

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ I

Προτεινόμενο βιβλίο: Μάρκου Κούτρα

"ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ και ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ"

Η Θεωρία Πιθανοτήτων έχει ως αντικείμενο την μελέτη φαινομένων, η εξέλιξη των οποίων επηρεάζεται από την τύχη.

Ιστορική Αναδρομή: Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι το 3000 π.Χ. χρησιμοποιούσαν τον «αστράγαλο» (κόκκαλο ζώου) με τέσσερις πλευρές για να παίξουν τυχερά παιχνίδια.

ζάρια (1600 π.Χ.)

κάρτες (τραπουλόχαρτα) εμφανίζονται μεταξύ 7^{ου}-10^{ου} αιώνα μ.Χ. Κίνα

Pascal (1623-1662) — Fermat (1601-1665) "αλληλογραφία για το πρόβλημα του Chevalier de Méré"

Christian Huyghens (1629-1695)

Bernoulli (1654-1705)

de Moivre (1667-1754)

Laplace (1749-1827)

Poisson (1781-1842)

Gauss (1777-1855)

Chebyshev (1821-1894)

Markov (1856-1922)

von Mises (1883-1953)

Kolmogorov (1903-1987)

"Αξιοματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων το 1933."

Πείραμα Τύχης: Πείραμα το αποτέλεσμα του οποίου εξαρτάται από την τύχη.

Δειγματικός Χώρος Ω ενός πειράματος τύχης: Σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης

Δειγματικά Σημεία: Τα στοιχεία του δειγματικού χώρου

Ενδεχόμενα ή Γεγονότα (συμβολισμός $A, B, \Gamma, \dots$): Υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω .

Απλά ή Στοιχειώδη Ενδεχόμενα: Ενδεχόμενα που αποτελούνται από μόνον ένα στοιχείο, δηλαδή $A = \{\omega\}$.

Σύνθετα Ενδεχόμενα: Ενδεχόμενα που περιέχουν περισσότερα από ένα στοιχεία.

π.χ. Ρίψη Τετραεπίκουρου

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Δειγματικά Σημεία: 1, 2, 3, 4, 5, 6

$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4\}, A_5 = \{5\}, A_6 = \{6\}$: στοιχειώδη ενδεχόμενα του Ω .

$B_1 = \{2, 4, 6\}$ σύνθετο ενδεχόμενο "εμφανίζεται άρτια ένδειξη"

$B_2 = \{3, 4, 5, 6\}$ σύνθετο ενδεχόμενο "εμφανίζεται ένδειξη ≥ 3 "

π.χ. Ρίψη νομίσματος τρεις φορές

$$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

Το ενδεχόμενο "εμφανίζονται τρία ίδια αποτελέσματα"

$$A = \{KKK, \Gamma\Gamma\Gamma\}$$

Το ενδεχόμενο "εμφανίζονται δύο ακριβώς κορώνες"

$$B = \{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$$

Στα δύο προηγούμενα παραδείγματα οι δειγματικοί χώροι είναι πεπερασμένοι.

π.χ. Ρίψη νομίσματος μέχρις ότου εμφανιστούν για πρώτη φορά γράμματα.

$$\Omega = \{\Gamma, K\Gamma, KK\Gamma, KKK\Gamma, \dots\}$$

Το ενδεχόμενο "εμφανίζονται για πρώτη φορά γράμματα στην τέταρτη δοκιμή"

$$A = \{KKK\Gamma\} \text{ από ενδεχόμενο}$$

Το ενδεχόμενο "η διαδικασία τερματίζεται μέχρι την 3^η δοκιμή"

$$B = \{\Gamma, K\Gamma, KK\Gamma\}$$

Το ενδεχόμενο "χρειάζονται τουλάχιστον τέσσερις δοκιμές για να τερματιστεί το πείραμα"

$$\Gamma = \{KKK\Gamma, KKKK\Gamma, KKKKK\Gamma, \dots\}$$

Σε αυτό το πείραμα έχουμε απείρως αριθμήσιμο δειγματικό χώρο, δηλαδή είναι άπειρο σύνολο με ίδιο πληθυσικό αριθμό με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

π.χ. Χρόνος (σε ώρες) μέχρι να σταματήσει να λειτουργεί ένας λαμπτήρας.

$$\Omega = \{t : t \geq 0\} = [0, +\infty)$$

Το ενδεχόμενο "ο χρόνος ζωής του λαμπτήρα είναι το πολύ 500 ώρες"

$$A = \{t : 0 \leq t \leq 500\} = [0, 500]$$

Το ενδεχόμενο "ο χρόνος ζωής του λαμπτήρα υπερβαίνει τις 300 ώρες"

$$B = \{t : t \geq 300\}$$

Σ ε αυτό το πείραμα έχουμε συνεχές δειγματικό χώρο, δηλαδή άπειρο σύνολο μη αριθμήσιμο.

π.χ. Διαφορετικοί δειγματικοί χώροι για ένα πείραμα τύχης

Έκθεση αυτοκινήτων με δύο αυτοκίνητα προς πώληση και δύο πωλητές α και β .

$$\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (0,2)\} \quad (x,y) \in \Omega : \text{ο πωλητής } \alpha \text{ θα πουλήσει } x \text{ αυτοκίνητα την επόμενη εβδομάδα και ο πωλητής } \beta \text{ θα πουλήσει } y \text{ αυτοκίνητα την επόμενη εβδομάδα.}$$

$$\Omega = \{0,1,2\} \quad x \in \Omega : \text{αριθμός αυτοκινήτων που θα πουληθούν}$$

Το ενδεχόμενο "την επόμενη εβδομάδα θα πουληθούν και τα δύο αυτοκίνητα"

$$A = \{(2,0), (1,1), (0,2)\} \quad \text{στην } 1^{\text{η}} \text{ περίπτωση}$$

$$A = \{2\} \quad \text{στην } 2^{\text{η}} \text{ περίπτωση}$$

Πράξεις μεταξύ ενδεχομένων

Έστω $A \subseteq \Omega$ ενδεχόμενο του Ω

Αν το αποτέλεσμα του πειράματος $\omega \in A$ θα λέμε ότι "συτέβη το ενδεχόμενο A " ή "πραγματοποιήθηκε το ενδεχόμενο A ".

$A \subseteq B$ (αν πραγματοποιηθεί το A τότε θα πραγματοποιηθεί και το B).

$A = B$ αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Ω : βέβαιο γεγονός (πάντα συμβαίνει)

$\emptyset$: αδύνατο γεγονός

Ισχύει ότι: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, για κάθε ενδεχόμενο A .

Ορισμός: Ένωση δύο ενδεχομένων A, B είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν τουλάχιστον ένα από τα A, B πραγματοποιείται.

Συμβολισμός: $A \cup B$

Γενίκευση για n ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_n$

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Ορισμός: Τομή δύο ενδεχομένων A, B λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα A και B .

Συμβολισμός: AB ή $A \cap B$

Γενίκευση για n ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_n$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

Ορισμός: Τα ενδεχόμενα A, B λέγονται ξένα ή ασυμβίβαστα αν $AB = \emptyset$

Ορισμός: Συμπλήρωμα του ενδεχομένου A είναι το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται αν και μόνον αν δεν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο A .

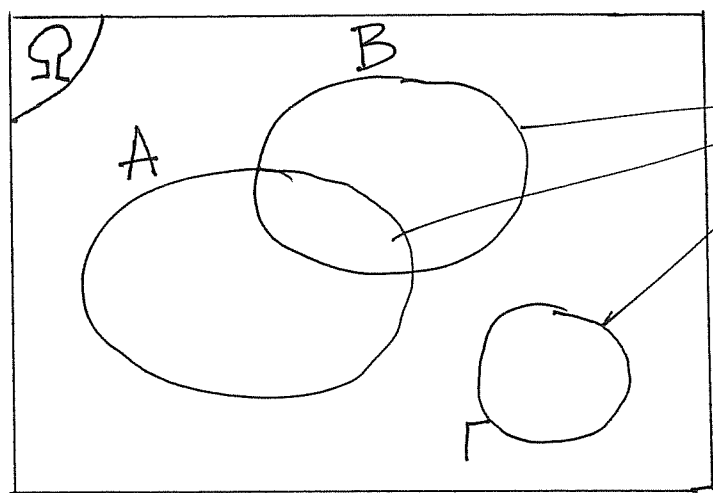
Συμβολισμός: A' ή $\bar{A}$ ή A^c

Ορισμός: Διαφορά των ενδεχομένου B από το ενδεχόμενο A λέγεται το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το A αλλά δεν πραγματοποιείται το B .

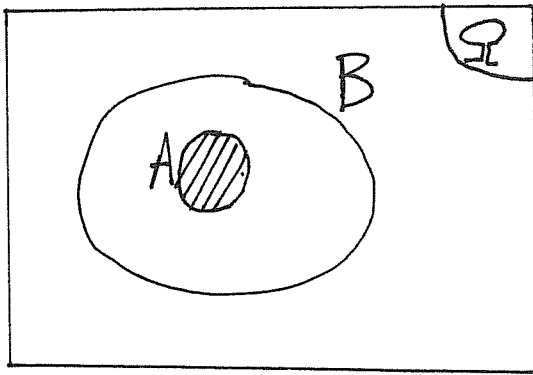
Συμβολισμός: $A - B$

Ισχύει: $A - B = AB'$

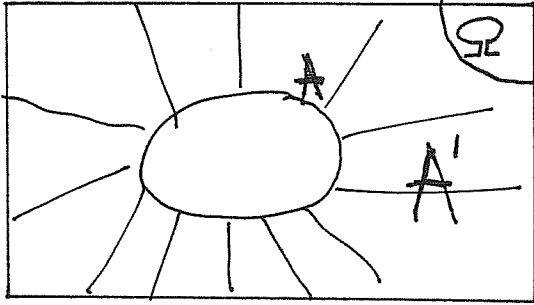
Τα διαγράμματα Venn είναι χρήσιμα επειδή προσφέρουν εισητεία.



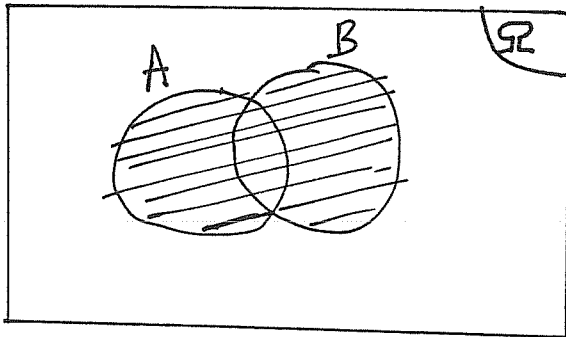
ενδεχόμενα
 A, B, Γ



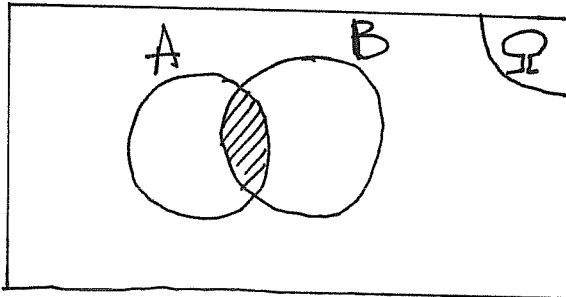
$$A \subseteq B$$



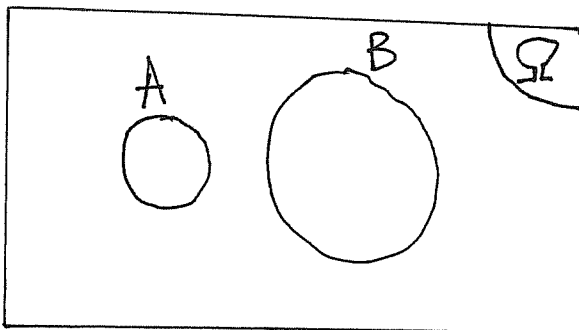
A' : συμπλήρωμα του A



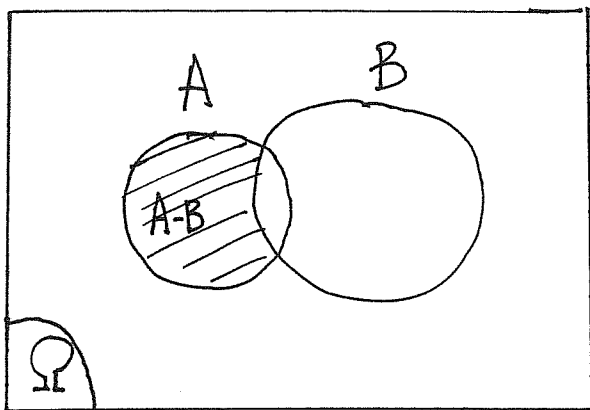
$A \cup B$: ένωση των A και B



AB : τομή των A και B

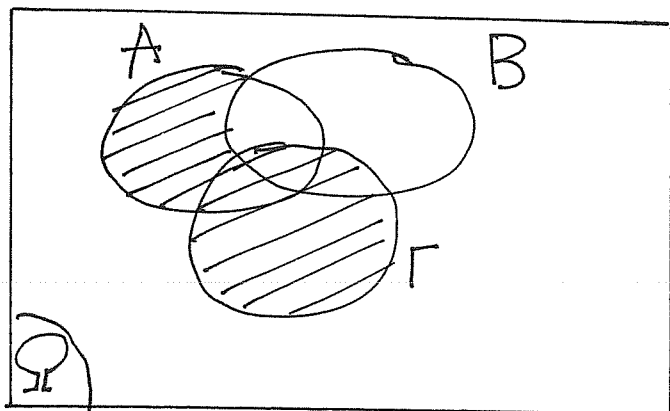


Τα ενδεχόμενα A και B
ζένα



Διαφορά των B από το A

πχ. A, B, Γ ενδεχόμενα του Ω. Το ενδεχόμενο
"συμβαίνει το A και όχι το B ή συμβαίνει το Γ"
αντιστοιχεί στο σύνολο $(A - B) \cup \Gamma$



Ιδιότητες πράξεων μεταξύ ενδεχομένων :

$$A \cup A = A \quad A A' = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A \quad A \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \Omega = \Omega \quad A \Omega = A$$

$$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA \quad \text{"αναμεταθετική ιδιότητα"}$$

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma), \quad A(B\Gamma) = (AB)\Gamma \quad \text{"προσεταιριστική ιδιότητα"}$$

$$A \cup (B\Gamma) = (A \cup B)(A \cup \Gamma), \quad A(B \cup \Gamma) = (AB) \cup (A\Gamma) \quad \text{"επιμεριστική ιδιότητα"}$$

$$A \cup A' = \Omega \quad AA' = \emptyset$$

$$A \subseteq B \text{ και } B \subseteq \Gamma \Rightarrow A \subseteq \Gamma$$

$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \quad \text{και αντίστροφα}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow AB = A \quad \text{και } A \cup B = B$$

Πρόταση (Τύποι de Morgan) :

$$(A \cup B)' = A'B' \quad *, \quad (AB)' = A' \cup B'$$

Απόδειξη της * :

$$w \in (A \cup B)' \Rightarrow w \notin A \cup B \Rightarrow \begin{matrix} w \notin A \\ w \notin B \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} w \in A' \\ w \in B' \end{matrix} \Rightarrow w \in A'B'$$

$$w \in A'B' \Rightarrow \begin{matrix} w \in A' \\ w \in B' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} w \notin A \\ w \notin B \end{matrix} \Rightarrow w \notin (A \cup B) \Rightarrow w \in (A \cup B)'$$

Γενίκευση : $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A_1' A_2' \dots A_n'$

$$(A_1 A_2 \dots A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n'$$

π.χ. A, B, Γ ενδεχόμενα του Ω . Να απλοποιηθεί η παράσταση

$$(A'B')' \cup (AB'\Gamma)'$$

Απάντηση :

$$(A'B')' = (A')' \cup (B')' = A \cup B$$

$$(AB'\Gamma)' = A' \cup (B')' \cup (\Gamma)' = A' \cup B \cup \Gamma$$

$$\begin{aligned} (A'B')' \cup (AB'\Gamma)' &= (A \cup B) \cup (A' \cup B \cup \Gamma) = (A \cup A') \cup (B \cup B) \cup \Gamma \\ &= \Omega \cup B \cup \Gamma = \Omega \end{aligned}$$

Άσκηση: A, B, Γ ενδεχόμενα του Ω . Να εκφραστούν τα επόμενα ενδεχόμενα με χρήση πράξεων (ενώσεις, τομές, συμπληρώματα) μεταξύ των A, B, Γ .

α. Πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα A, B, Γ :

$$A \cup B \cup \Gamma$$

β. Πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B, Γ :

$$(A \setminus B \setminus \Gamma) \cup (B \setminus A \setminus \Gamma) \cup (A \setminus B \setminus \Gamma)$$

γ. Κατάνα από τα A, B, Γ δεν συμβαίνει:

$$(A \cup B \cup \Gamma)'$$

δ. Πραγματοποιούνται ακριβώς δύο από τα A, B, Γ :

$$(A \cap B \cap \Gamma') \cup (A \cap B \cap \Gamma) \cup (A \cap B \cap \Gamma)$$

ε. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B όχι όμως το Γ :

$$(A \cup B) \cap \Gamma'$$

στ. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B και ένα τουλάχιστον από τα B, Γ :

$$(A \cup B) \cap (B \cup \Gamma)$$

Στατιστικός Ορισμός της Πιθανότητας

(11)

(Richard von Mises, 1883-1953)

Ω : Δειγματικός Χώρος

A : Ενδεχόμενο του Ω

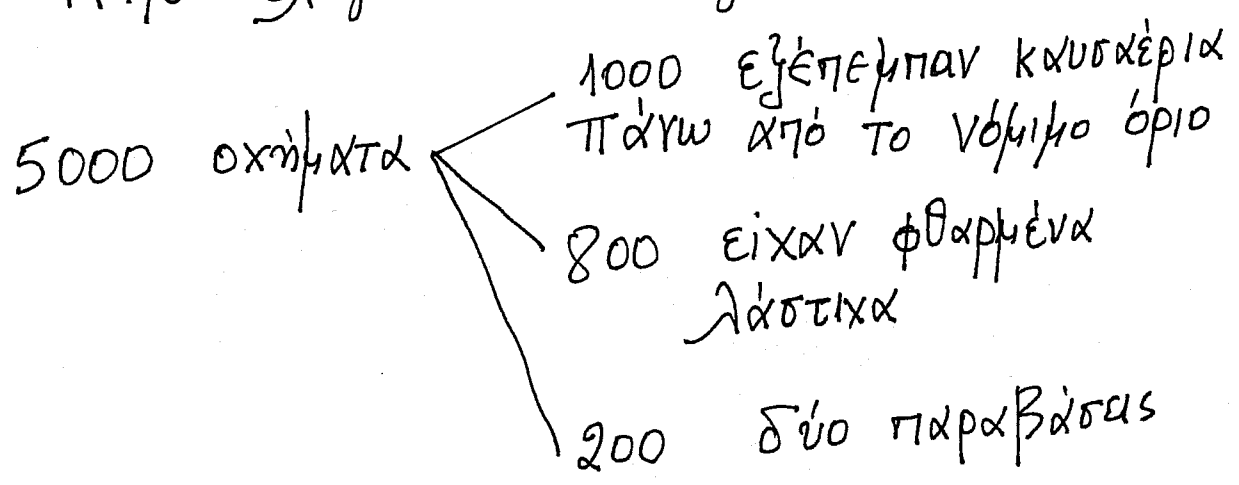
$V_A = \#$ εμφανίσεων του ενδεχομένου A
σε V επαναλήψεις του πειράματος
($0 \leq V_A \leq V$)

Πιθανότητα (εμφάνισης) του ενδεχομένου A
ορίζεται ως το όριο

$$P(A) = \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{V_A}{V} \right) \rightarrow f_A : \text{σχετική συχνότητα εμφάνισης του ενδεχομένου } A \text{ στις } V \text{ επαναλήψεις}$$

↓
"το όριο εδώ δεν έχει αυστηρή μαθηματική σημασία."

π.χ. Από ελέγχους που έγιναν σε



Έστω τα ενδεχόμενα:

A : το όχημα εκπέμπει καυσκήρια πάνω από το νόμιμο όριο

B : το όχημα έχει φθαρμένα λάστιχα

$$P_A = \frac{1000}{5000} = 0.2 \quad P_B = \frac{800}{5000} = 0.16 \quad P_{AB} = \frac{200}{5000} = 0.04$$

Αν υποθέσουμε ότι στις $N = 5000$ επαναλήψεις έχουμε σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων:

$$P(A) = 0.2 \quad P(B) = 0.16 \quad P(AB) = 0.04$$

Αξιωματικός Ορισμός της Πιθανότητας

(13)

Ορισμός: Ω δειγματικός χώρος σε ένα
Πείραμα Τύχης
Ας θεωρήσουμε ότι σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω
αντιστοιχείται ένας πραγματικός αριθμός $P(A)$.

Αν:

P1) $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A του Ω

P2) $P(\Omega) = 1$

P3) Αν $A_1, A_2, \dots$ ακολουθία ζέγων ανά δύο
ενδεχομένων του Ω (δηλαδή $A_i A_j = \emptyset$ για $i \neq j$)
τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

τότε η συνάρτηση $P(\cdot)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας
στον δειγματικό χώρο Ω και
ο αριθμός $P(A)$ λέγεται πιθανότητα του ενδεχομένου A

Σημείωση: Οι ιδιότητες P1, P2, P3 είναι γνωστές
ως αξιώματα του Kolmogorov. Η ιδιότητα P3
είναι γνωστή ως αξίωμα της σ -προσθετικότητας

Σημείωση: Από το P3 αν θέσουμε
 $A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$ προκύπτει ότι

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

$$\Rightarrow 0 = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots$$

λόγω μη αρνητικότητας
 $\xrightarrow{\text{του } P(\emptyset)}$ $P(\emptyset) = 0$

Σημείωση: Από P3, αν θέσουμε
 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ προκύπτει ότι

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{αν } A_1, \dots, A_n \text{ ζέγα ανά δύο ενδεχόμενα}$$

Για $n=2$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

αν A, B ζέγα ενδεχόμενα.

Πρόταση: Αν $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ τότε

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{a_i\})$$

Απόδειξη: $P(A) = P(\{a_1, a_2, \dots\}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{a_i\})$

Πρόταση: Αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ τότε

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(\{a_i\})$$

Πόρισμα: Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

αγείρως αριθμήσιμος δειγματικός χώρος.

Έστω $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i=1,2,\dots$

τότε
$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$

πεπερασμένος δειγματικός χώρος. Τότε

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Πρόταση: $P(A') = 1 - P(A)$

Απόδειξη:

$$A \cup A' = \Omega$$

$$\Rightarrow P(A \cup A') = P(\Omega)$$

$$\Rightarrow P(A) + P(A') = 1$$

$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A).$$

πχ Η πιθανότητα μη εμφάνισης του Α είναι κατά 0.5 μεγαλύτερη της πιθανότητας να εμφανιστεί. $P(A) = ?$

Απάντηση: $P(A') = P(A) + 0.5$

$$1 - P(A) = P(A) + 0.5$$

$$P(A) = 0.25$$

πλ. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$

Η πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος $i+1$ είναι το ήμισυ της πιθανότητας εμφάνισης του αποτελέσματος i για $i = 1, 2, \dots$ Να υπολογιστούν :

α. Οι πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων του πειράματος.

β. Η πιθανότητα εμφάνισης άρτιου αποτελέσματος

γ. Η πιθανότητα εμφάνισης περιττού αποτελέσματος

Λύση: α.) Έστω $p_i = P(\{i\})$, $i = 1, 2, \dots$

$$p_{i+1} = \frac{1}{2} p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_1 + p_2 + \dots = 1$$

$$p_1 + \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2^2} p_1 + \dots = 1$$

$$p_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = 1$$

$$p_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

εδώ χρησιμοποιήσαμε
τον τύπο

$$1 + w + w^2 + \dots = \frac{1}{1-w} \quad \text{αν } |w| < 1$$

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

Άρα: $p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i, \quad i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 \beta) \quad P(\{2, 4, 6, \dots\}) &= P[\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \dots] \\
 &= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) + \dots \\
 &= p_2 + p_4 + p_6 + \dots \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\gamma) \quad A = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$P(\{1, 3, 5, \dots\}) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Διαφορετικά:

$$\begin{aligned}
 P(\{1, 3, 5, \dots\}) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Ιδιότητες της πιθανότητας

Πρόταση: A, B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω . Τότε:

$$P(A-B) = P(AB') = P(A) - P(AB)$$

Απόδειξη: $A - B = AB'$
 $A = AB \cup AB'$ $\swarrow \searrow$ ζένον

$$\Rightarrow P(A) = P(AB) + P(AB')$$

$$\Rightarrow P(AB') = P(A) - P(AB)$$

Πόρισμα: Αν $B \subseteq A$ τότε $P(A-B) = P(A) - P(B)$

Πρόταση: α) A, B ενδεχόμενα και $B \subseteq A$, τότε $P(B) \leq P(A)$
 β) Αν A ενδεχόμενο τότε $0 \leq P(A) \leq 1$

Απόδειξη:

$$\text{α) } B \subseteq A \xRightarrow{\text{πόρισμα}} P(A-B) = P(A) - P(B) \geq 0$$

$$\Rightarrow P(B) \leq P(A)$$

$$\text{β) } \emptyset \subseteq A \subseteq \Omega \xRightarrow{\text{α)}} P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$$

$$\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Πρόταση: A, B ενδεχόμενα του Ω . Τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Απόδειξη: $A \cup B = AB' \cup B$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(AB') + P(B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(B).$$

Πρόταση: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$

Απόδειξη: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P[A_1 \cup (A_2 \cup A_3)]$
 $= P(A_1) + P(A_2 \cup A_3) - P[A_1 (A_2 \cup A_3)]$
 $= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 A_3) - P(A_1 A_2 \cup A_1 A_3)$
 $= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)$

πχ. Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

(20)

A: Η βαθμολογία ενός υποψηφίου για εισαγωγή σε ΑΕΙ στην έκθεση είναι κάτω από την βίση.

B: Η βαθμολογία ενός υποψηφίου για εισαγωγή σε ΑΕΙ στα μαθηματικά είναι κάτω από την βίση.

$$P(A) = 0.2 \quad P(B) = 0.3 \quad P(AB) = 0.1$$

Να βρείτε το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει βαθμολογία κάτω από την βίση

α. μόνον στην Έκθεση

β. " στα Μαθηματικά

γ. σε ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

δ. σε ένα ακριβώς " " " "

Απάντηση

α. $P(AB') = P(A) - P(AB) = 0.2 - 0.1 = 0.1$ (10%)

β. $P(A'B) = P(B) - P(AB) = 0.3 - 0.1 = 0.2$ (20%)

γ. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$ (40%)

δ. $P(AB' \cup A'B) = P(AB') + P(A'B) = 0.1 + 0.2 = 0.3$ (30%)

Πεπερασμένοι Δειγματικοί Χώροι με
ισοπιθανά δυνατά αποτελέσματα

Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ με την ιδιότητα

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \dots = P(\{\omega_N\}). \quad \text{Τότε}$$

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \dots \cup \{\omega_N\}) = P(\{\omega_1\}) + \dots + P(\{\omega_N\}) = NP(\{\omega_1\})$$

$$\Rightarrow P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{N}$$

Έστω $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\} \subseteq \Omega$ ενδεχόμενο

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}) = P(\{\omega_{j_1}\} \cup \dots \cup \{\omega_{j_k}\}) \\ &= P(\{\omega_{j_1}\}) + \dots + P(\{\omega_{j_k}\}) = \frac{k}{N} \end{aligned}$$

Συμπεριλαμβανόμενα:
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{πλήθος των στοιχείων του } A}{\text{πλήθος των στοιχείων του } \Omega}$$

$$= \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο } A}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος}}$$

"κλαστικός ορισμός της πιθανότητας"
(Laplace - 1812)

π.χ. Ένα παιδί παίζει με τρεις κύβους που έχουν γράμματα H, Σ, T (σε κάθε κύβο υπάρχει ένα γράμμα).

α) Πόσες και ποιές διαφορετικές λέξεις μπορεί να φτιάξει το παιδί ;

$$\Omega = \{H\Sigma T, H T \Sigma, \Sigma H T, \Sigma T H, T H \Sigma, T \Sigma H\}$$

β) i) Ποιά είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να αρχίζει με T ;

Απάντηση: Τα έξι απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα

A : Η λέξη αρχίζει με T

$$A = \{T H \Sigma, T \Sigma H\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ii) Ποιά είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να έχει νόημα ;

B : Η λέξη που θα σχηματιστεί έχει νόημα

$$B = \{T H \Sigma, \Sigma T H\}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

εύρεση του πλήθους των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A πολλές φορές δεν είναι εύκολο πρόβλημα.

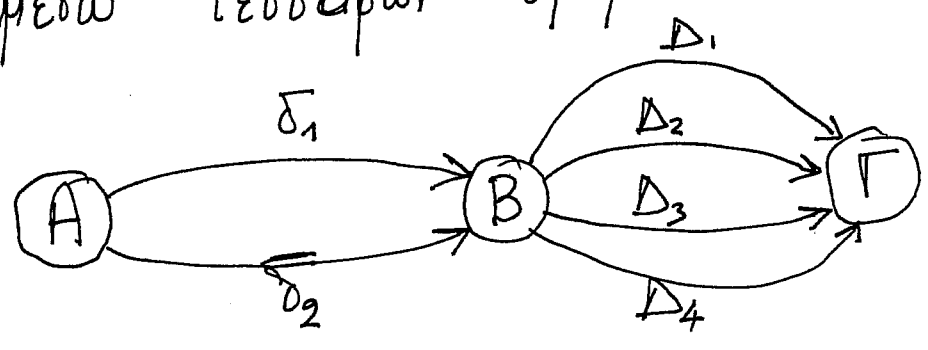
Συνδυαστική Ανάλυση έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη μεθόδων απαρίθμησης

Πολλαπλασιαστική Αρχή:

Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο, ενέργεια) a_1 μπορεί να επιλεγεί με v_1 διαφορετικούς τρόπους, και για κάθε επιλογή του a_1 , το στοιχείο a_2 μπορεί να επιλεγεί με v_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και για κάθε επιλογή των $a_1, \dots, a_{k-1}$ το στοιχείο a_k μπορεί να επιλεγεί με v_k διαφορετικούς τρόπους τότε τα στοιχεία $a_1, \dots, a_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτήν την σειρά με

$v_1 v_2 \dots v_k$ τρόπους.

πχ Μια πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω δύο διαφορετικών δρόμων ενώ η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω τεσσάρων δρόμων.



α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ταξιδέψει κάποιος από την πόλη Α προς την πόλη Γ;

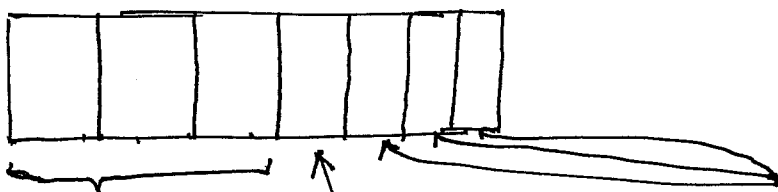
$A \rightarrow B$ ταξιδεύει με $V_1 = 2$ τρόπους
 $B \rightarrow \Gamma$ ταξιδεύει με $V_2 = 4$ τρόπους

Συνεπώς από την Α προς την Γ ταξιδεύει με $V_1 V_2 = 2 * 4 = 8$ τρόπους

β) Ποιά είναι η πιθανότητα επιλογής μίας συγκεκριμένης διαδρομής;

Απάντηση: Αν υποθέσουμε ότι όλες οι διαδρομές είναι ισοπίθανες τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{8}$

πχ. Αριθμός Πλακίδας Αυτοκινήτου



στις τρεις πρώτες
θέσεις υπάρχει
κάποιο από 14 γράμματα

σε αυτήν την θέση
υπάρχει κάποιος
αριθμός από 1
μέχρι 9

σε αυτές τις
τρεις θέσεις
υπάρχει
κάποιος αριθμός
από 0 μέχρι 9

α) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν ;

Απάντηση: Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:

$$14 * 14 * 14 * 9 * 10 * 10 * 10 = 14^3 * 9 * 10^3 \\ = 24.696.000$$

β) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας έχουν τα τρία γράμματα διαφορετικά μεταξύ τους ;

Απάντηση: Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:

$$14 * 13 * 12 * 9 * 10 * 10 * 10 = 14 * 13 * 12 * 9 * 10^3 \\ = 19.656.000$$

Ποιά είναι η πιθανότητα μία πινακίδα να έχει τρία γράμματα διαφορετικά μεταξύ τους;

Απάντηση:

A : τρία γράμματα της πινακίδας είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{19.656.000}{24.696.000} \approx 0,7959$$

Διάταξη θεωρούμε το σύνολο $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ στοιχείων ανά k λέγεται κάθε

διατεταγμένη k -άδα $(a_1, \dots, a_k)$ με $a_i \in X, i=1, \dots, k$,
και $a_i \neq a_j, i \neq j$

Αν $k=n$ αντί του όρου "διάταξη των n ανά n "

χρησιμοποιούμε τον όρο μετάθεση των n στοιχείων.

Συμβολισμός: Το πλήθος των διατάξεων των n στοιχείων ανά k συμβολίζεται με $(V)_k$

Πρόταση :

a) Το πλήθος των διατάξεων των N στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο :

$$(V)_k = V \cdot (V-1) \cdots (V-k+1), \quad 1 \leq k \leq V$$

β) Το πλήθος των μεταθέσεων των V στοιχείων
δίνεται από τον τύπο :

$$v! = v(v-1) \dots 1$$

Απόδειξη:

Η) Απόδειξη:

a) Το πρώτο στοιχείο της διατάξης επιλέγεται με V τρόπους
" δεύτερο " " " " $V-1$ "
" τρίτο " " " " $V-2$ "
" $\vdots$ "
" k -οστό " " " " $V-(k-1)=V+k-1$ "

Οπότε, από την πολλαπλασιαστική αρχή, ο αριθμός των τρόπων για την επιλογή μιας διατεταγμένης k -άδας

1500ΤΕ ΜΕ

$$\overset{\text{ισούτε}}{\gamma(\gamma-1) \dots (\gamma-(k-1))} \overset{\text{με}}{=} \gamma \cdot (\gamma-1) \dots (\gamma-k+1)$$

β) Θετontas $k=v$ έχουμε

$$(V)_r = V(V-1) \cdots 1 = V!$$

Π.χ. (Το πρόβλημα γενεθλίων)

Ποιά είναι η πιθανότητα σε μια τάξη k φοιτητών, δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα; Θεωρείστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες.

Απάντηση: Έστω

$A =$ κανένας φοιτητής δεν έχει γενέθλια την ίδια μέρα με άλλο φοιτητή.

$$P(A) = \frac{(365)_k}{365^k} = \frac{365 * 364 * \dots * (365 - k + 1)}{\underbrace{365 * \dots * 365}_{k \text{ παράγοντες}}}, \quad 1 \leq k \leq 365$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p_k = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}, \quad 1 \leq k \leq 365$$

k	2	5	10	25	50	70
p_k	0.003	0.027	0.117	0.565	0.970	0.999

Συνδυασμός V στοιχείων ανά k

Έστω $X = \{x_1, \dots, x_V\}$ σύνολο $k \leq V$
 θετικός ακέραιος

Συνδυασμός των V στοιχείων ανά k είναι μια μη διατεταγμένη συλλογή k διαφορετικών στοιχείων του X .

Το πλήθος των συνδυασμών των V στοιχείων ανά k το συμβολίζουμε με $\binom{V}{k}$. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε

$$\binom{V}{k} k! = (V)_k$$

$$\Rightarrow \binom{V}{k} = \frac{(V)_k}{k!} = \frac{V(V-1)\dots(V-k+1)}{k!} = \frac{V!}{k!(V-k)!}$$

$$1 \leq k \leq V$$

Σημείωση: $\binom{V}{0} = 1$ $\binom{V}{k} = 0, k > V$

Ιδιότητες συνδυασμών:

α) $\binom{V}{k} = \binom{V}{V-k}$

β) $\binom{V}{k} = \binom{V-1}{k-1} + \binom{V-1}{k}$ "Τρίγωνο του Pascal"

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\ \vdots \end{array}$$

π.χ. $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

Π.Χ. Σε ένα κατάστημα υπάρχουν 10 τηλεοράσεις και 12 βίντεο για επισκευή. Το κατάστημα επισκευάζει μόνο 6 συσκευές ημερησίως. Οι επισκευές προς επισκευή διαλέγονται τυχαία. Ζητούνται:

- α) $P(\text{να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο})$
 β) $P(\text{να επισκευαστούν το πολύ 4 τηλεοράσεις})$

Απάντηση:

α) $P(\text{να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο})$

$$= \frac{\binom{10}{3} \binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} \approx 0.3538$$

β) $P(\text{να επισκευαστούν το πολύ 4 τηλεοράσεις})$

$$= \frac{\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{1} \binom{12}{5}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{2} \binom{12}{4}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{3} \binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{4} \binom{12}{2}}{\binom{22}{6}}$$

$$= 0.9567$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα ενός ενδεχομένου

Ορισμός: Έστω Ω δειγματικός χώρος και $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.

Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B ορίζεται

ως εξής:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

πχ Σε μία χώρα η πιθανότητα να ζήσει ένας άνδρας τουλάχιστον 70 χρόνια είναι 0.85 ενώ η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 0.8. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν 70-χρονο άνδρα, ποιά είναι η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον επιπλέον 5 χρόνια;

Απάντηση: A : ένας άνδρας ζει περισσότερο από 75 χρόνια
 B : " " " " 70 "

$P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.85$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.8}{0.85} \approx 0.94$$

πχ. Δοχείο περιέχει 4 μπλέ και 6 άσπρες σφαίρες. Εξάγουμε χωρίς επανέθεση 2 σφαίρες. Έστω

A_i : στην i -οστή εξαγωγή διαλέγουμε άσπρη σφαίρα $i=1,2$
 B_i : " " " " μπλέ "

Απάντηση: $P(A_2|A_1) = \frac{5}{9}$ $P(A_2|B_1) = \frac{6}{9}$

$P(B_2|A_1) = \frac{4}{9}$ $P(B_2|B_1) = \frac{3}{9}$

π.χ. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές.

A : Το αποτέλεσμα της 3^{ης} ρίψης είναι "Γράμματα".

$$P(A) = \frac{\# \text{ ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\# \text{ δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$= \frac{\# \{KKΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ, ΚΓΓ\}}{\# \{KKK, KKΓ, ΓΚΓ, ΓΓΓ, ΚΓΓ, ΓΓΚ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

B : Στις τρεις ρίψεις οι δύο ακριβώς έδωσαν "Γράμματα"

$$B = \{ΓΚΓ, ΚΓΓ, ΓΓΚ\}, \quad AB = \{ΓΚΓ, ΚΓΓ\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

Πρόταση: Ω δειγματικός χώρος, $B \subseteq \Omega$ με $P(B) > 0$.

PG1

$$P(A|B) \geq 0, \text{ για κάθε ενδεχόμενο του } \Omega.$$

PG2

$$P(\Omega|B) = 1.$$

PG3

Αν $A_1, A_2, \dots$ ακολουθία ζένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω .
Τότε:

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

Απόδειξη: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \frac{P[(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)B]}{P(B)} = \frac{P[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i B)]}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

Σημείωση: Οι ιδιότητες των πιθανοτήτων ισχύουν και για τις δεσμευμένες πιθανότητες. Έστω $P(B) > 0$:

α. $P(\emptyset|B) = 0$

β. $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

γ. $P(AG'|B) = P(A-G|B) = P(A|B) - P(AG|B)$

δ. $\Gamma \subseteq A \Rightarrow P(\Gamma|B) \leq P(A|B)$

ε. $P(A \cup \Gamma|B) = P(A|B) + P(\Gamma|B) - P(AG|B)$

Σημείωση: Ο υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας $P(A|B)$ μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

- I) Περιορίζοντας τον δειγματικό χώρο στο σύνολο B
- II) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

Πολλαπλασιαστικός Τύπος:

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_n$ ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$. Τότε:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

Απόδειξη: Αφού $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$ τότε:

$$P(A_1) \geq P(A_1 A_2) \geq \dots \geq P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0. \quad \text{Οπότε:}$$

$$\begin{aligned} & P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \dots \frac{P(A_1 A_2 \dots A_n)}{P(A_1 A_2 \dots A_{n-1})} \end{aligned}$$

$$= P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

πχ Δοχείο περιέχει 5 άσπρες και 15 μαύρες σφαίρες.

Διαλέγουμε κατά τυχαίο τρόπο 4 σφαίρες. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε την σειρά ΑΜΑΜ αν

α) Η δειγματοληψία γίνεται με επανάθεση

β) " " " χωρίς "

Απάντηση: Έστω τα εξής ενδεχόμενα

A_i : Η i -οστή σφαίρα είναι άσπρη $i=1,2,3,4$

M_i : " " " " μαύρη

$$P(A_1 M_2 A_3 M_4) = P(A_1)P(M_2|A_1)P(A_3|A_1 M_2)P(M_4|A_1 M_2 A_3)$$

β) ~~με~~ χωρίς επανάθεση:

$$P(A_1 M_2 A_3 M_4) = \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{18} \cdot \frac{14}{17} \approx 0.036$$

α) με επανάθεση:

$$P(A_1 M_2 A_3 M_4) = \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{15}{20} \approx 0.035$$

πχ. Μετά από μια ληστεία σε τράπεζα η αστυνομία έχει συλλάβει 10 ύποπτους από τους οποίους 4 είχαν πράγματι συμμετάσχει στη ληστεία. ~~Τότε~~ Ο ανακριτής διαλέγει στην τύχη ένα άτομο, μετά ένα δεύτερο και τέλος ένα τρίτο. Ποιά είναι η πιθανότητα τα τρία άτομα που επιλέχτηκαν να είναι και τα τρία αθώα ή και τα τρία ένοχα;

Απάντηση: A_i : Το i άτομο είναι αθώο $i=1,2,3$
 E_i : " " " " ένοχο

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 A_3 \cup E_1 E_2 E_3) &= P(A_1 A_2 A_3) + P(E_1 E_2 E_3) \\ &\stackrel{\text{ζέρα}}{=} P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) + P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 E_2) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{144}{720} = 0.2 \end{aligned}$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

(35)

Έστω ότι: $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ με $P(B_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$
και $B_i B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Τότε

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i) \end{aligned}$$

Απόδειξη: $A = A\Omega = A(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n$

$$(AB_i)(AB_j) = A(B_i B_j) = A\emptyset = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n AB_i\right) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

Σημείωση: Έστω $n=2$. $\Omega = B \cup B'$, $0 < P(B) < 1$. Τότε

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B').$$

π.χ. Μια ασφαλιστική εταιρία χωρίζει τους πελάτες σε δύο κατηγορίες

πελάτης $\begin{cases} \text{Κατηγορία I (υψηλός κίνδυνος)} & 25\% \\ \text{Κατηγορία II (χαμηλός ")} & 75\% \end{cases}$

Έστω: A : πελάτης προκαλεί ατύχημα

B : πελάτης ανήκει στην κατηγορία I

$$P(A|B) = 0.6 \quad P(A|B') = 0.3$$

$$P(A) = ?$$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} P(A) &\stackrel{\text{Θ.Ο.Π.}}{=} P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B') \\ &= 0.6 \times 0.25 + 0.3 \times 0.75 \\ &= 0.375 \end{aligned}$$

π.χ Εργοστάσιο έχει τρεις γραμμές παραγωγής.

A: Το προϊόν είναι ελαττωματικό

B_i : Το προϊόν κατασκευάστηκε στην γραμμή παραγωγής $i, i=1,2,3$

$$P(B_1) = 0.5 \quad P(B_2) = 0.3 \quad P(B_3) = 0.2$$

$$P(A|B_1) = 0.004 \quad P(A|B_2) = 0.006 \quad P(A|B_3) = 0.012$$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \quad B_1 B_2 = B_1 B_3 = B_2 B_3 = \emptyset$$

$$P(A) \stackrel{\text{θ.α.π.}}{=} P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ = 0.004 \times 0.5 + 0.006 \times 0.3 + 0.012 \times 0.2 = 0.0062$$

π.χ. ~~Σ' ένα~~ ^{συντάρι} υπάρχουν 4 ελαττωματικά και 21 μη ελαττωματικά εξαρτήματα για την κατασκευή προσωπικών υπολογιστών. Ο τεχνικός διαλέγει τυχαία δύο εξαρτήματα και κατασκευάζει δύο PC. Ποιά είναι η πιθανότητα το τρίτο PC που θα κατασκευαστεί να μη λειτουργεί;

Απάντηση: E_i : Το i -οστό ανταλλακτικό που επιλέγεται είναι ελαττωματικό, $i=1,2,3$
 K_i : " " " " " " " " μη ελαττωματικό, $i=1,2$

Τα ενδεχόμενα $E_2 K_1, E_2 E_1, K_2 E_1, K_2 K_1$ είναι ζεύγη στα δύο και η ένωση τους ισούται με τον δείγματικό χώρο. Από το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$P(E_3) = P(E_3|E_2 K_1)P(E_2 K_1) + P(E_3|E_2 E_1)P(E_2 E_1) + P(E_3|K_2 E_1)P(K_2 E_1) + P(E_3|K_2 K_1)P(K_2 K_1) \\ = \frac{3}{23} P(E_2 K_1) + \frac{2}{23} P(E_2 E_1) + \frac{3}{23} P(K_2 E_1) + \frac{4}{23} P(K_2 K_1)$$

$$P(E_2 K_1) = P(E_2|K_1)P(K_1) = \frac{4}{24} \cdot \frac{21}{25}$$

$$P(E_2 E_1) = P(E_2|E_1)P(E_1) = \frac{3}{24} \cdot \frac{4}{25}$$

$$P(K_2 E_1) = P(K_2|E_1)P(E_1) = \frac{21}{24} \cdot \frac{4}{25}$$

$$P(K_2 K_1) = P(K_2|K_1)P(K_1) = \frac{20}{24} \cdot \frac{21}{25}$$

Μετά από πράξεις :

$$P(E_3) = \frac{4}{25}$$

π.χ. Ένα στα χίλια άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από μια σοβαρή ασθένεια. Το τεστ για την διάγνωση δίνει λάθος διάγνωση στις 1% των περιπτώσεων αν το άτομο που υποβιβάζεται στο τεστ πάσχει πράγματι από την ασθένεια και στο 2% των περιπτώσεων αν δεν πάσχει. Αν το τεστ βγει θετικό για ένα άτομο, ποιά είναι η πιθανότητα πράγματι να πάσχει από την ασθένεια;

Απάντηση: Έστω B_1 : Το άτομο πάσχει από την ασθένεια
 B_2 : " " " " " " "
 A : Το τεστ είναι θετικό

$$P(B_1) = 0.001 \quad P(B_2) = 0.999$$

$$P(A|B_1) = 0.99 \quad P(A|B_2) = 0.02$$

Από Θεώρημα Bayes έχουμε:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{0.99 \times 0.001}{0.99 \times 0.001 + 0.02 \times 0.999} \approx 0.0472$$

π.χ. Εργαστήριο έχει 3 γραμμές παραγωγής.

A : Το προϊόν είναι ελαττωματικό

B_i : " " κατασκευάστηκε στην γραμμή παραγωγής $i, i=1,2,3$

$$P(B_1) = 0.5 \quad P(B_2) = 0.3 \quad P(B_3) = 0.2$$

$$P(A|B_1) = 0.004 \quad P(A|B_2) = 0.006 \quad P(A|B_3) = 0.012$$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega \quad B_1 B_2 = B_1 B_3 = B_2 B_3 = \emptyset$$

$$P(A) \stackrel{\text{θ.ο.π.}}{=} P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3) \\ = 0.004 \times 0.5 + 0.006 \times 0.3 + 0.012 \times 0.2 = 0.0062$$

$$P(B_1|A) \stackrel{\text{θ. Bayes}}{=} \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{0.5 \times 0.004}{\underbrace{0.5 \times 0.004 + 0.3 \times 0.006 + 0.2 \times 0.012}_{0.0062}} = 0.32$$

$$P(B_2|A) \stackrel{\text{θ. Bayes}}{=} \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{0.0062} = \frac{0.006 \times 0.3}{0.0062} \approx 0.29$$

$$P(B_3|A) \stackrel{\text{θ. Bayes}}{=} \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{0.0062} = \frac{0.012 \times 0.2}{0.0062} \approx 0.39$$

Παρατήρηση: $P(B_1) = 0.5 \rightarrow P(B_1|A) = 0.32$ (μειώθηκε! Λογικό επειδή η 1^η γραμμή παραγωγής παράγει μικρό ποσοστό ελαττωματικών σε σχέση με τις άλλες δύο)

Ορισμός: Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω .
Τα A και B λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Αν $P(AB) \neq P(A)P(B)$ τα ενδεχόμενα A και B λέγονται εξαρτημένα.

Σημείωση: Αν για το ενδεχόμενο A ισχύει ότι: $P(A)=0$ ή $P(A)=1$, τότε το A είναι ανεξάρτητο από οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο B του Ω .

Απόδειξη: Αν $P(A)=0$, τότε $P(AB) \leq P(A)=0$ άρα $P(AB)=0$.

Οπότε ισχύει $P(AB) = P(A)P(B)$. (άρα A, B ανεξάρτητα)

Αν $P(A)=1$ από την $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ έχουμε

$$1 = 1 + P(B) - P(AB)$$

Άρα $P(B) = P(AB)$ και συνεπώς $P(AB) = P(A)P(B)$ (άρα A, B ανεξάρτητα)

Πχ Για το μάθημα "ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι" υπάρχουν δύο εξετάσεις προόδου.
Αν ένας φοιτητής πετύχει και στις δύο εξετάσεις, τότε κατοχυρώνει το μάθημα.

Το ποσοστό των φοιτητών που πετυχαίνουν στην 1^η πρόοδο : 68%
" " " " " " 2^η " : 54%
" " " " " κατοχυρώσαν το μάθημα : 45%

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : ο φοιτητής επέτυχε στην 1^η πρόοδο

B : " " " " 2^η "

$$P(A) = 0.68 \quad P(B) = 0.54 \quad P(AB) = 0.45$$

$$P(A)P(B) = 0.68 \times 0.54 = 0.3672 \neq 0.45 = P(AB)$$

π.χ. Ρίχνουμε αμερόληπτο τζάρι δύο φορές.

A : Η ένδειξη του πρώτου τζαριού είναι 3

B : Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο τζαριών είναι 5

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad P(AB) = \frac{1}{36}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36} = P(AB)$$

Άρα τα ενδεχόμενα A και B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα.

Διασθητική Εξήγηση: Αν το αποτέλεσμα της ρίψης του

1^{ου} τζαριού είναι 3 (ή 1, 2, 4) είμαστε ευχαριστημένοι, επειδή σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει πιθανότητα $1/6$ να πετύχουμε άθροισμα = 5. Αν όμως το αποτέλεσμα της ρίψης του 1^{ου} τζαριού είναι 5 ή 6, δεν υπάρχει καμία περίπτωση να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Αν

Γ : Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο τζαριών είναι 7

$$P(A)P(\Gamma) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36} = P(A\Gamma). \text{ Άρα } A, \Gamma \text{ ανεξάρτητα.}$$

Πρόταση: Αν A, B δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα του Ω , τότε:

α) A και B' ανεξάρτητα

β) A' και B ανεξάρτητα

γ) A' και B' ανεξάρτητα.

Απόδειξη: α) $P(AB') = P(A)P(B') \Leftrightarrow P(A) - P(AB) = P(A)[1 - P(B)] \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$
ισχύει.

β) $P(A'B) = P(A')P(B) \Leftrightarrow P(B) - P(AB) = [1 - P(A)]P(B) \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$
ισχύει.

γ) $P(A'B') = P(A')P(B') \Leftrightarrow$

$$P[(A \cup B)'] = [1 - P(A)][1 - P(B)] \Leftrightarrow$$

$$1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - P(B) - P(A) + P(A)P(B) \Leftrightarrow$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Ορισμός: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$ λέγονται ανεξάρτητα

αν:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2)$$

$$P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3)$$

$$P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3)$$

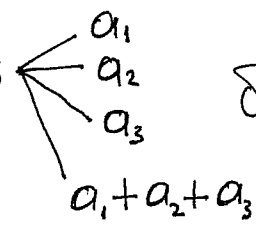
$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

Ορισμός: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$ λέγονται ανεξάρτητα κατά ζεύγη αν:

$$P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2), P(A_1 A_3) = P(A_1) P(A_3), P(A_2 A_3) = P(A_2) P(A_3)$$

Ερώτηση: Αν A_1, A_2, A_3 κατά ζεύγη ανεξάρτητα είναι Ανεξάρτητα;

Απάντηση: Οχι πάντοτε. Δίνουμε παρακάτω ένα παράδειγμα, στο οποίο A_1, A_2, A_3 είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα αλλά όχι ανεξάρτητα.

π.χ. κληρονομία με 4 λαχνούς με ενδείξεις  δώρα a_1, a_2, a_3

Ένα άτομο διαλέγει έναν λαχνό στην τύχη.

A_i : Το άτομο κερδίζει δώρο $a_i, i=1,2,3$

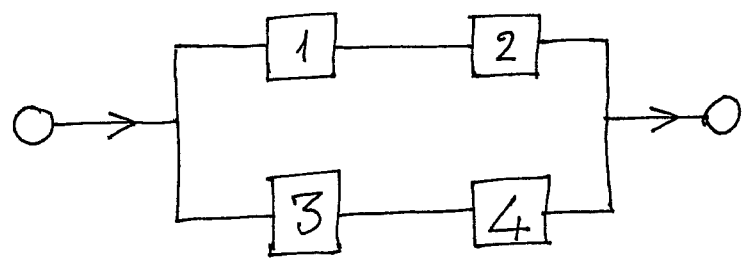
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} \quad P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = P(A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4}$$

Ισχύει: $P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j) \quad 1 \leq i < j \leq 3$

$$P(A_1 A_2 A_3) \neq P(A_1) P(A_2) P(A_3)$$

π.χ. Σ' ένα σύστημα παραγωγής υπάρχουν 4 εξαρτήματα τα οποία λειτουργούν το ένα ανεξάρτητα από το άλλο.



A_i : Η μονάδα i του συστήματος λειτουργεί, $i=1,2,3,4$
 $P(A_1)=0.85$ $P(A_2)=0.90$ $P(A_3)=0.98$ $P(A_4)=0.8$
Ποιά είναι η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος;

Απάντηση: $\overset{\text{αξιοπιστία του συστήματος}}{\leftarrow} R = P(A_1 A_2 \cup A_3 A_4)$

$$\begin{aligned} &= P(A_1 A_2) + P(A_3 A_4) - P(A_1 A_2 A_3 A_4) \\ &= P(A_1)P(A_2) + P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= 0.85 \times 0.9 + 0.98 \times 0.8 - 0.85 \times 0.9 \times 0.98 \times 0.8 = 0.59976 \end{aligned}$$

π.χ. $A_1, \dots, A_n$ ν ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A_i) = p_i$, $i=1, \dots, n$. Να υπολογιστούν συναρτήσεις των $p_1, \dots, p_n$

α) Η πιθανότητα να μην εμφανιστεί κανένα από τα ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_n$.
β) " " να τουλάχιστον ένα από τα " " .

Απάντηση:

α) $A = A'_1 A'_2 \dots A'_n$
 $P(A) = P(A'_1 A'_2 \dots A'_n) = \prod_{i=1}^n P(A'_i) = \prod_{i=1}^n [1 - P(A_i)] = \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$

β) $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = (A'_1 A'_2 \dots A'_n)' = A'$
 $P(B) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i)$

Στην Θεωρία Πιθανοτήτων συναντάμε πολλές φορές (45)
ανεξάρτητα πειράματα.

π.χ. Ρίψη νομίσματος N φορές ισοδυναμεί με N ανεξάρτητες
ρίψεις ενός νομίσματος.

π.χ. Ρίψη δύο τριών ισοδυναμεί με δύο ανεξάρτητες
ρίψεις ενός τριού.

π.χ. N γεννήσεις σε μία οικογένεια : ισοδυναμεί με
 N ανεξάρτητες επαναλήψεις (της γέννησης παιδιού)

Τα ενδεχόμενα που αντιστοιχούν σε ανεξάρτητα πειράματα
είναι ανεξάρτητα.

Πρόταση: Έστω A, B ζέγα ενδεχόμενα του δειγματικού
χώρου Ω .

α) Αν εκτελεστούν N ανεξάρτητες επαναλήψεις του
πειράματος

i) $\#$ πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο A
σε καθεμία από τις N επαναλήψεις ισούται με
 $[P(A)]^N$

ii) $\#$ πιθανότητα να μην εμφανιστεί το ενδεχόμενο A
σε καμία από τις επαναλήψεις ισούται με
 $[1 - P(A)]^N$

β) Αν εκτελούμε συνέχεια επαναλήψεις του πειράματος,
η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο A πριν
εμφανιστεί το ενδεχόμενο B ισούται με

$$\frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

Απόδειξη:

α) i) Έστω A_i : Το ενδεχόμενο A εμφανίζεται κατά την i επανάληψη του πηράχματος.

$$P(A_i) = P(A), \quad i = 1, \dots, v$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_v) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_v) = P(A) \dots P(A) = [P(A)]^v$$

$\leftarrow v \text{ φορές} \rightarrow$

$$ii) P(A'_1 A'_2 \dots A'_v) = P(A'_1) P(A'_2) \dots P(A'_v) = [1 - P(A)]^v$$

β) Έστω B_i : Το ενδεχόμενο B εμφανίζεται στην i επανάληψη, $i = 1, 2, \dots$

$$\Gamma_1 = A$$

Γ_v : Το ενδεχόμενο $A \cup B$ δεν εμφανίζεται στις επαναλήψεις $1, \dots, v-1$ και στην v επανάληψη εμφανίζεται το $A, v=2, 3, \dots$

$P(\text{το ενδεχόμενο } A \text{ εμφανίζεται πριν το ενδεχόμενο } B)$

$$= P\left(\bigcup_{v=1}^{\infty} \Gamma_v\right) = \sum_{v=1}^{\infty} P(\Gamma_v) = P(\Gamma_1) + \sum_{v=2}^{\infty} P(\Gamma_v)$$

$$= P(A) + \sum_{v=2}^{\infty} [1 - P(A \cup B)]^{v-1} \cdot P(A) = \sum_{v=1}^{\infty} [1 - P(A \cup B)]^{v-1} P(A)$$

$$= \frac{P(A)}{1 - [1 - P(A \cup B)]} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} \stackrel{A, B \text{ άνεκα}}{=} \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

πχ Αν ρίχνουμε συνεχώς δύο ζάρια, ποιά είναι η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα ενδείξεων τουλάχιστον 10 χωρίς να έχει προηγηθεί που περιέχει (έναν τουλάχιστον) άσσο:

Απάντηση:

A : Το άθροισμα των ενδείξεων (σε μία επανάληψη του πηράχματος) είναι 10, 11, 12

B : Το αποτέλεσμα της ρίψης των δύο ζαριών (σε μία επανάληψη του πηράχματος) περιέχει έναν τουλάχιστον άσσο

$$P(A) = \frac{4}{36} \quad P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36}$$

$$\text{Ζητούμενη πιθανότητα} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{11}{36}} = \frac{4}{15}$$

Ορισμός: Έστω Ω δειγματικός χώρος. Μια πραγματική συνάρτηση $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)

Σημείωση: Στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής θα πρέπει για κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, το σύνολο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ να είναι ενδεχόμενο.

Σημείωση: Τις τ.μ. συνήθως τις συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα ($X, Y, Z, W, \dots$).

Πχ Ρίψη νομίσματος τρεις φορές. Έστω

$X = \#$ γραμμάτων στις 3 ρίψεις

$\Omega = \{kkk, kkg, kγκ, kγγ, γkk, γkg, γγκ, γγγ\}$

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$X(kkk)=0, X(kkg)=1, X(kγκ)=1, \dots, X(γγγ)=3$

ω	kkk	kkg	kγκ	kγγ	γkk	γkg	γγκ	γγγ
$X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3

$$P(X=0) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega)=0\}) = P(\{kkk\}) = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega)=1\}) = P(\{kkg, kγκ, γkk\}) = \frac{3}{8}$$

Πχ Πείραμα: Αναζήτηση ταξί. Έστω

$X = \#$ ταξί που περνούν κατειλημμένα (K) μέχρι να βρεθεί το πρώτο ελεύθερο (E).

$\Omega = \{E, KE, KKE, KKKE, \dots\}$

$X(E)=0, X(KE)=1, X(KKE)=2, X(KKKE)=3, \dots$

π.χ. Ζητάμε από έναν φίλο να μας πει έναν πραγματικό αριθμό στο διάστημα $[0, 10]$ και τον δίνουμε σε ευρώ το ποσό που προκύπτει μετά την στρογγυλοποίηση (στον πλησιέστερο ακέραιο $\leq$ του αριθμού) του αριθμού που μας είπε. Έστω:

X = ο αριθμός που διάλεξε ο φίλος

Y = Το ποσό που θα του δώσουμε.

~~Θα έχουμε~~ ^{Έχουμε} δύο τυχαίες μεταβλητές:

$$\begin{aligned} X: [0, 10] &\longrightarrow \mathbb{R} & X(\omega) &= \omega \\ Y: [0, 10] &\longrightarrow \mathbb{R} & Y(\omega) &= [\omega] \quad (\text{ακέραιο μέρος του } \omega) \end{aligned}$$

Το πεδίο τιμών της X ή σύνολο τιμών της X :

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : X(\omega) = x \text{ για κάποιο } \omega \in \Omega\}$$

Στο 1 ^ο παράδειγμα	(ρίψη νομίσματος 3 φορές)	$R_X = \{0, 1, 2, 3\}$
" 2 ^ο "	(αναζήτηση ταξί)	$R_X = \{0, 1, 2, \dots\}$
" 3 ^ο "	(αριθμός, ποσό)	$R_X = \Omega = [0, 10]$ $R_Y = \{0, 1, \dots, 10\}$

π.χ. Ρίψη τριών δύο φορές

X_1 : ένδειξη 1^{ου} τριών, X_2 : ένδειξη 2^{ου} τριών

Y : άθροισμα των δύο ενδείξεων

Z : Διαφορά της 1^{ης} ένδειξης από την 2^η ένδειξη

W : # μικρότερη από τις δύο ενδείξεις

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,6)\}$$

$$X_1(4,2) = 4, \quad X_2(4,2) = 2, \quad Y(4,2) = 6, \quad Z(4,2) = -2$$

$$W(4,2) = 2.$$

$$R_{X_1} = R_{X_2} = R_W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad R_Y = \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$R_Z = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$$

$$Y = X_1 + X_2 \quad Z = X_2 - X_1 \quad W = \min(X_1, X_2)$$

Σημείωση: Έστω X_1, X_2 τ.μ. $X_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $X_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Οι συναρτήσεις $aX_1 + bX_2$ ($a, b \in \mathbb{R}$), X_1/X_2 ($X_2 \neq 0$)
 και $X_1 \cdot X_2$ είναι τυχαίες μεταβλητές

Σημείωση: $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τ.μ. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε

η συνάρτηση $f \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τ.μ.

π.χ. Αν $f(x) = x^3$ τότε X^3 τ.μ.

Έτσι μπορούμε να πάρουμε πιο σύνθετες τ.μ. όπως

$$2\pi X_1 + 3\sin X_2, \quad \ln X_1 + e^{X_2}, \quad \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_1 + \ln X_2}$$

Ορισμός: Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) ή
 (απλούστερα) συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X είναι η
 συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ με τύπο

$$F(t) = P(X \leq t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}), \quad t \in \mathbb{R}$$

α. Αν $t_1 < t_2$ τότε $F(t_1) \leq F(t_2)$, δηλαδή F αύξουσα

β. $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$

γ. Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{t_n\}_{n \geq 1}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(t)$, δηλαδή F δεξιά συνεχής.

Πρόταση: Αν $a < \beta$ τότε: $P(a < X \leq \beta) = F(\beta) - F(a)$

Απόδειξη: $(X \leq \beta) = (X \leq a) \cup (a < X \leq \beta)$

$$P(X \leq \beta) = P(X \leq a) + P(a < X \leq \beta) \Rightarrow P(a < X \leq \beta) = F(\beta) - F(a)$$

Σημείωση: $P(X < \beta) = F(\beta-)$ "αριστερό όριο της F στην θέση β ".

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a-)$$

$$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-)$$

$$P(a < X < \beta) = F(\beta-) - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(a-)$$

$$P(a \leq X < \beta) = F(\beta-) - F(a-)$$

Σημείωση: Αν F είναι αριστερά συνεχής τότε F συνεχής, οπότε

$$F(a-) = F(a). \text{ Επομένως:}$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-) = 0 \text{ και}$$

$$P(a < X \leq \beta) = P(a < X < \beta) = P(a \leq X \leq \beta) = P(a \leq X < \beta)$$

Σημείωση: Αν η σ.κ. F δεν είναι αριστερά συνεχής στο a τότε εμφανίζεται ένα "αύμα" της συνάρτησης στη θέση a με μέγεθος:

$$F(a) - F(a-) = P(X = a)$$

Π.Χ. (μη συνεχής σ.κ.)

(49)

X = αριθμός αγοριών μίας οικογένειας με δύο παιδιά

$$\Omega = \{AA, AK, KA, KK\} \quad R_X = \{0, 1, 2\}$$

As βρούμε την σ.κ. $F(t)$ της X :

α) για $t < 0$: $F(t) = P(X \leq t) = 0$

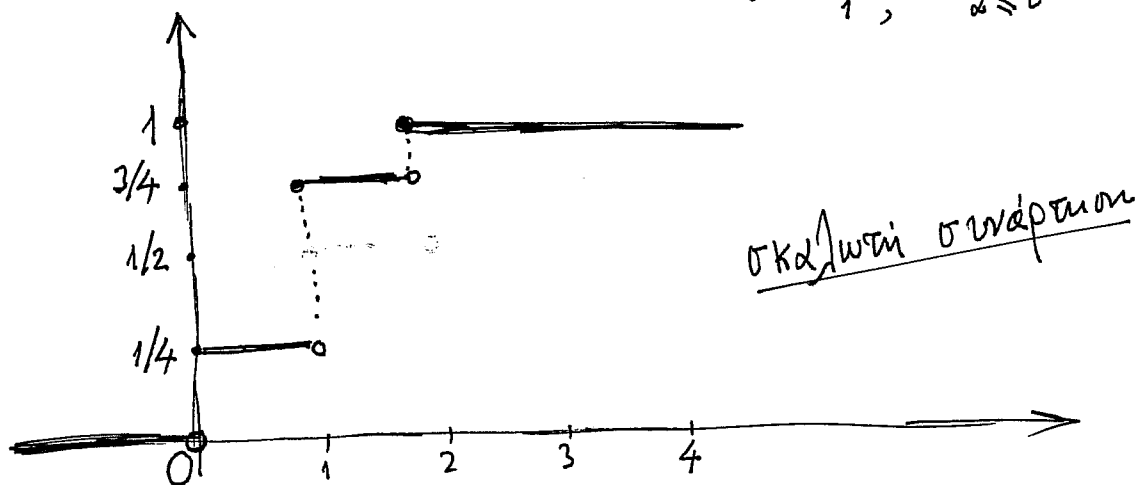
β) " $0 \leq t < 1$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X=0) = P(\{KK\}) = 1/4$

γ) " $1 \leq t < 2$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X=0 \text{ ή } X=1)$
 $= P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

δ) " $t \geq 2$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X=0 \text{ ή } X=1 \text{ ή } X=2)$
 $= P(\Omega) = 1$

Οπότε:

$$F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/4, & 0 \leq t < 1 \\ 3/4, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t \end{cases}$$



$$P(X=1) = P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

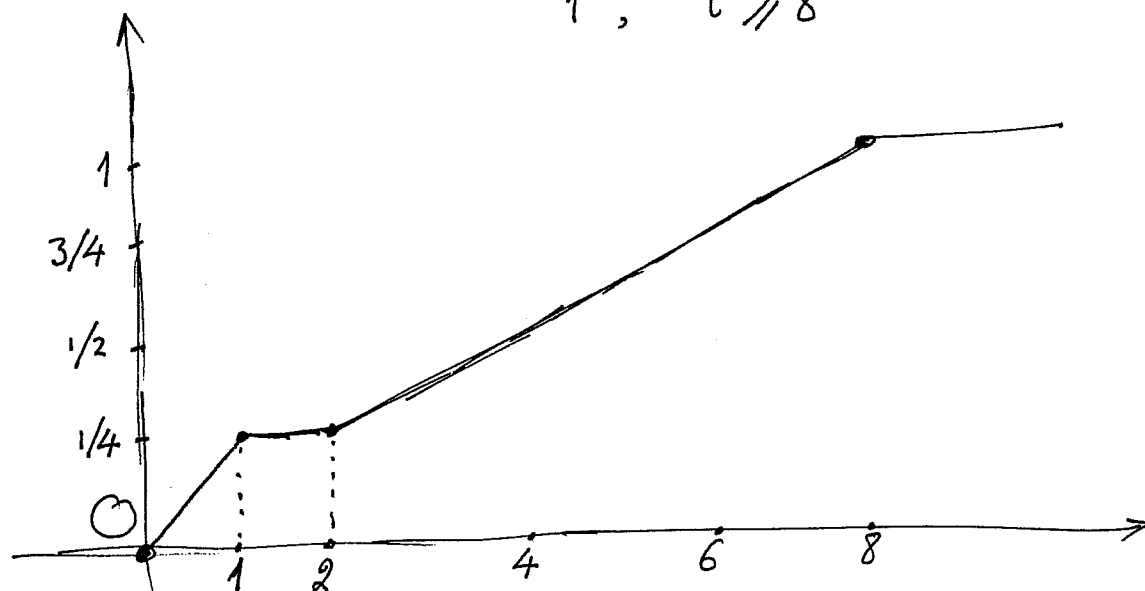
$$P(1 \leq X \leq 2) = P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

7X Χρόνος αναμονής (σε min) στο ταμείο
ενός δημόσιου οργανισμού είναι μια τ.μ. X με σ.κ.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/4, & 0 \leq t < 1 \\ 1/4, & 1 \leq t < 2 \\ t/8, & 2 \leq t < 8 \\ 1, & t \geq 8 \end{cases}$$

είναι
συνεχής
συνάρτηση



$$P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3}{8}$$

$$P(1 \leq X \leq 4) = F(4) - F(1-) = F(4) - F(1) = \frac{4}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$F(1-) = F(1)$ αφού F
συνεχής στο 1

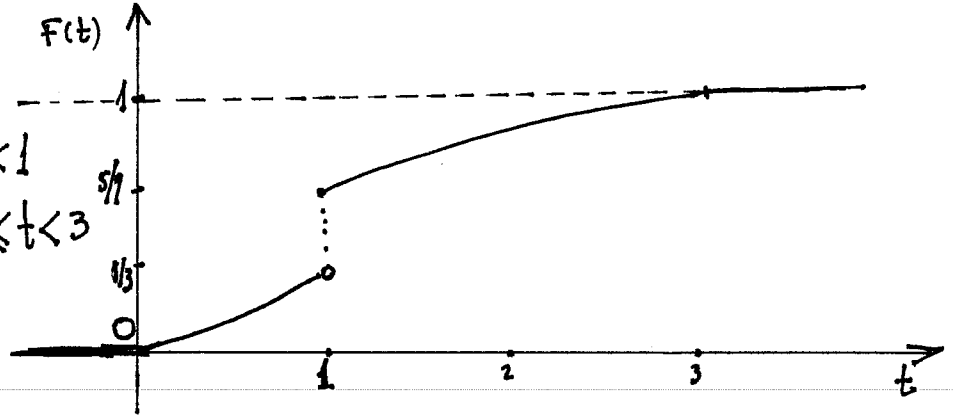
$$\begin{aligned} P(X \leq 5.5 | X \geq 2.5) &= \frac{P(2.5 \leq X \leq 5.5)}{P(X \geq 2.5)} \\ &= \frac{F(5.5) - F(2.5)}{1 - F(2.5)} = \frac{\frac{5.5}{8} - \frac{2.5}{8}}{1 - \frac{2.5}{8}} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

Σημείωση: Μια πραγματική συνάρτηση F είναι σ.κ.
μιας τ.μ. X αν και μόνον αν η F είναι αύξουσα,
δεξιά συνεχής και $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Πχ. X = ημερήσιες συναλλαγές (σε εκατομμύρια Ευρώ) σε μία τράπεζα

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο :

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{3}t^3, & 0 \leq t < 1 \\ c(6t - t^3), & 1 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$



$$P(X < 3) = 1$$

- α) $c = ?$; β) Να βρεθούν $P(X < 1)$, $P(X > 1)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$
 γ) Τα ενδεχόμενα $A = (0.5 \leq X \leq 2.5)$ και $B = (X > 2)$ είναι ανεξάρτητα;

Απάντηση:

α) $P(X < 3) = 1 \Rightarrow F(3-) = 1 \Rightarrow c(6 \cdot 3 - 3^3) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$

β) $P(X < 1) = F(1-) = \frac{1}{3}1^3 = \frac{1}{3}$

$P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{9}(6 \cdot 1 - 1^3) = \frac{4}{9}$

$P(X = 1) = F(1) - F(1-) = \frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$P(X = 2) = F(2) - F(2-) = \frac{8}{9} - \frac{8}{9} = 0$

γ) $P(A) = P(0.5 \leq X \leq 2.5) = F(2.5) - F(0.5-) = F(2.5) - F(0.5) = \frac{2}{3}$

$P(B) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \frac{1}{9}$

$P(AB) = P(2 < X \leq 2.5) = F(2.5) - F(2) = \frac{1}{12}$

Παρατηρούμε ότι:

$$P(AB) \neq P(A)P(B)$$

Άρα τα ενδεχόμενα A και B ΔΕΝ είναι ανεξάρτητα.

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (διακριτές τ.μ.)

Ορισμός: Μια τ.μ. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται διακριτή (ή αριθμητική) αν το σύνολο των δυνατών τιμών της R_X είναι πεπερασμένο ή απείρως αριθμήσιμο.

π.χ. Ρίψη νομίσματος V φορές. Έστω

$$X = \# \text{ κορώνων}$$

$$R_X = \{0, 1, \dots, V\} \quad \text{"πεπερασμένο σύνολο"}$$

π.χ. $X = \text{χρόνος ζωής}$ ^{ενός} ~~λαμπίρα~~.

$$R_X = [0, +\infty). \quad \text{"αυτό το σύνολο είναι άηχο υπεραριθμήσιμο"}$$

Συντηώς η τ.μ. X ΔΕΝ είναι διακριτή τ.μ.

Έστω $Y = [X]$ (θυμίζουμε ότι αν $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ είναι ο ^{"ακέραιο μέρος του x "} x είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που ΔΕΝ υπερβαίνει το x .)

Βλέπουμε ότι $R_Y = \{0, 1, 2, \dots\}$ "αυτό το σύνολο είναι απείρως αριθμήσιμο"

Συντηώς η τ.μ. Y είναι διακριτή τ.μ.

π.χ. Θεωρούμε μια γραμμή παραγωγής. Έστω

$$X = \# \text{ προϊόντων που εξετάζονται μέχρι την εμφάνιση του 1ου ελαττωματικού προϊόντος}$$

$$R_X = \{1, 2, \dots\}. \quad \text{Άρα η τ.μ. } X \text{ είναι διακριτή.}$$

↳ "απείρως αριθμήσιμο σύνολο"

$$Y = \# \text{ μη ελαττωματικών μέχρι να βρεθεί το 1ο ελαττωματικό}$$

$$R_Y = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad \text{Άρα η τ.μ. } Y \text{ είναι διακριτή.}$$

↳ "απείρως αριθμήσιμο σύνολο"

Συνάρτηση Πιθανότητας της Διακριτής Τ.μ. X

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = P(X=x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Προφανώς αν $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ τότε:

$$(1) \quad f(x) = 0, \text{ για κάθε } x \notin R_X$$

$$(2) \quad 0 \leq f(x_i) \leq 1, \quad i=1, 2, \dots$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$$

Σημείωση: Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί ως (1), (2), (3) τότε η f είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τ.μ.

π.χ. Ρίψη δύο τριώνων. Έστω

$X = \text{Η μεγαλύτερη από τις δύο ενδείξεις}$

$Y = \text{Η μικρότερη από τις δύο ενδείξεις}$

$Z = \text{Διαφορά (μεγαλύτερη ένδειξη - μικρότερη ένδειξη)}$

$$X \in \{1, \dots, 6\}$$

$$f_X(1) = P(X=1) = P(\{1,1\}) = \frac{1}{36}$$

$$f_X(2) = P(X=2) = P(\{(1,2), (2,1), (2,2)\}) = \frac{3}{36}$$

$$f_X(3) = P(X=3) = P(\{(1,3), (3,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}) = \frac{5}{36}$$

x	1	2	3	4	5	6
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

$$f_X(x) = \frac{2x-1}{36} \quad x=1, \dots, 6$$

$$Y \in \{1, \dots, 6\}$$

Y	1	2	3	4	5	6
$f_Y(Y)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$f_Y(Y) = \frac{13-2Y}{36} \quad Y=1, \dots, 6$$

$$Z \in \{0, 1, \dots, 5\}$$

Z	0	1	2	3	4	5
$f_Z(Z)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

πχ. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c έτσι ώστε η συνάρτηση με τύπο $f(x) = c \frac{3^{x-1}}{4^x}$, $x=1, 2, \dots$ να είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας κάποιας διακριτής τ.μ.

Απάντηση: Πρέπει $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$

$$\text{ή} \quad \sum_{x=1}^{\infty} c \frac{3^{x-1}}{4^x} = 1$$

$$\text{ή} \quad \frac{c}{4} \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = 1$$

$$\text{ή} \quad \frac{c}{4} \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1$$

$$\text{ή} \quad \frac{c}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow c = 1$$

Ορισμός : Έστω X μια διακριτή τ.μ. με σύνολο δυνατών τιμών $R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

και συνάρτηση πιθανότητας f .

Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X

ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i) = \sum_{x \in R_X} x P(X=x) \\ &= \sum_{x \in R_X} x f(x) \end{aligned}$$

εφόσον $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X=x_i) < \infty$

Αν $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(X=x_i) = \infty$ τότε λέμε ότι δεν υπάρχει η μέση της X

Παρατήρηση: Εκτός των όρων μέση τιμή της X , χρησιμοποιούνται και οι όροι: μέσος της X , μαθηματική ελπίδα της X

Εκτός των συμβόλων $E(X)$ χρησιμοποιείται και το

σύμβολο μ ή μ_X

π.χ. Ένας Υπάλληλος ασφαλιστικής εταιρίας μπορεί να διεκπεραιώσει την κλήρα 2 έως 5 δηλώσεις

# δηλώσεων X	$P(X=x), x=2,3,4,5$
2	0.15
3	0.30
4	0.35
5	0.20

Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός των δηλώσεων;

Απάντηση: $E(X) = \sum_{x=2}^5 x \cdot P(X=x)$

$$= 2 * 0.15 + 3 * 0.3 + 4 * 0.35 + 5 * 0.2$$

$$= 3.6$$

π.χ Ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός γραμμάτων κατά την ρίψη ενός νομίσματος 4 φορές;

Απάντηση: $X = \# \text{ γραμμάτων κατά την ρίψη ενός νομίσματος 4 φορές}$

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & x=0 \\ \frac{4}{16}, & x=1 \\ \frac{6}{16}, & x=2 \\ \frac{4}{16}, & x=3 \\ \frac{1}{16}, & x=4 \end{cases}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^4 x \cdot P(X=x) = 0 * \frac{1}{16} + 1 * \frac{4}{16} + 2 * \frac{6}{16} + 3 * \frac{4}{16} + 4 * \frac{1}{16} = 2$$

πχ. Έστω τ.μ. $X \in \{a_1, \dots, a_v\}$ με

$$P(X = a_i) = \frac{1}{v}, \quad i = 1, \dots, v \quad (\text{Λέγεται ομοιόμορφη στο σύνολο } \{a_1, \dots, a_v\})$$

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= \sum_{i=1}^v a_i P(X = a_i) = \sum_{i=1}^v a_i \cdot \frac{1}{v} \\ &= \frac{a_1 + \dots + a_v}{v} \end{aligned}$$

πχ. $X =$ ένδειξη κατά την ρίψη ενός τριγώνου
 $X \in \{1, \dots, 6\}$

$$\mu = E(X) = \frac{1 + \dots + 6}{6} = \frac{7}{2}$$

πχ Έστω X τ.μ. με σύνολο δυνατών τιμών
 $R_X = \{1, 2, \dots\}$

$$P(X > x) = \frac{c}{x+1}, \quad x = 0, 1, \dots \quad c \in \mathbb{R} \quad (*)$$

a) $c =$; $f(x) = P(X=x) =$; $x=1, 2, \dots$

β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει $E(X)$.

Απάντηση:

$$a) f(x) = P(X=x) = P(X > x-1) - P(X > x) \\ = \frac{c}{x} - \frac{c}{x+1} = \frac{c}{x(x+1)} ; x=1,2,\dots$$

Από την σχέση (*), θέτοντας $x=0$, προκύπτει ότι

$$P(X > 0) = c \Rightarrow P(X \leq 0) = 1 - c \left. \vphantom{P(X \leq 0)} \right\} \Rightarrow 1 - c = 0 \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Αφού $X \in \{1,2,\dots\} \Rightarrow P(X \leq 0) = 0$

Επομένως : $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} , x=1,2,\dots$

$$b) \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{1}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1} = +\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει η μέση τιμή της τ.μ. X

Πρόταση: Έστω X τ.μ. τέτοια ώστε $P(X=c)=1$.
Τότε $E(X)=c$.

Απόδειξη: $E(X) = \sum_{x \in R_X} x \cdot P(X=x) = c \cdot P(X=c) \\ = c \cdot 1 = c$

Σημείωση: Αν X τ.μ. διακριτή και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
τότε και η τ.μ. $Y = g(X)$ είναι διακριτή.

π.χ. $g(x) = x^2 \quad Y = X^2$
 $g(x) = nx \quad Y = nX$

Πρόταση: Έστω X διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας f
Τότε η μέση τιμή της τ.μ. $Y = g(X)$ δίνεται
από τον τύπο:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f(x)$$

π.χ. $E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 f(x)$

Πρόταση: X τ.μ. διακριτή, $g_1, g_2, \dots, g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
και $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$E[\lambda_1 g_1(X) + \dots + \lambda_k g_k(X)] = \lambda_1 E[g_1(X)] + \dots + \lambda_k E[g_k(X)]$$

Πρόταση: Αν X διακριτή τ.μ. και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Π.Χ. X τ.μ. $E(X)=2, E(X^2)=8$ (60)

Να βρεθούν οι μέσες τιμές των τυχαίων μεταβλητών

$$Y_1 = (4X+2)^2 \quad Y_2 = (X)_2 = X(X-1) \quad Y_3 = X^2 + (X+1)^2$$

Απάντη:

$$E(Y_1) = E(16X^2 + 16X + 4) = 16E(X^2) + 16E(X) + 4 = 16 \cdot 8 + 16 \cdot 2 + 4 = 164$$

$$E(Y_2) = E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = 8 - 2 = 6$$

$$E(Y_3) = E(X^2 + X^2 + 2X + 1) = E(2X^2 + 2X + 1) = 2E(X^2) + 2E(X) + 1$$

$$= 2 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 1 = 21$$

Π.Χ. Έστω $X = \#$ υπολογιστών που πουλάει ένα μικρό κατάστημα σε 3 μήνες.

$$f(x) = \frac{2x+3}{63} \quad x \in R_X = \{0, 1, \dots, 6\}$$

Η μέση τιμή της X είναι

$$E(X) = \sum_{x=0}^6 x f(x) = \frac{1}{63} \left(2 \sum_{x=0}^6 x^2 + 3 \sum_{x=0}^6 x \right) = \frac{35}{9}$$

Το κατάστημα αγοράζει από τον προμηθευτή 6 Η/Υ προς 1700 € με την εξής συμφωνία: Αν στους 3 μήνες δεν πουληθούν κάποια κομμάτια, μπορούν να επιστραφούν στον προμηθευτή στην τιμή όπως των 1000 €. Αν υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης ενός Η/Υ είναι 2200 €, ποιο είναι το αναμενόμενο κέρδος των ετήσιων σε 3 μήνες;

Απάντη: Κέρδος $= Y = (2200 - 1700)X - 700(6 - X)$

$$= 1200X - 4200$$

$$E(Y) = E(1200X - 4200) = 1200E(X) - 4200$$

$$= 1200 \cdot \frac{35}{9} - 4200 = \frac{4200}{9} \approx 466,7 \text{ €}$$

πχ. Παίζουμε μ' έναν φίλο μας το εξής παιχνίδι:

Ρίχνουμε ένα τάρν 1 φορά.

- Αν η ένδειξη είναι 1 ή 2 δίνουμε στον φίλο μας 4 €
- Αν η " " 3, 4, 5, 6 παίρνουμε από τον " " 3 €

$Y = \text{κέρδος}$ $Y \in \{-4, 3\}$ διεψή τ.μ.

$$P(Y = -4) = \frac{2}{6} \quad P(Y = 3) = \frac{4}{6}$$

$$E(Y) = (-4) \frac{2}{6} + 3 \frac{4}{6} = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$$

(Ζημία $\frac{2}{3}$ του φίλου μας. Δεν είναι δίκαιο το παιχνίδι).

Τροποποιούμε το παιχνίδι.

- Αν η ένδειξη είναι 1 ή 2 δίνουμε στον φίλο μας 4 €
- Αν η " " 3, 4, 5, 6 παίρνουμε από τον " " 2 €

$Y = \text{κέρδος}$ $Y \in \{-4, 2\}$

$$P(Y = -4) = \frac{2}{6} \quad P(Y = 2) = \frac{4}{6}$$

$$E(Y) = (-4) \frac{2}{6} + 2 \frac{4}{6} = 0 \text{ €}$$

(Δίκαιο Παιχνίδι)

Διακύμανση

(62)

Ορισμός: Έστω X διακριτή τ.μ. Έστω ότι υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η Διακύμανση της X ορίζεται ως εξής:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2] = E[(X - E(X))^2]$$

εφόσον υπάρχει η μέση τιμή στο δεξιό μέλος.

Παρατήρηση: Η διακύμανση (αν υπάρχει) είναι μη αρνητικός αριθμός.

Ορισμός: Έστω X διακριτή τ.μ. Η τυπική απόκλιση της X ορίζεται ως εξής:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$$

Σημείωση: Η διακύμανση της X συμβολίζεται συχνά με σ_X^2

Σημείωση: Η διακύμανση της X είναι μέτρο διασποράς της X γύρω από την μέση τιμή μ .

Πρόταση: Αν $P(X=c)=1$ τότε $V(X)=0$

Απόδειξη: $\mu = E(X) = c$

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - \mu)^2] = (c - \mu)^2 \cdot P(X=c) \\ &= (c - c)^2 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Πρόταση: Έστω X διακριτή τ.μ. με $E(X) = \mu$
Αν $V(X) = 0$, τότε $X = \mu$.

Πρόταση: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Απόδειξη:
$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X - \mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned}$$

Σημείωση: Αφού $V(X) \geq 0$ από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι $[E(X)]^2 \leq E(X^2)$

πχ. $X = \#$ ελαττωμάτων σε προϊόν κάποιες γραμμής παραγωγής.
 $f(x) = P(X=x), x \in R_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

x	$f(x)$
0	0.18
1	0.19
2	0.25
3	0.16
4	0.15
5	0.07

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) = 0 \cdot 0.18 + 1 \cdot 0.19 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.16 + 4 \cdot 0.15 + 5 \cdot 0.07 = 2.12$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 f(x) = 0^2 \cdot 0.18 + 1^2 \cdot 0.19 + 2^2 \cdot 0.25 + 3^2 \cdot 0.16 + 4^2 \cdot 0.15 + 5^2 \cdot 0.07 = 23.86$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 23.86 - (2.12)^2 = 19.3656$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{19.3656} \simeq 4.4$$

π.χ. $X \in \{a_1, \dots, a_v\}$

$P(X=x) = \frac{1}{v} \quad x \in R_X = \{a_1, \dots, a_v\}$ "ομοιόμορφη
διακριτή"

$E(X) = \frac{a_1 + \dots + a_v}{v}$

$E(X^2) = \sum_{x \in R_X} x^2 \frac{1}{v} = \frac{a_1^2 + \dots + a_v^2}{v}$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{a_1^2 + \dots + a_v^2}{v} - \left(\frac{a_1 + \dots + a_v}{v}\right)^2$

π.χ. (Ειδική Περίπτωση)

Ρίψη Τετραγών μία φορά.

$X =$ ένδοξη των Τετραγών

$R_X = \{1, \dots, 6\}$

$E(X^2) = \frac{1^2 + \dots + 6^2}{6} = \frac{91}{6}$

$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$

Πρόταση: X τ.μ. $a, \beta \in \mathbb{R}$

$V(aX + \beta) = a^2 V(X)$

$\sigma_{aX + \beta} = |a| \sigma_X$

Απόδειξη: $Y = aX + \beta$ $\mu_Y = a\mu_X + \beta$

$$\begin{aligned} V(aX + \beta) &= V(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2] = E[(aX + \beta - a\mu_X - \beta)^2] \\ &= a^2 E[(X - \mu_X)^2] = a^2 V(X) \end{aligned}$$

Παίρνουμε τετραγωνική ρίζα:

$$\sigma_{aX + \beta} = \sqrt{V(aX + \beta)} = \sqrt{a^2 V(X)} = |a| \cdot \sigma_X$$

πχ X τ.μ. $E(X) = 3$ $E[X(X-5)] = -2$
 Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των τ.μ. $Y = -3X + 7$ και $Z = \frac{X-3}{2}$

Απάντηση: $E(X) = 3$
 $E[X(X-5)] = -2 \Rightarrow E(X^2 - 5X) = -2 \Rightarrow E(X^2) - 5E(X) = -2$
 $\Rightarrow E(X^2) = 5E(X) - 2 = 5 \cdot 3 - 2 = 13$

Συνεπώς $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 13 - 9 = 4$

Οπότε: $E(Y) = E(-3X + 7) = -3E(X) + 7 = -3 \cdot 3 + 7 = -2$

$$V(Y) = V(-3X + 7) = 9V(X) = 9 \cdot 4 = 36.$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{36} = 6$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X-3}{2}\right) = E\left(\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}E(X) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X-3}{2}\right) = V\left(\frac{1}{2}X - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}V(X) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

$$\sigma_Z = \sqrt{V(Z)} = \sqrt{1} = 1$$

Ορισμοί :

$$\mu'_r = E(X^r) \quad \text{ροπή } r\text{-τάξης (γύρω από το } 0)$$

$$\mu_{(r)} = E[(X)_r], \quad \text{παραγοντική ροπή } r \text{ τάξης}$$

$$r = 0, 1, \dots$$

όπου $(X)_r = X(X-1)\dots(X-r+1)$

$$E[(X-c)^r] : \text{ροπή } r \text{ τάξης γύρω από το } c$$

$$\mu_r = E[(X-\mu)^r] : \text{κεντρική ροπή } r \text{ τάξης}$$

$$\mu'_0 = \mu_{(0)} = \mu_0 = 1$$

$$\mu'_1 = \mu_{(1)} = E(X)$$

$$\mu_2 = V(X)$$

Οι Κυριότερες Διακριτές Κατανομές

Κατανομή Bernoulli:

Δοκιμή Bernoulli: Πείραμα με δύο αποτελέσματα $\begin{cases} \text{Επιτυχία (ε)} \\ \text{Αποτυχία (α)} \end{cases}$

π.χ. Ρίψη ενός νομίσματος. Έχουμε δύο αποτελέσματα.

Θεωρούμε την εμφάνιση "κορώνας" ως επιτυχία
και " " " " "γράμματα" " αποτυχία.

$$\Omega = \{\varepsilon, \alpha\}$$

Ορισμός: Έστω X = αριθμός επιτυχιών σε μία δοκιμή Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (και αποτυχίας $q = 1-p$).

Η κατανομή της X καλείται κατανομή Bernoulli με παράμετρο p .

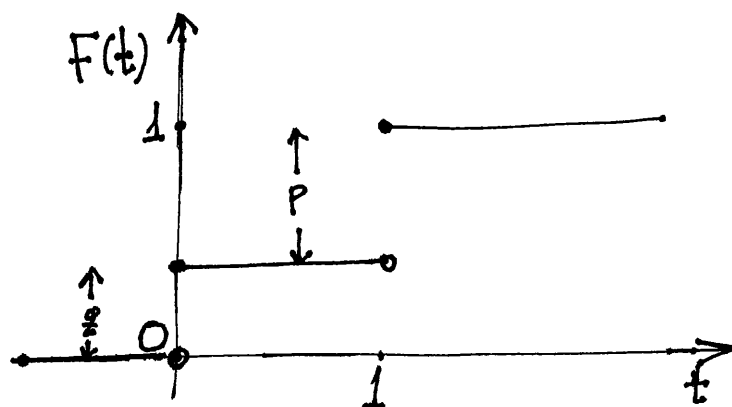
Λέμε ότι η τ.μ. $X \in \{0, 1\}$ ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p .

Συμβολισμός: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$P(X=x) = \begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \end{cases}$$

Συνάρτηση κατανομής της X :

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ p, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$



$$\mu = 0 * P(X=0) + 1 * P(X=1) = 1 * p = p$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = 0^2 * P(X=0) + 1^2 * P(X=1) = p$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = p q$$

π.χ. Ρίψη ζαριών.

Έστω $X = \begin{cases} 1, & \text{αν εμφανιστεί ένδειξη } > 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$$p = P(\text{εμφανίζεται } 5 \text{ ή } 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=x) = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{αλλιώς } \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{3} \quad V(X) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Διωνυμική κατανομή

Έστω n ανεξάρτητες επαναλήψεις μίας δοκιμής Bernoulli

Έστω $X = \#$ επιτυχιών σε μία ακολουθία n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας $q = 1 - p$ σε όλες τις δοκιμές

Σύνολο δυνατών τιμών της X : $R_X = \{0, 1, \dots, n\}$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και p και συμβολίζεται

με $b(n, p)$.

Συμβολισμός: $X \sim b(n, p)$

Η συνάρτηση πιθανότητας της X έχει τύπο:

$$f(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x=0, 1, \dots, n$$

Σημείωση: $b(1, p) \equiv \text{Bernoulli}(p)$

π.χ. Η πιθανότητα να κληθεί ένα αυτοκίνητο σε μια συνοικία είναι 0.6. Αν σ' έναν δρόμο είναι σταθμευμένα 10 αυτοκίνητα, ποιά είναι η πιθανότητα

- α. Να μην κληθεί κανένα ;
- β. Να κληθούν το πολύ τρία ;
- γ. Να κληθούν τουλάχιστον 7 ;

Απάντηση: Έστω $X = \#$ αυτοκινήτων που κλέβονται ανάμεσα στα 10 αυτοκίνητα

$$X \sim b(10, 0.6)$$

$$P(X = x) = \binom{10}{x} 0.6^x \cdot 0.4^{10-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$$

$$\text{α. } P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^{10-0} = 0.4^{10} = 0.0001$$

$$\begin{aligned} \text{β. } P(X \leq 3) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &\approx 0.0001 + 0.002 + 0.0011 + 0.042 = 0.055 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{γ. } P(X \geq 7) &= P(X=7) + P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) \\ &\approx 0.215 + 0.121 + 0.040 + 0.006 = 0.382 \end{aligned}$$

ΠΧ Ένα αεροπλάνο πραγματοποιεί επιτυχή πτήση μόνον αν (71)
 τουλάχιστον οι μισές από τις μηχανές που διαθέτει λειτουργούν.
 Αν η πιθανότητα να χαλάσει μια μηχανή είναι ίση με
 $1-p$, για ποιές τιμές του p ένα δίκινητήριο αεροπλάνο
 είναι προτιμότερο από ένα τετρακινητήριο;

Απάντηση: Έστω $X_v, v=1,2,\dots = \#$ μηχανών ενός
 v -κινητηρίου αεροπλάνου
 που παραμένουν σε
 λειτουργία καθ' όλη
 την διάρκεια της πτήσης

$$X_v \sim b(v, p)$$

$$P(X_4 \geq 2) = P(X_4=2) + P(X_4=3) + P(X_4=4) = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4$$

(πιθανότητα επιτυχούς πτήσης ενός τετρακινητηρίου αεροπλάνου)

$$P(X_2 \geq 1) = P(X_2=1) + P(X_2=2) = 2p(1-p) + p^2$$

(πιθανότητα επιτυχούς πτήσης ενός δίκινητηρίου αεροπλάνου)

Θέλουμε: $P(X_2 \geq 1) \geq P(X_4 \geq 2)$

$$\iff (p-1)^2(3p-2) \leq 0$$

$$\iff p \leq \frac{2}{3}$$

Πρόταση: $X \sim b(n, p)$

$$\mu = E(X) = np \quad (*)$$

$$\sigma^2 = V(X) = npq \quad (**)$$

Απόδειξη:

Κατ' αρχάς αποδεικνύουμε την (*):

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^n x P(X=x) = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^n x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \\ &\stackrel{y=x-1}{=} np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!(n-1-y)!} p^y q^{n-1-y} = np \sum_{y=0}^{n-1} \binom{n-1}{y} p^y q^{n-1-y} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np. \end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε την (**):

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^n x(x-1) P(X=x) = \sum_{x=2}^n x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \\ &= \sum_{x=2}^n \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^x q^{n-x} = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} \\ &\stackrel{y=x-2}{=} n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!(n-2-y)!} p^y q^{n-2-y} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \binom{n-2}{y} p^y q^{n-2-y} \\ &= n(n-1)p^2 (p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

Συνεπώς: $E(X^2) = n(n-1)p^2 + E(X) = n(n-1)p^2 + np$

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$$

Πχ Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 15 άτομα με ίδια ηλικία.

Κάθε άτομο με πιθανότητα 0.7 θα ζει μετά από 20 χρόνια.

α) Ποιά είναι η πιθανότητα μετά από είκοσι χρόνια

(i) Να ζουν και οι 15 ασφαλισμένοι

(ii) Να μην ζει ούτε ένας από τους 15 ασφαλισμένους

β) Αν ένας ασφαλισμένος ζήσει 20 χρόνια, λαμβάνει αποζημίωση

10.000 €. Ποιά είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση

του ποσού που θα πληρώσει η εταιρία;

Απάντηση: α) Έστω $X = \#$ ασφαλισμένων που ζουν μετά από 20 χρόνια

$$X \sim b(15, 0.7)$$

$$P(X=x) = \binom{15}{x} 0.7^x 0.3^{15-x}, \quad x=0, \dots, 15$$

$$(i) \quad P(X=15) = \binom{15}{15} 0.7^{15} 0.3^{15-15} = 0.7^{15} \simeq 0.005$$

$$(ii) \quad P(X=0) = \binom{15}{0} 0.7^0 0.3^{15-0} = 0.3^{15} \simeq 10^{-8}$$

$$\beta) \quad Y = 10000X$$

$$E(Y) = 10000 E(X) = 10000 * 15 * 0.7 = 105000 \text{ €}$$

$$V(Y) = 10000^2 V(X) = 10000^2 * 15 * 0.7 * 0.3 = 315000000$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{315000000} = 17748.2 \text{ €}$$

Ορισμός: θεωρούμε ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p , σταθερή για όλες τις δοκιμές. Έστω

$X = \#$ δοκιμών μέχρι την 1^η επιτυχία

$$X \in \{1, 2, \dots\}$$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p .

Συμβολισμός: $X \sim G(p)$

$f(x) = P(X=x) = P(\underbrace{1^{\text{η}} \text{ δοκιμή αποτυχία}, \dots, x-1 \text{ δοκιμή αποτυχία}}_{\text{λόγω ανεξαρ. δοκιμών}} \text{ } x \text{ δοκιμή επιτυχία})$
 $\nearrow$ συνάρτηση πιθανότητας
 $= \underbrace{q \dots q}_{x-1 \text{ φορές}} p = q^{x-1} p, \quad x=1, 2, \dots$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο:

$$F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 1 \\ \sum_{x=1}^{[t]} f(x) & \text{αν } t \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{[t]} f(x) &\stackrel{k=[t]}{=} \sum_{x=1}^k q^{x-1} p = p \sum_{x=1}^k q^{x-1} = p(1 + q + \dots + q^{k-1}) \\ &= p \frac{1 - q^k}{1 - q} = p \frac{1 - q^k}{p} = 1 - q^k = 1 - q^{[t]} \end{aligned}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1 - q^{[t]}, & t \geq 1 \end{cases}$$

η X Z αρι ρίχνεται συνεχώς μέχρις ότου εμφανιστεί άσος.

Τι είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτό

- α) στην 10^η ρίψη ;
- β) πριν από την 10^η ρίψη ;
- γ) μετά την 10^η ρίψη ;

Απάντηση: $X = \#$ ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά άσος

$$X \sim G(p), p = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = P(X=x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \frac{1}{6}, x=1,2,\dots$$

$$F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 1 \\ 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{\lceil t \rceil} & \text{αν } t \geq 1. \end{cases}$$

$$\alpha) P(X=10) = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6} \approx 0.032$$

$$\beta) P(X < 10) = P(X \leq 9) = F(9) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0.806$$

$$\gamma) P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - [1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}] \approx 0.162$$

2ος τρόπος για β) και γ):

$Y_v = \#$ άσων στις v ρίψεις Z αριων, $Y_v \sim b(v, \frac{1}{6})$

$$P(Y_v = y) = \binom{v}{y} \left(\frac{1}{6}\right)^y \left(\frac{5}{6}\right)^{v-y}, y=0, \dots, v$$

$$\beta) P(Y_9 \geq 1) = 1 - P(Y_9 = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^9$$

$$\gamma) P(Y_{10} = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

Πρόταση: $X \sim G(p)$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Απόδειξη: θα αποδείξουμε μόνον τον τύπο της μέσης τιμής.

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1} \quad (*)$$

Παρένθεση: $\sum_{x=0}^{\infty} t^x = 1 + t + t^2 + \dots = \frac{1}{1-t}, \quad |t| < 1$

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο στην (*) έχουμε:

$$\mu = E(X) = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

πχ. Ρίχνουμε ένα ~~φάρ~~ (αμερόληπτο) συνεχώς. Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά दोस (ισούται με $\frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$)

πχ. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ~~φάρ~~ ^{φινόληφα} συνεχώς. Ο αναμενόμενος αριθμός των ρίψεων μέχρι να εμφανιστούν εφάπαξ για πρώτη φορά कौना (ισούται με: $\frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$)

Σημαντική Σημείωση: (Ιδιότητα Έλλειψης της γεωμετρικής κατανομής)

$$P(X > k+r | X > k) = P(X > r), \quad k, r \text{ μη αρνητικοί ακέραιοι}$$

Απόδειξη:

$$P(X > k+r | X > k) = \frac{P(X > k+r, X > k)}{P(X > k)} = \frac{P(X > k+r)}{P(X > k)}$$

$$= \frac{\frac{1}{h} q^{k+r}}{\frac{1}{h} q^k} = q^r = P(X > r)$$

Σημείωση: $Y = \#$ αποτυχιών μέχρι την 1^η επιτυχία
 $Y = X - 1$

$\underbrace{a \ a \ \dots \ a \ \varepsilon}_X$
 Y

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \frac{1}{h} q^y \cdot p, \quad y = 0, 1, \dots$$

Ορισμός: Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p σταθερή σε όλες τις δοκιμές.

$X = \#$ δοκιμών μέχρι την πραγματοποίηση της r επιτυχίας

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p . Το σύνολο των δυνατών τιμών της X είναι $R_X = \{r, r+1, \dots\}$

Συμβολισμός: $X \sim NB(r, p)$

A : Η ομάδα α αναδεικνύεται πρωταθλήτρια σε 5 παιχνίδια

B : " " β " " " " " " " " " " " "

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(X_1=5) + P(X_2=5) \\ = \binom{4}{2} 0.48^3 * 0.52^2 + \binom{4}{2} 0.52^3 * 0.48^2 \approx 0.37$$

$$b) P(A|A \cup B) = \frac{P[A(A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.1794}{0.3738} \approx 0.48$$

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Ορισμός: Έστω ότι μια κάλη περιέχει α άσπρες και β μαύρες σφαίρες. Εξάγουμε χωρίς επανάθεση, την μία μετά την άλλη, γ σφαίρες. Έστω

$X = \#$ άσπρων σφαιρών που περιέχονται στο δείγμα των γ σφαιρών.

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με παραμέτρους α, β, γ.

Συμβολισμός: $X \sim h(\gamma, \alpha, \beta)$

$$f(x) = P(X=x) = \frac{\binom{\alpha}{x} \binom{\beta}{\gamma-x}}{\binom{\alpha+\beta}{\gamma}}, \quad x = \max(0, \gamma-\beta), \dots, \min(\gamma, \alpha)$$

πχ. Ένας φαρμακοποιός έχει

16 μπουκάλια παιδικού αντιπυρετικού

{

5 με ημερομηνία λήξης
σε 10 μέρες

11 με ημερομηνία
λήξης σε 1 χρόνο

Διαλέγει 8 μπουκάλια στην τύχη.

Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεί τουλάχιστον 3 με την κοντινή ημερομηνία λήξης.

Απάντηση: Έστω:

$X = \#$ μπουκαλιών με την κοντινή ημερομηνία λήξης (στο δείγμα των 8 που διαλέχτηκαν).

$$X \sim h(8, 5, 11)$$

$$f(x) = P(X=x) = \frac{\binom{5}{x} \binom{11}{8-x}}{\binom{16}{8}}, \quad x=0, \dots, 5$$

$$P(X \geq 3) = \sum_{x=3}^5 P(X=x) = \frac{\binom{5}{3} \binom{11}{5}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{5}{4} \binom{11}{4}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{5}{5} \binom{11}{3}}{\binom{16}{8}} = 0.5$$

Κατανομή Poisson

Ορισμός: Έστω X τ.μ. διακριτή με σύνολο τιμών $R_X = \{0, 1, \dots\}$
και συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x=0, 1, \dots \text{ όπου } \lambda > 0.$$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ .

Συμβολισμός: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ή $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Πρόταση (Σημαντική)

Έστω $X \sim b(n, p)$. Αν για $n \rightarrow \infty$ και $p \rightarrow 0$, $np \rightarrow \lambda > 0$ τότε η κατανομή της X μπορεί να προσεγγιστεί από την κατανομή Poisson με παράμετρο λ , δηλαδή:

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \lambda = np \quad \left(\begin{array}{l} n \geq 20 \\ p \leq \frac{10}{n} \end{array} \right)$$

Πχ. # πιθανότητα ατυχήματος σ' ένα σημείο στην εθνική οδό ισούται με 0.0001. Διέρχονται 1000 αυτοκίνητα κατά τη διάρκεια ενός Σαββατοκύριακου. Ποιά είναι η πιθανότητα να γίνουν δύο ή περισσότερα ατυχήματα.

Απάντηση: Έστω

$X = \#$ ατυχημάτων κατά τη διάρκεια των Σαββατοκύριακων

$$X \sim b(1000 = n, p = 0.0001)$$

$$P(X=x) = \binom{1000}{x} 0.0001^x * 0.9999^{1000-x}, \quad x = 0, \dots, 1000$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0.9999^{1000} - 1000 * 0.0001 * 0.9999^{999} \approx 0.004675$$

Όμως κατά προσέγγιση

$$X \sim P(1000 * 0.0001) = P(0.1)$$

$$\lambda = 1000 * 0.0001 = 0.1$$

$$P(X=x) \approx e^{-0.1} \frac{0.1^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

$$P(X \geq 2) \approx 1 - e^{-0.1} \frac{0.1^0}{0!} - e^{-0.1} \frac{0.1^1}{1!} = 1 - e^{-0.1}(1 + 0.1) = 1 - 1.1e^{-0.1} = 0.00467884$$

Πχ Έστω $X = \#$ τυπογραφικών λαθών σε μία σελίδα
 $X \sim P(\lambda=2)$

Να υπολογιστεί το ποσοστό των σελίδων του βιβλίου που περιέχουν:

- ακριβώς δύο τυπογραφικά λάθη
- τουλάχιστον " " "
- περισσότερα από δύο αλλά λιγότερα από 6 τυπογραφικά λάθη.

Απάντηση: $P(X=x) = e^{-2} \frac{2^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$

$$a) P(X=2) = e^{-2} \frac{2^2}{2!} = 2e^{-2} \approx 0.2707 \quad \text{πληρουν } 27\%$$

$$b) P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \\ = 1 - e^{-2} \frac{2^0}{0!} - e^{-2} \frac{2^1}{1!} = 1 - 3e^{-2} \approx 0.5939 \\ \text{πληρουν } 59\%$$

$$c) P(2 < X < 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ = e^{-2} \left(\frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} \right) \\ \approx 0.307 \quad \text{πληρουν } 30.7\%$$

Πρόταση: Αν $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ τότε: $\mu = E(X) = \lambda$
 $\sigma^2 = V(X) = \lambda$

(83)

Απόδειξη:

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}_X} x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \stackrel{y=x-1}{=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mu_{(2)} = E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \stackrel{y=x-2}{=} e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

π.χ. Έστω $X = \#$ ατόμων που δεν εμφανίζονται στην πτήση
 ενώ έχουν κάνει κράτηση.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 10)$$

α) Ποιά είναι η πιθανότητα ένα άτομο που βρίσκεται στην 3^η θέση της λίστας αναμονής να μπορέσει να ταξιδέψει;

Απάντηση:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{x=0}^2 P(X=x)$$

$$= 1 - e^{-10} \frac{10^0}{0!} - e^{-10} \frac{10^1}{1!} - e^{-10} \frac{10^2}{2!} \approx 0.997$$

β) Αν τρία άτομα τα οποία είχαν κάνει κράτηση έχουν ήδη ακυρώσει την κράτηση, ποιά είναι η πιθανότητα το έκτο άτομο της λίστας αναμονής να μην μπορεί να ταξιδέψει;

Απάντηση: $P(X < 6 | X \geq 3) = \frac{P(3 \leq X < 6)}{P(X \geq 3)}$

$$= \frac{\sum_{x=3}^5 e^{-10} \frac{10^x}{x!}}{0.0997} \approx 0.6449$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Μια συνεχής τ.μ. παίρνει τιμές σ' ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ ή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Ορισμός: X τ.μ. Έστω ότι υπάρχει $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$

τέτοιο ώστε: $P(X \in A) = \int_A f(x) dx$, όπου A διάστημα

ή ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}$, τότε η τ.μ. X λέγεται συνεχής

και η συνάρτηση f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

ή συνάρτηση πυκνότητας της X

Σημείωση: Έστω $A = (-\infty, t]$. Τότε η συνάρτηση κατανομής της X

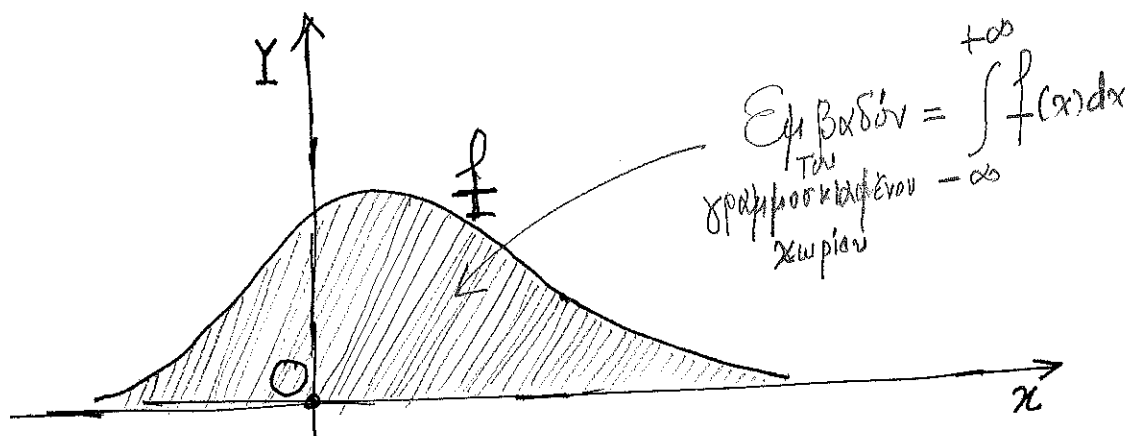
$$F(t) = P(X \leq t) = P(X \in (-\infty, t]) = \int_A f(x) dx = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

$$\Rightarrow F'(t) = f(t)$$

Επίσης:

$$1 = P(X \in \mathbb{R}) = P(X \in (-\infty, +\infty)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Η παραπάνω σχέση γεωμετρικά σημαίνει ότι το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στο γράφημα της f και τον οριζόντιο άξονα ισούται με 1



Οι ιδιότητες:

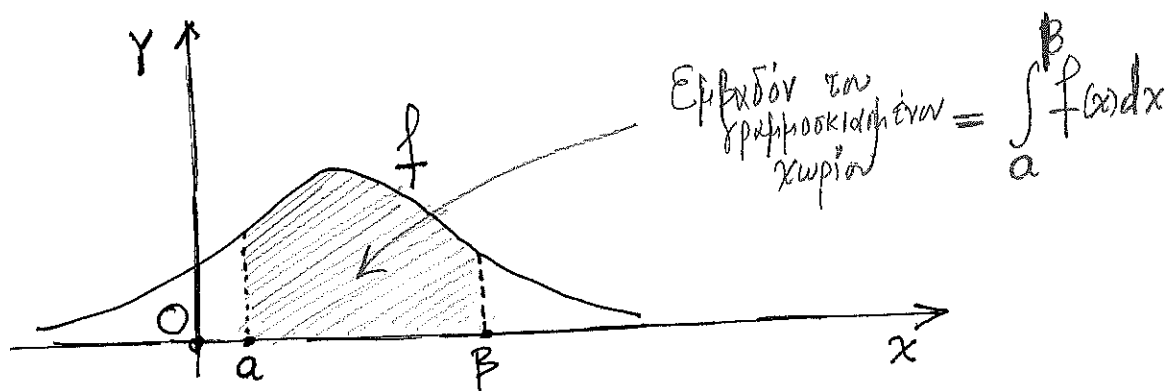
- $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

είναι χαρακτηριστικές ιδιότητες μίας συνεχούς τ.μ.

Έστω $A = [a, b], a \leq b$. Τότε

$$P(a \leq X \leq b) = \int_A f(x) = \int_a^b f(x) dx$$



Έστω $a=b$. Τότε

$$P(X=a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x) dx = 0,$$

δηλαδή η πιθανότητα η συνεχής Τ.μ. X να είναι ίση με $a \in \mathbb{R}$ ισούται με μηδέν.

Οπότε: $P(X < a) = P(X \leq a)$

$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$$

π.χ. Έστω X χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα (σε 1000-ώρες ώρα).
 Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x \notin [1, 3] \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

Ισχύει: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_1^3 \frac{c}{x^3} dx = 1$

$$\Rightarrow c \left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1} \right]_1^3 = 1 \Rightarrow c \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^3 = 1$$

$$\Rightarrow c \left(-\frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 1^2} \right) = 1 \Rightarrow c = \frac{9}{4}$$

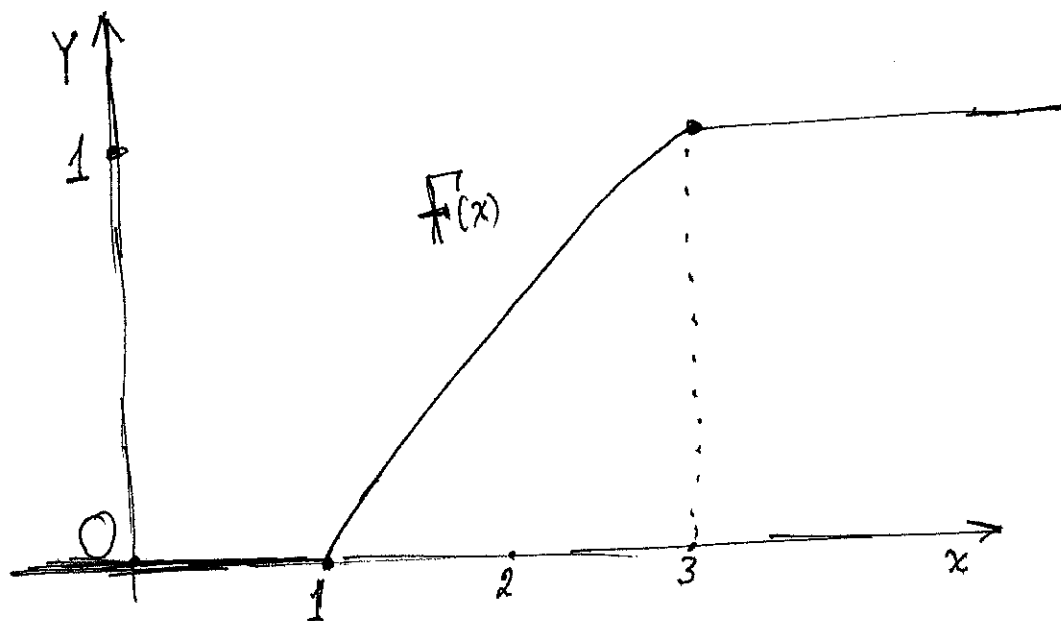
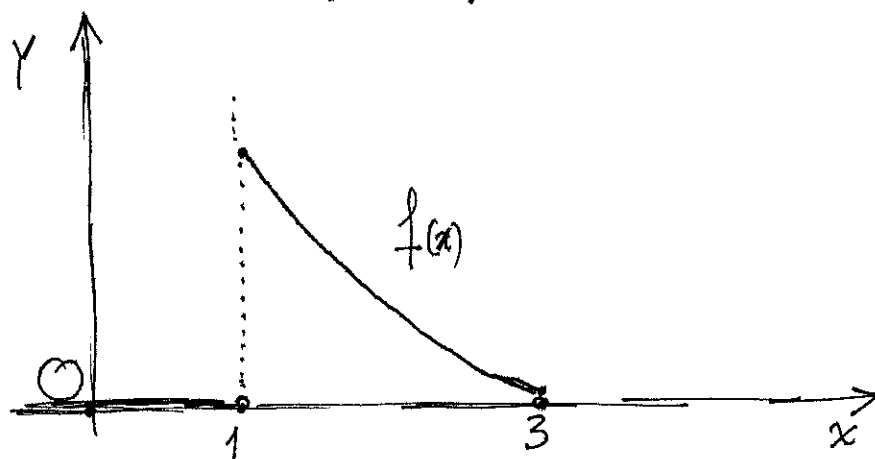
Οπότε:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{4x^3}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x \notin [1, 3]. \end{cases}$$

συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X έχει τύπο:

$$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ \int_1^t \frac{9}{4x^3} dx, & 1 < t < 3, \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & t \leq 1 \\ \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right), & 1 < t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$



$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \frac{5}{32}$$

$$P(2 \leq X \leq 2.5) = F(2.5) - F(2) = \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{6 \cdot 2.5}\right) - \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ = \frac{81}{800} \approx 0.1$$

$$P(X > 2) = \int_2^{\infty} f(x) dx = \int_2^3 \frac{9}{4x^3} dx = \frac{5}{32}$$

$$P(X \leq 2.5 | X > 2) = \frac{P(2 < X \leq 2.5)}{P(X > 2)} = \frac{81/800}{5/32} \approx 0.65$$

πχ. Ο χρόνος X (σε λεπτά) μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων των συρμών του μετρό είναι μια συνεχής τ.μ. με σ.κ.

$$F(t) = \begin{cases} c - e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{2t}{5} e^{-\frac{2t}{5}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$$

α) Ποιά είναι η τιμή της σταθεράς c και ποιά είναι ο τύπος της συνάρτησης πυκνότητας της τ.μ. X

Απάντηση:

Από τον τύπο της $F(t)$: $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = c$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$

Άρα: $c = 1$

Η συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = F'(x) = \left(1 - e^{-\frac{2}{5}x} - \frac{2x}{5} e^{-\frac{2x}{5}}\right)' = \frac{4}{25} x e^{-\frac{2}{5}x}, \quad x > 0$$

$$f(x) = 0, \quad x \leq 0$$

β) Αν κάποιος φτάσει στον σταθμό την στιγμή που φεύγει ένας συρμός, ποιά είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει i) λιγότερο από 5 λεπτά και ii) από 1 έως 3 λεπτά.

Απάντηση:

i) $P(X < 5) = F(5) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} \approx 0.59$

ii) $P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = (1 - e^{-6/5} - \frac{6}{5}e^{-6/5}) - (1 - e^{-2/5} - \frac{2}{5}e^{-2/5}) = \frac{7}{5}e^{-2/5} - \frac{11}{5}e^{-6/5} \approx 0.276$

Ορισμός: Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας f .

Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της X ορίζεται ως εξής:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{εφόσον: } \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty.$$

π.χ. Έστω X = συνολικός χρόνος (σε ώρες) της ημερήσιας χρήσης ενός μηχανήματος αυτόματων συναλλαγών είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x & 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{9}(x-6) & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Να βρεθεί ο μέσος ημερήσιος χρόνος χρήσης του μηχανήματος.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^3 x \frac{1}{9}x dx + \int_3^6 x \left[-\frac{1}{9}(x-6)\right] dx \\ &= \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + \left(-\frac{1}{9}\right) \left\{ \left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 - 6 \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^6 \right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Πρόταση: X συνεχής τ.μ. Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε

(90)

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

Πρόταση: $E[\lambda_1 g_1(X) + \lambda_2 g_2(X) + \dots + \lambda_k g_k(X)]$

$$= \lambda_1 E[g_1(X)] + \lambda_2 E[g_2(X)] + \dots + \lambda_k E[g_k(X)].$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

Πόρισμα: $E(aX + \beta) = aE(X) + \beta, a, \beta \in \mathbb{R}$

Ορισμός: Έστω X συνεχής τ.μ. για την οποία υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η διακύμανση της X είναι

$$V(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] \quad (\text{εφόσον υπάρχει η μέση τιμή του δεξιού μέλους})$$

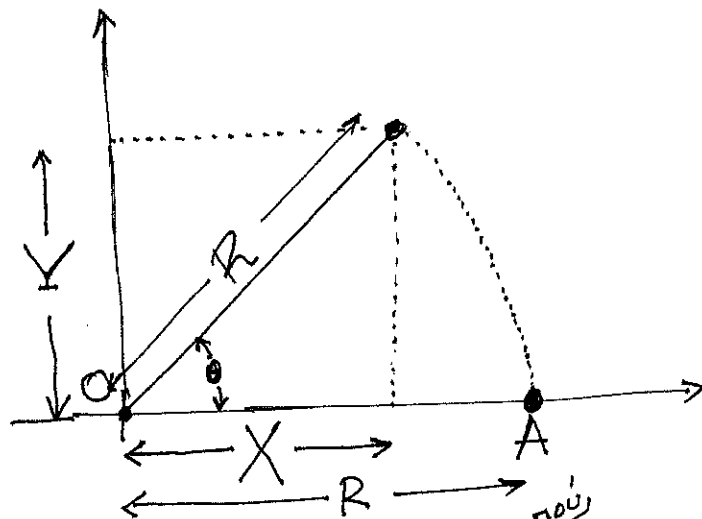
$$\sigma = \sqrt{V(X)} : \text{τυπική απόκλιση της } X$$

Ισχύουν ότι:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(aX + \beta) = a^2 V(X), a, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_{aX + \beta} = |a| \sigma_X, a, \beta \in \mathbb{R}$$



Ράβδος μήκους $OA = R$ ^{που} έχει σφαίρα στην άκρη σπρώχνεται με δύναμη και διαγράφεται γωνία θ με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η αναμενόμενη θέση $(E(X), E(Y))$ στην οποία θα βρεθεί η σφαίρα.

Απάντηση: $X = R \cos \Theta$ $Y = R \sin \Theta$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R \cos \theta f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} R \cos \theta \frac{2}{\pi} d\theta \\ &= \frac{2R}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2R}{\pi} [\sin \theta]_0^{\pi/2} = \frac{2R}{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{2R}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R \sin \theta f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} R \sin \theta \frac{2}{\pi} d\theta = \frac{2R}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2R}{\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi/2} = -\frac{2R}{\pi} \end{aligned}$$

ΠX Έστω X τ.μ. συνεχής με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k\theta^k}{x^{k+1}} & x \geq \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases} \quad k, \theta \quad \text{"κατανομή Pareto."}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{\theta}^{\infty} \frac{x k \theta^k}{x^{k+1}} dx = \begin{cases} \frac{k}{k-1} \theta, & k > 1 \\ \theta \int_{\theta}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \theta [\ln x]_{\theta}^{+\infty}, & k=1 \end{cases}$$

δεν υπάρχει $E(X)$

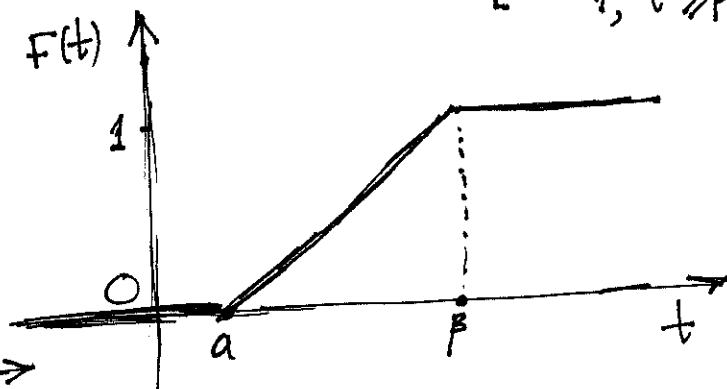
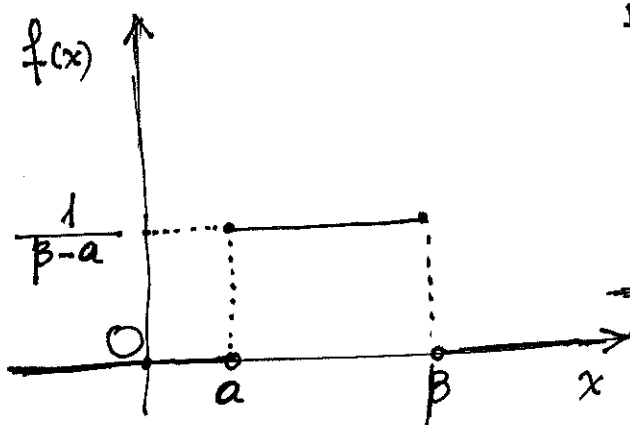
Οι κυριότερες Συνεχείς Κατανομές

Ομοιόμορφη Κατανομή: Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση ~~κατανομής~~ πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - a} & a \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a, \beta]$ και συμβολίζεται με $U(a, \beta)$.

Συνάρτηση Κατανομής της X : $F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{\beta-a}, & a \leq t \leq \beta \\ 1, & t \geq \beta \end{cases}$



Πρόταση: $X \sim \mathcal{U}(a, \beta)$. $E(X) = \frac{a+\beta}{2}$ $V(X) = \frac{(\beta-a)^2}{12}$ (13)

Απόδειξη: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^{\beta} x \frac{1}{\beta-a} dx = \frac{1}{\beta-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^{\beta}$

$$= \frac{\beta^2 - a^2}{2} \frac{1}{\beta-a} = \frac{a+\beta}{2}$$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^{\beta} x^2 \frac{1}{\beta-a} dx = \frac{1}{\beta-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^{\beta} = \frac{1}{\beta-a} \frac{\beta^3 - a^3}{3}$

$$= \frac{1}{\beta-a} \frac{(\beta-a)(a^2 + a\beta + \beta^2)}{3} = \frac{a^2 + a\beta + \beta^2}{3}$$

$$= \frac{1}{\beta-a} \frac{(\beta-a)(a^2 + a\beta + \beta^2)}{3} = \frac{a^2 + a\beta + \beta^2}{3}$$

Συμπερασματικά: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{a^2 + a\beta + \beta^2}{3} - \left(\frac{a+\beta}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(\beta-a)^2}{12}$$

πχ. Ένας φοιτητής παίρνει το τρένο για να πάει στο Πανεπιστήμιο στις 8:00 π.μ. Η διάρκεια (σε min) X του δρομολογίου $\sim \mathcal{U}(58, 63)$.

$P(X > 60) = ?$ $P(X \leq 59) = ?$ $E(X) = ?$

Απάντηση: Η συνάρτηση πυκνότητας της X έχει ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{63-58}, & 58 \leq x \leq 63 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 58 \leq x \leq 63 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο:

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 58 \\ \frac{t-58}{63-58} & 58 \leq t < 63 \\ 1 & t \geq 63 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X > 60) &= 1 - P(X \leq 60) = 1 - F(60) \\ &= 1 - \frac{60-58}{63-58} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$P(X \leq 59) = F(59) = \frac{59-58}{63-58} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Μέσος Χρόνος Δρομολογίου} = E(X) = \frac{58+63}{2} = 60.5 \text{ min}$$

Κανονική Κατανομή:

Ορισμός: Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}$ και $\sigma^2 > 0$ αν η συνάρτηση πυκνότητας f της X

δίνεται από τον τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Συμβολισμός: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{προφανώς ισχύει})$$

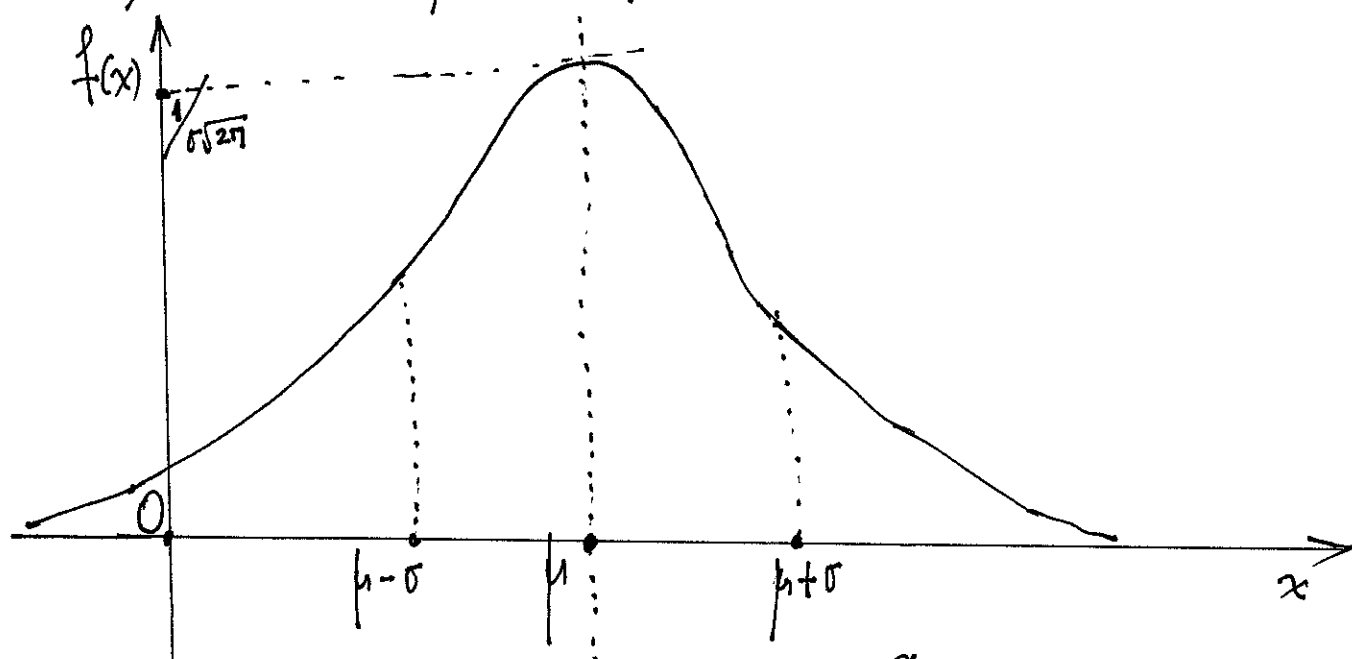
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{αρκεί να γίνει χρήση διπλών ολοκληρώσεων})$$

Πρόταση:

α) $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

β) Η συνάρτηση f είναι συμμετρική γύρω από το σημείο μ , δηλαδή $f(\mu+x) = f(\mu-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Τα σημεία $\mu \pm \sigma$ είναι σημεία καμπής.



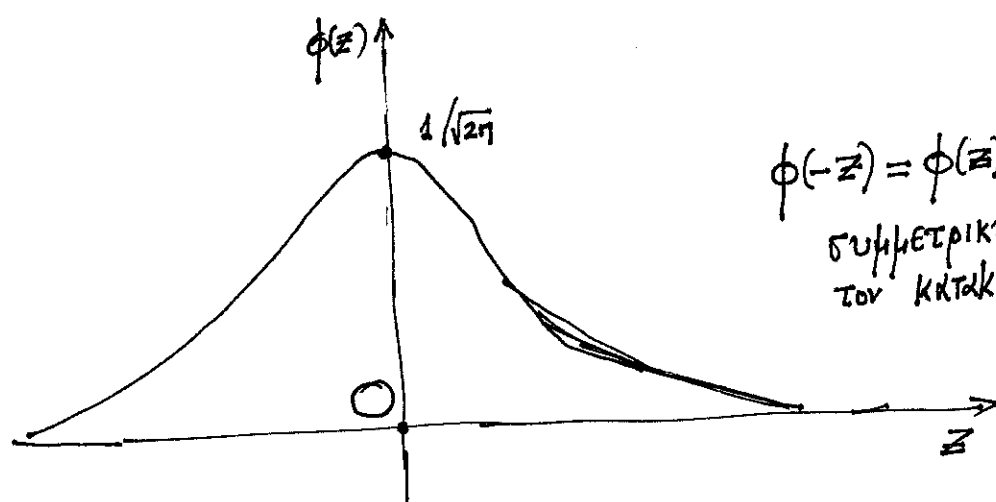
Η συνάρτηση κατανομής $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$ δεν υπολογίζεται σε κλειστή μορφή.

Πρόταση: Αν η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε

$$E(X) = \mu \quad \text{και} \quad V(X) = \sigma^2$$

Ορισμός: Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή Z λέμε ότι ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή αν $Z \sim N(0,1)$ δηλαδή η Z ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu=0$ και $\sigma^2=1$. Η συνάρτηση πυκνότητας της Z έχει τύπο:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}$$



$\phi(-z) = \phi(z), \quad z \in \mathbb{R}$
 συμμετρική ως προς
 τον κατακόρυφο άξονα

Υπάρχουν πίνακες τιμών της συνάρτησης κατανομής $\Phi(z)$ της $Z \sim N(0,1)$. (Στο βιβλίο του Μ. Κούτρα υπάρχει ο πίνακας Π6 στην σελίδα 852).

Επίσης ισχύει ότι: $\Phi(z) + \Phi(-z) = 1, \quad z \in \mathbb{R}$

π.χ. $\Phi(1.5) = 0.9332$

$$\Phi(0.5) = 0.6915$$

$$\Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] \quad (97)$$

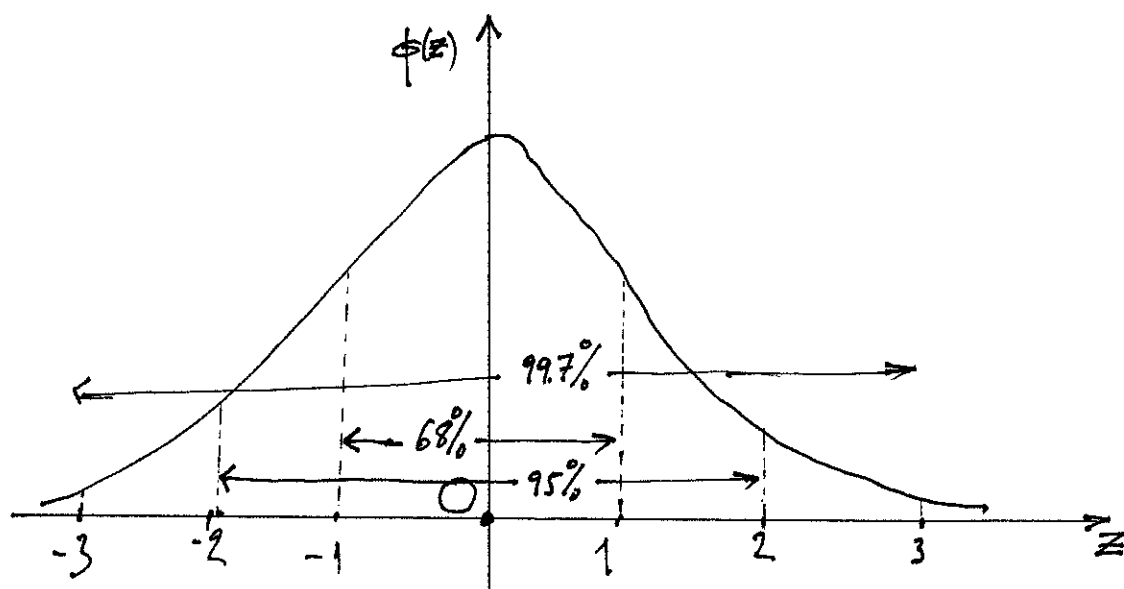
$$= 2 * \Phi(1) - 1 = 2 * 0.8413 - 1 = 0.6826 \simeq 68\%$$

$$P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2)]$$

$$= 2 * \Phi(2) - 1 = 2 * 0.9772 - 1 = 0.9544 \simeq 95\%$$

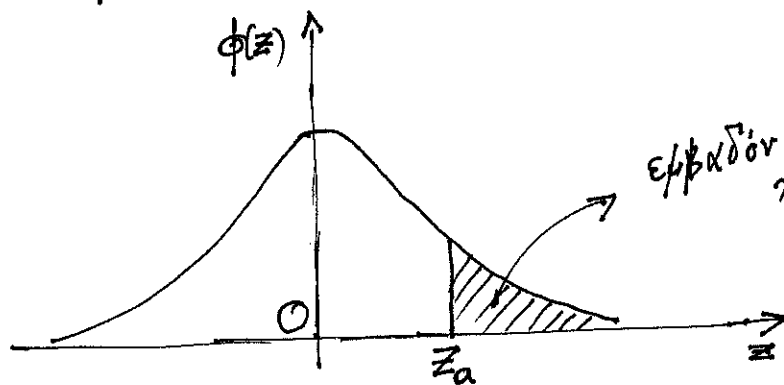
$$P(-3 \leq Z \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = \Phi(3) - [1 - \Phi(3)]$$

$$= 2 * \Phi(3) - 1 = 2 * 0.9987 - 1 = 0.9974 \simeq 99.7\%$$



Ορισμός: Αν $Z \sim N(0,1)$ και $0 < a < 1$. Ο αριθμός z για τον οποίον $P(Z > z) = a$, $0 < a < 1$ ονομάζεται άνω a - (ποσοστιαίο) σημείο της τυποποιημένης κανονικής κατανομής Z .

Συμβολίζεται με z_a



Εμβαδόν του γραμμοκινημένου πωριον = a

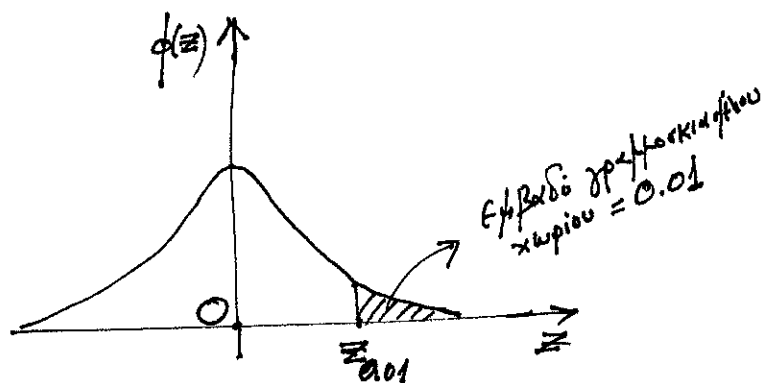
πχ. Αν $\alpha = 0.01$. $z_{0.01} = ?$

$$P(Z > z) = 0.01$$

$$1 - P(Z \leq z) = 0.01$$

$$1 - \Phi(z) = 0.01$$

$$\Phi(z) = 0.99$$



Από πίνακα: $z \approx 2.33$

Συνεπώς $z_{0.01} \approx 2.33$

Από πίνακα έχουμε επίσης ότι: $z_{0.05} \approx 1.645$, $z_{0.1} \approx 1.28$

Πρόταση: Αν η τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Απόδειξη: Έστω $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Η συνάρτηση κατανομής της Y :

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq y\right) = P(X \leq \mu + \sigma y) = F_X(\mu + \sigma y),$$

όπου F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της X

Παραγωγίζοντας ως προς y έχουμε:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) = \sigma f_X(\mu + \sigma y) = \sigma \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu + \sigma y - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \\ &= \varphi(y) \end{aligned}$$

συνάρτηση πυκνότητας της Y

συνάρτηση πυκνότητας της X

συνάρτηση πυκνότητας της Y

Επομένως: $Y \sim N(0, 1)$

$N(0, 1)$

Σημείωση: Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq \beta) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \quad a \leq \beta. \end{aligned}$$

$$P(X \leq \beta) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} P(X > a) &= 1 - P(X \leq a) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(-\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

π.χ. Έστω X = διάρκεια (σε ώρες) κόνους μίας γυναίκας

$$X \sim N(\mu = 270, \sigma^2 = 30^2)$$

$$\begin{aligned} &P(\text{να γεννηθεί ένα παιδί πριν την σύλληψη του 7^{ου} μήνα}) \\ &= P(X < 210) = P\left(\frac{X-270}{30} < \frac{210-270}{30}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \simeq 2\% \end{aligned}$$

όπου $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

$$\begin{aligned} P(240 < X < 270) &= P\left(\frac{240-270}{30} < \frac{X-270}{30} < \frac{270-270}{30}\right) \\ &= P(-1 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1)] \\ &= 0.5 - 1 + 0.8413 = 0.3413 \simeq 34\% \end{aligned}$$

$$\Phi(0) = 0.5$$

$$\Phi(1) = 0.8413$$

Σημείωση: Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Τότε:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 68\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(-2 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 95\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-3 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \approx 99.7\%$$

Από την τρίτη από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι, αν $\mu > 3\sigma$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ για τυχαίες μεταβλητές X που από την φύση τους παίρνουν μόνον θετικές τιμές, όπως χρόνος ζωής, εμβαδά, όγκοι, χρονικές διάρκειες συγκριμένων φαινομένων κλπ.

π.χ. Έστω X = χρόνος ζωής (σε min) ενός φωτογραφικού φιλμ.
Υποθέτουμε ότι $X \sim N(30, 1.2^2)$

$$\begin{aligned} \alpha) P(X > 33) &= 1 - P(X \leq 33) = 1 - P\left(\frac{X - 30}{1.2} \leq \frac{33 - 30}{1.2}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062 \approx 0.6\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) P(X \leq 28) &= P\left(\frac{X - 30}{1.2} \leq \frac{28 - 30}{1.2}\right) = \Phi(-1.67) = 1 - \Phi(1.67) \\ &= 0.0475 \approx 5\% \end{aligned}$$

γ) Να βρεθεί η πιθανότητα σε 10 φιλμ τουλάχιστον τα 2 να εμφανιστούν σε χρόνο λιγότερο των 28 min.

Y = # φιλμ από τα 10 με χρόνο εμφάνισης λιγότερο από 28 min

$$Y \sim b(n=10, p=P(X \leq 28) = 0.05)$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$$

$$\approx 1 - \binom{10}{0} 0.05^0 \cdot 0.95^{10} - \binom{10}{1} 0.05^1 \cdot 0.95^9 \approx 0.086$$

πχ. Έστω X = όγκος του αναψυκτικού (σε lt) που τοποθετεί
μία αυτόματη μηχανή σε μηχανάκι σε 1.5 lt (101)

$$X \sim N(\mu, 0.01^2)$$

Ποιά πρέπει να είναι η τιμή των μ ώστε μόνο ^{στο} 1% των
περιπτώσεων η ποσότητα που τοποθετείται να υπερβαίνει τα 1.6 lt;

Απάντηση: Πρέπει $P(X > 1.6) = 0.001$

$$1 - P(X \leq 1.6) = 0.001$$

$$P(X \leq 1.6) = 0.999$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{1.6 - \mu}{\sigma}\right) = 0.999$$

$$P\left(\frac{X - \mu}{0.01} \leq \frac{1.6 - \mu}{0.01}\right) = 0.999$$

$$\Phi\left(\frac{1.6 - \mu}{0.01}\right) = 0.999$$

Απο πίνακα βρήκαμε ότι $\Phi(3.09) = 0.999$

Συγγραψ: $\frac{1.6 - \mu}{0.01} = 3.09 \Rightarrow \mu = 1.591$

Σημείωση: Αν $X \sim b(n, p)$ τότε για μεγάλες

τιμές του n κατά προσέγγιση ισχύει ότι:

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim N(0, 1)$$

Οπότε :

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

† πιο πάνω προσέγγιση μπορεί να βελτιωθεί (διόρθωση συντεχνίας):

$$P(i \leq X \leq j) \approx \Phi\left(\frac{j + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{i - 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$i < j$ ακέραιοι αριθμοί

πχ. Το ποσοστό θνησιμότητας για άτομα που προσβάλλονται από μια ασθένεια είναι 20%. Ποιά είναι η πιθανότητα σε 100 άτομα που έχουν προσβληθεί από την ασθένεια να έχουμε τουλάχιστον 26 θανάτους;

Απάντηση: Έστω $X = \#$ θανάτων στα 100 προσβληθέντα άτομα

$$X \sim b(n=100, p=0.2)$$

$$P(X=k) = \binom{100}{k} 0.2^k * 0.8^{100-k}, \quad k=0, \dots, 100$$

$$P(X \geq 26) = \sum_{k=26}^{100} \binom{100}{k} 0.2^k * 0.8^{100-k} = 0.0875 \quad \text{"δύσκολος υπολογισμός"}$$

Το $n=100$ είναι αρκετά μεγάλο, οπότε

$$P(X \geq 26) \approx P\left(Z \geq \frac{(26 - 0.5) - 100 * 0.2}{\sqrt{100 * 0.2 * 0.8}}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.375) = 1 - \Phi(1.375) = 1 - 0.9154 = 0.0845$$

"διόρθωση συντεχνίας"

$Z \sim N(0,1)$
(διαφέρει ελάχιστα από την ακριβή τιμή)

Η πιο πάνω πιθανότητα χωρίς την διόρθωση συνέχειας είναι κατά προσέγγιση ίση με:

$$P(Z \geq \frac{26 - 100 \times 0.2}{\sqrt{100 \times 0.2 \times 0.8}}) = P(Z \geq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 0.0668$$

Σημείωση: Έστω τ.μ. $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$. Για μεγάλες τιμές του $\lambda > 0$ προσεγγίζεται από την $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu = E(X) = \lambda$ και $\sigma^2 = V(X) = \lambda$. Οπότε:

$$P(a < X < b) \simeq \Phi\left(\frac{b-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad a \leq b.$$

Χρησιμοποιώντας Διόρθωση συνέχειας:

$$P(i \leq X \leq j) \simeq \Phi\left(\frac{j+0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{i-0.5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

$i \leq j$ δύο μη αρνητικοί ακέραιοι.

Εκθετική Κατανομή

Ορισμός: Λέμε ότι η συνεχής τ.μ. X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$ αν έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Συμβολισμός: $X \sim E(\lambda)$

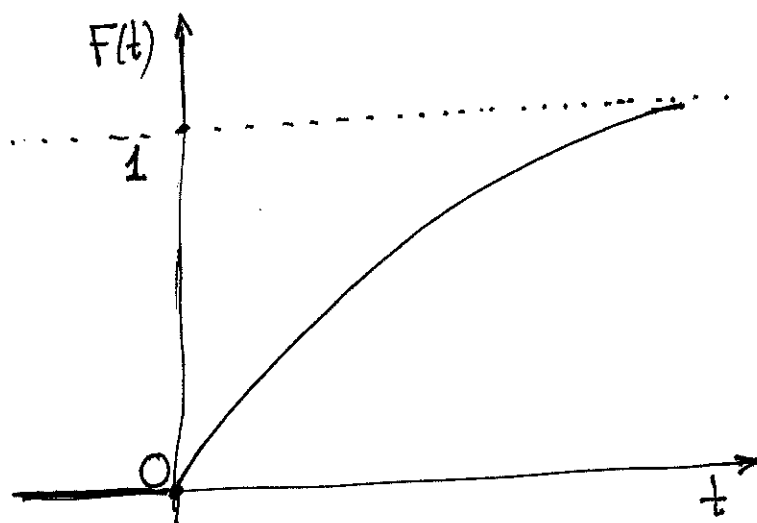
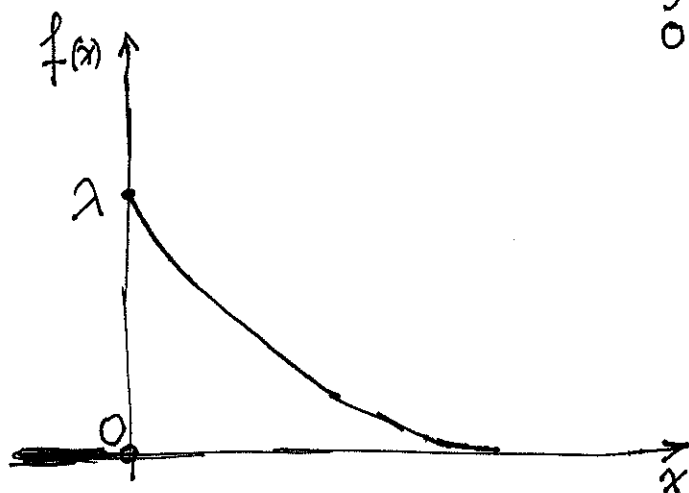
Προφανώς: $f(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση κατανομής της X έχει τύπο:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx, & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$$



Παραδείγματα τ.μ. που ακολουθούν την εκθετική κατανομή:

Χρόνος άφιξης του επόμενου πελάτη

Χρόνος που παρεμβάλλεται μεταξύ δύο ατυχημάτων
σ' ένα σημείο στην εθνική οδό

Πρόταση: Αν $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$, τότε

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{και} \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Απόδειξη: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x f(x) dx + \int_0^{+\infty} x f(x) dx$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x (e^{-\lambda x})' dx = [-x e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= -0 - (-0) + \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{\infty} x^2 (e^{-\lambda x})' dx = [-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x e^{-\lambda x} dx$$

$$= -0 - (-0) + 2 \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

πχ. Έστω X = χρόνος ζωής μιας συσκευής. Υποθέτουμε ότι $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$

- α) (i) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο χρόνος ζωής να υπερβεί τον μέσο χρόνο ζωής της.

Απάντηση: $P(X > E(X)) = P(X > \frac{1}{\lambda}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{\lambda}) = 1 - F(\frac{1}{\lambda})$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}}) = e^{-1} \approx 0.3679 \approx 37\%$$

- (ii) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο χρόνος ζωής να υπερβεί το διπλάσιο του μέσου χρόνου ζωής της.

Απάντηση: $P(X > 2E(X)) = P(X > \frac{2}{\lambda}) = 1 - P(X \leq \frac{2}{\lambda}) = 1 - F(\frac{2}{\lambda})$

$$= 1 - (1 - e^{-\lambda \frac{2}{\lambda}}) = e^{-2} \approx 0.1353 \approx 14\%$$

β) Να βρεθεί ο χρόνος εκείνος τον οποίο υπερβαίνουν τα 95% των παραγόμενων συσκευών.

Απάντηση: Ζητάμε $x_0 > 0$ με την ιδιότητα

$$P(X > x_0) = 0.95$$

Η πιο πάνω σχέση ισοδυναμεί με

$$1 - P(X \leq x_0) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow 1 - F(x_0) = 0.95$$

Γνωρίζουμε ότι: $F(x_0) = 1 - e^{-\lambda x_0}$

Οπότε: $e^{-\lambda x_0} = 0.95 \Rightarrow -\lambda x_0 = \ln(0.95)$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\lambda} \ln(0.95) \approx \frac{0.05}{\lambda}$$

Πρόταση: Αν $X \sim E(\lambda), \lambda > 0$ τότε

$$P(X > s+t | X > s) = P(X > t) \quad \text{"ιδιότητα έλλογης μνήμης"}$$

Απόδειξη: $P(X > s+t | X > s) = \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)}$

$$= \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

π.χ. Έστω $X =$ χρόνος (σε min) μεταξύ δύο διαδοχικών εκπομπών σωματιδίων από μια ραδιονεφρίνη. $X \sim E(\lambda = \frac{1}{60})$

a) $P(X > 45) = 1 - P(X \leq 45) = 1 - F(45) = 1 - (1 - e^{-45/60}) = e^{-3/4} \approx 47\%$

b) $P(X > 45+45 | X > 45) = P(X > 45) = e^{-3/4}$