούμε τα αποτελέσματα, ξεκινάμε από τους τελικούς κόμβους και βαδίζουμε προς τα πίσω, μέχρι τη ρίζα, κατά μήκος των κλάδων. Η πιθανότητα κάθε τελικού αποτελέσματος υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας τις πιθανότητες που έχουμε σημειώσει στους κλάδους της διαδρομής.



$$P(KM) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Έτσι, για το παραπάνω πείραμα το δένδροδιάγραμμα που παρουσιάζει όλα τα αποτελέσματα και τις αντίστοιχες πιθανότητες θα έχει ως εξής:



$$P(KK) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(KM) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

$$P(MK) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

$$P(MM) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Έστω τώρα, ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του γεγονότος, το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι κόκκινο. Στο δένδροδιάγραμμα του πειράματος, παρατηρούμε ότι το δεύτερο σφαιρίδιο είναι κόκκινο όταν συμβαίνει το γεγονός KK ή το MK . Αυτά όμως τα γεγονότα είναι ξένα

μεταξύ τους, επομένως $P(\text{Το 2ο σφαιρίδιο κόκκινο}) = P(KK) + P(MK) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$.