

Θεωρία κατανομών

Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών

Ι. Μονοδιάστατη περίπτωση

Πρόβλημα: Γνωρίζουμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X , έστω $f_X(x)$ ή $P_X(x)$ και χρειαζόμαστε την κατανομή μιας συνάρτησης $Y = g(X)$ της X , δηλαδή την $f_Y(y)$ ή $P_Y(y)$.

1^η Μέθοδος: Μέθοδος Συνάρτησης Πιθανότητας

Κατάλληλη μόνο για διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

π.χ. έστω η $X \sim \text{Geo}(p)$, όπου η X : μετρά τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι την 1^η επιτυχία. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$p(x) = P(X = x) = q^x p, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Έστω Y : αριθμός συνολικών προσπαθειών μέχρι την 1^η επιτυχία τότε

$$Y = X + 1, \quad Y = g(X), \quad g(X) = X + 1$$

Δυνατές τιμές της Y :

Αφού $x = 0, 1, 2, \dots$ και $y = x + 1$ θα συνεπάγεται $\Rightarrow y = 1, 2, \dots$

Συνάρτηση πιθανότητας της Y :

$$P(Y = y) = P(X + 1 = y) = P(X = y - 1) = q^{y-1} p \Rightarrow p_Y(y) = q^{y-1} p$$

Άρα συνολικά: $P_Y(y) = q^{y-1} p, \quad y = 1, 2, \dots$

Γενικά: Για μία αμφιμονοσήμαντη ("1-1") συνάρτηση $g(\cdot)$, η σ.π. της $Y = g(X)$ δίνεται από τη σχέση

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y))$$

και οι δυνατές τιμές της Y είναι το σύνολο $B = g^{-1}(A)$, όπου A είναι το σύνολο των δυνατών τιμών της X .

Παράδειγμα 1: Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x = 2,8 \\ \frac{2}{6}, & x = 4,6 \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. $\frac{X}{2}$.

Λύση:

$$Y = \frac{X}{2}, \quad y = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y$$

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P\left(\frac{X}{2} = y\right) = P(X = 2y) = P_X(2y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 2y = 2,8 \\ \frac{2}{6}, & 2y = 4,6 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{6}, & y = 1,4 \\ \frac{2}{6}, & y = 2,3 \end{cases}$$

Η Y παίρνει τιμές 1,2,3,4.

Παράδειγμα 2 (παράδειγμα βιβλίου): Έστω X τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{64}{85} \left(\frac{1}{4}\right)^x, & x = 0,1,2,3 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να βρεθεί η κατανομή της $Y = 2X + 3$.

Λύση:

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(2X + 3 = y) = P\left(X = \frac{y-3}{2}\right) = P_X\left(\frac{y-3}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{64}{85} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{y-3}{2}}, & \text{αν } \frac{y-3}{2} = 0,1,2,3 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{64}{85} \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^{y-3}, & y-3 = 0,2,4,6 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{64}{85} \left(\frac{1}{2}\right)^y \cdot 8, & y = 3, 5, 7, 9 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \begin{cases} \frac{512}{85} \left(\frac{1}{2}\right)^y, & y = 3, 5, 7, 9 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Όταν ο μετασχηματισμός δεν είναι αμφιμονοσήμαντος, δηλ. η συνάρτηση g δεν είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε η πιθανότητα κάθε δυνατής τιμής y της Y , προκύπτει από άθροισμα όλων των πιθανοτήτων για τα διάφορα x που δίνουν το ίδιο y βάση του μετασχηματισμού κάνοντας χρήση της:

$$P(Y \in A) = \sum_{\{x: g(x) \in A\}} P(X = x)$$

Παράδειγμα 3: Έστω η τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας:

$$P_X(X = \sqrt{3}) = P_X(X = -\sqrt{3}) = \frac{1}{6} \text{ και } P_X(X = 0) = \frac{2}{3}$$

Να βρεθεί η κατανομή της $Y = X^2$.

Λύση: Η $Y = X^2$ παίρνει τιμές : 0, 3 (2 τιμές αντί 3 της αρχικής X) και

$$P_Y(0) = P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{2}{3} \text{ (μόνο για } X=0 \text{ γίνεται } Y=0).$$

$$P_Y(3) = P(Y = 3) = P(X = \sqrt{3} \text{ ή } X = -\sqrt{3}) \text{ με 2 δυνατούς τρόπους έχουμε } Y=3$$

$$= P(X = \sqrt{3}) + P(X = -\sqrt{3}) = \sum_{\{x: g(x)=3\}} P_X(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } P_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & y = 0 \\ \frac{1}{3}, & y = 3 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Γενικότερα συνοψίζοντας την 1^η μέθοδο θα έχουμε:

$$p_Y(y) = \sum_{\{x: g(x)=y\}} p_X(x)$$

Παράδειγμα 4: Έστω ότι η $X \sim Po(\lambda^2)$

$$p(x) = e^{-\lambda^2} \frac{\lambda^{2x}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Να βρεθεί η κατανομή της $Y = \sqrt{X}$.

Λύση: Η $Y = \sqrt{X}$ είναι αμφιμονοσήμαντη $\Rightarrow X = Y^2$

Οι τιμές της Y είναι $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(\sqrt{X} = y) = P(X = y^2) = P_X(y^2) = e^{-\lambda^2} \frac{\lambda^{2y^2}}{(y^2)!}, \quad y = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$$

Παράδειγμα 5: Έστω η X με σ.π. $P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x = 0, 1, 2, \dots, 9 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = (X - 2)^2$

Λύση: Η Y παίρνει τιμές: $y = (-2)^2, (-1)^2, 0, 1^2, \dots \Rightarrow y = 0, 1, 4, 9, 16, \dots, 49$

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{10}$$

$$P(Y = 1) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{2}{10}$$

$$P(Y = 4) = P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{2}{10}$$

$$P(Y = y) = \frac{1}{10} \quad \text{για } y = 9, 16, 25, \dots, 49$$

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας της Y :

$$P(Y = y) = \begin{cases} \frac{2}{10}, & y = 1, 4 \\ \frac{1}{10}, & y = 0, 9, 16, \dots, 49 \end{cases}$$

2^η Μέθοδος: Μέθοδος της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής

Η μέθοδος αυτή είναι αρκετά γενική, έχει εφαρμογή και στη συνεχή και στη διακριτή περίπτωση της X και για κάθε τύπο συνάρτησης $g(\cdot)$ (δηλ. αμφιμονοσήμαντη ή όχι).

Η μέθοδος έγκειται στον προσδιορισμό αρχικά της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της νέας μεταβλητής $Y=g(X)$ και στη συνέχεια την εύρεση της $f(y)$ ή $p(y)$ με παραγωγή ή διαφορά αντίστοιχα.

Ο προσδιορισμός της $F(y)$ γίνεται με τον ορισμό, αναγωγή δηλαδή σε πιθανότητα και η πιθανότητα στη συνέχεια υπολογίζεται με τη βοήθεια της κατανομής της X , βάση ολοκληρώματος ή αθροίσματος ανάλογα με το αν είναι συνεχής ή διακριτή.

Η μέθοδος είναι γενική, αλλά η υλοποίησή της μπορεί να ποικίλει σε βαθμό δυσκολίας ανάλογα με την μορφή της $g(\cdot)$ και την κατανομή της αρχικής τυχαιάς μεταβλητής X .

Παράδειγμα 1: Έστω $X \sim E(1)$ (εκθετική κατανομή). Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = 1 - e^{-X}$.

Λύση:

Οι δυνατές τιμές της τ.μ. Y είναι: $0 < Y < 1$ δηλαδή το σύνολο $(0,1)$, γιατί $0 < x < \infty$ ή $-\infty < -x < 0$ ή $0 < e^{-x} < 1$ ή $0 < 1 - e^{-x} < 1$.

Η αρχική πυκνότητα είναι:

$$f_x(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ της νέας τυχαιάς μεταβλητής.

Για $0 < y < 1$ έχω ότι:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(1 - e^{-X} \leq y) = P(e^{-X} \geq 1 - y) = P(X \leq -\log(1 - y)) = \\ &= \int_0^{-\log(1-y)} e^{-x} dx = 1 - e^{\log(1-y)} = 1 - (1 - y) = y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y \sim U(0,1)$$

Το παραπάνω είναι γενικότερο αποτέλεσμα (όχι μόνο για εκθετική) και αποδεικνύει ότι ο μετασχηματισμός μιας τυχαίας μεταβλητής που ταυτίζεται με την αθροιστική συνάρτηση ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή (πάντα) με παραμέτρους 0 και 1.

Παράδειγμα 2: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = xe^{-x^2/2}, x > 0$. Να βρεθεί η κατανομή της $Y = X^2$.

Λύση:

Καταρχάς $Y > 0$ λόγω του ορισμού του.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(0 < X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/2} dx$$

Με αλλαγή μεταβλητών ($x^2 = z$) το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται και ισούται με $1 - e^{-y/2}$.

$$\text{Άρα τελικά } F(y) = 1 - e^{-y/2} \text{ δηλ. } f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{2} e^{-y/2}, \text{ για } y > 0$$

Η τελευταία είναι μία εκθετική με παράμετρο $1/2$.

Παράδειγμα 3: Έστω $X \sim N(0,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $-\infty < x < +\infty$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = X^2$.

(Θα πρέπει να προκύψει το γνωστό αποτέλεσμα ότι είναι μία Χι- τετράγωνο με 1 βαθμό ελευθερίας ή διαφορετικά Γαμμα με παραμέτρους $(1/2, 2)$)

Λύση: Οι δυνατές τιμές της Y είναι $[0, +\infty)$.

Υπολογίζουμε την συνάρτηση κατανομής $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$, $y < 0$.

Έστω $y \geq 0$ τότε:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = \\ &= P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_Y(y) &= \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, & y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{\sqrt{y}}, & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{1}{2}y}, & y > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases} \\
&\stackrel{\sqrt{\pi}=\Gamma(\frac{1}{2})}{=} \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}) 2^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\right)
\end{aligned}$$

Δηλαδή η Y ακολουθεί τη Γάμμα κατανομή με παραμέτρους:
 $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = 2$.

Β' τρόπος για το ολοκλήρωμα: Με κανόνα Leibnitz.

Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad \text{ή} \\
f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \left[\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} (\sqrt{y})' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-\sqrt{y})^2} (-\sqrt{y})' = \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}y} \quad \text{που ταυτίζεται με το προηγούμενο.}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4: Έστω $X \sim B(\alpha, \beta)$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = -\ln X$.

Λύση:

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0, 1)$$

$$Y = g(X) = -\ln X$$

Η Y έχει δυνατές τιμές στο $[0, +\infty)$ διότι $\ln x < 0$.

$$F(y) = P(Y \leq y) = P(-\ln X \leq y) = P(\ln(X) \geq -y) = P(X \geq e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^1 \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Με κανόνα του Leibnitz (παραγωγίζοντας τις δύο ακραίες σχέσεις παραπάνω) έχουμε:

$$f_Y(y) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} e^{-ya} (1 - e^{-y})^{\beta-1}, \quad y > 0.$$

3^η Μέθοδος: Μέθοδος Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας.

Είναι η αντίστοιχη με την μέθοδο της συνάρτησης πιθανότητας για τη συνεχή περίπτωση τ.μ.

Έστω $Y = g(X)$ ο μετασχηματισμός και X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Αν αρχικά υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $y=g(x)$ είναι **αμφιμονοσήμαντη** θα έχουμε σαν συνέπεια ότι:

η $g_X(x)$ θα είναι συνεχώς αύξουσα ή συνεχώς φθίνουσα συνάρτηση.

Προφανώς και η αντίστροφη συνάρτηση g^{-1} είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη.

i) Αν $g_X(x)$ αύξουσα τότε

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} P(Y \leq y) = \frac{d}{dy} P(g(X) \leq y) = \frac{d}{dy} P(X \leq g^{-1}(y))$$

Η ανισότητα έχει την ίδια φορά επειδή g αύξουσα

$$= \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} (g^{-1}(y)) \quad \text{και} \quad \frac{d}{dy} (g^{-1}(y)) > 0$$

ii) Αν $g_X(x)$ φθίνουσα τότε

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} P(Y \leq y) = \frac{d}{dy} P(g(X) \leq y) = \frac{d}{dy} P(X \geq g^{-1}(y))$$

Η ανισότητα αλλάζει φορά επειδή g φθίνουσα

$$= \frac{d}{dy} (1 - F_X(g^{-1}(y))) = -f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{d}{dy} (g^{-1}(y)) \quad , \quad \text{αλλά} \quad \frac{d}{dy} (g^{-1}(y)) < 0$$

αφού g φθίνουσα.

Οι δυνατές τιμές της τ.μ. Y θα είναι και τις δύο φορές $B = g^{-1}(A)$, όπου A οι δυνατές τιμές της X .

Συνολικά και οι δύο περιπτώσεις μας δίνουν:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|, \quad y \in B$$

Παρατηρήσεις

1. Ο τύπος ισχύει μόνο για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.
2. Ο τύπος όπως δίνεται παραπάνω ισχύει μόνο για αμφιμονοσήμαντους μετασχηματισμούς δηλαδή $\frac{dy}{dx}$ ή $\frac{dx}{dy} \neq 0$ (δηλαδή να είναι αντιστρέψιμος ο μετασχηματισμός, μόνιμα αύξουσα ή μόνιμα φθίνουσα η g κι όχι σταθερή σε κάποιο διάστημα).

Παράδειγμα 1: Έστω ότι η $X \sim E(\theta)$ (εκθετική κατανομή)

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0, \quad \theta > 0.$$

Να βρεθεί η κατανομή της $Y = \frac{X}{\theta}$.

Λύση:

Ο μετασχηματισμός: $y = \frac{x}{\theta}$

Λύνουμε ως προς x, δηλ. $x = y\theta$

Παραγωγίζουμε. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}$

Η παράγωγος είναι διάφορη του μηδενός άρα είναι “1-1” ο μετασχηματισμός.

Δυνατές τιμές της Y: $x > 0$ και $y = x/\theta$ με θ επίσης θετικό (ως παράμετρος μιας εκθετικής), άρα y επίσης θετικό.

Συνολικά

$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} y \theta} \left| \frac{d}{dy}(\theta y) \right| = \frac{1}{\theta} e^{-y} \theta \Rightarrow f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0 \quad \text{άρα} \quad Y \sim \text{Eκ}\theta(1)$$

Παράδειγμα 2: Έστω ότι η $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Να βρεθεί η κατανομή της $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Λύση:

Η $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ είναι αμφιμονοσήμαντη $\Rightarrow X = \sigma Y + \mu$

Επίσης οι δυνατές τιμές της Y είναι όλο το R γιατί το x ανήκει στο R και η σχέση είναι γραμμική.

Για τον τύπο της πυκνότητας θα έχουμε:

$$f_Y(y) = f_X(\sigma Y + \mu) \frac{d}{dY}(\sigma Y + \mu) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sigma Y + \mu - \mu)^2} \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

$y > 0$ άρα η Y ακολουθεί την $N(0,1)$

Παράδειγμα 3 : Έστω $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = X^2$.

Λύση:

Επειδή $x > 0$ ο μετασχηματισμός είναι “1-1” κι επίσης $y > 0$.

$$Y = g(X) = X^2,$$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow_{x>0} x = \sqrt{y} \Rightarrow x = y^{\frac{1}{2}},$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}},$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d(g^{-1}(y))}{dy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}},$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a} y^{\frac{1}{2}(a-1)} e^{-\sqrt{y}/\beta} \left| \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \right|, \quad y > 0 \quad \text{ή}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\Gamma(a)\beta^a} y^{\frac{1}{2}(a-2)} e^{-\sqrt{y}/\beta}, \quad y > 0$$

Άσκηση 4: Έστω $X \sim f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \frac{1}{X}$.

Λύση:

$$Y = g(X) = \frac{1}{X}$$

$$g(x) = y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2} \neq 0$$

Οι δυνατές τιμές της Y είναι $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})} \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad (\text{ισόνομη με την } f_X(x))$$

Άσκηση 5: Έστω $X \sim f(x) = 12x^2(1-x)$, $0 < x < 1$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \frac{1}{X}$.

Λύση:

$$g(x) = y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2} \neq 0,$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < 1 \Rightarrow y > 1$$

Οι δυνατές τιμές της Y είναι $(1, +\infty)$.

$$f_Y(y) = 12 \frac{1}{y^2} \left(1 - \frac{1}{y}\right) \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y^4} \left(1 - \frac{1}{y}\right) = y^{-5}(y-1), \quad y > 1$$

Άσκηση 6: Έστω $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, ανεξάρτητες.

Να δείξω ότι η $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Λύση:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

Άρα από την εφαρμογή της προηγούμενης άσκησης προκύπτει ότι:

$$X \sim N\left(\sum \frac{1}{n} \mu, \sum \frac{1}{n^2} \sigma^2\right) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Άσκηση 7

Έστω $X \sim f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \frac{X}{1+X}$.

Λύση:

Έστω: $x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$ (α)

$$y = \frac{x}{x+1} \Rightarrow (x+1)y = x \Rightarrow xy - x = -y \Rightarrow x(1-y) = -y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

$$\frac{y}{y+1} \geq 0 \Rightarrow y(1-y) \geq 0 \Rightarrow 1-y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1 \quad (\beta)$$

Από (α), (β) έχω: $0 \leq y \leq 1$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \frac{1-y-y(-1)}{(1-y)^2} = \frac{1}{(1-y)^2} \neq 0$$

$$f_Y(y) = e^{-\frac{y}{1-y}} \left| \frac{1}{(1-y)^2} \right| = e^{-\frac{y}{1-y}} \frac{1}{(1-y)^2}, \quad y \in (0,1).$$

Άσκηση 8

Αν X τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{x^2}{9}$, $x \in (0,3)$.

Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y = X^3$.

Λύση:

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < 3 \\ y > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < y < 27$$

$$g^{-1}(y) = x = y^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{3}}}{dy} = \frac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f_Y(y) = \frac{y^{(\frac{1}{3})^2}}{9} \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}, \quad 0 < y < 27 \Rightarrow Y \sim U(0,27)$$

Άσκηση 9 Έστω $X \sim U(0,1)$. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \frac{1}{X}$.

Λύση:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$0 < \frac{1}{y} < 1 \stackrel{y>0}{\Rightarrow} y > 1$$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{d\frac{1}{y}}{dy} = -\frac{1}{y^2}$$

$$f_X(x) = 1, \quad x \in (0,1)$$

$$f_Y(y) = 1 \cdot \left| -\frac{1}{y^2} \right| = \frac{1}{y^2}, \quad y \geq 1$$

Άσκηση 10 Έστω $X \sim U(0,1)$. Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y=3X+1$.

Λύση:

$$y = 3x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}$$

$$0 < \frac{y-1}{3} < 1 \Rightarrow 0 < y-1 < 3 \Rightarrow 1 < y < 4$$

$$\frac{dx}{dy} = \left(\frac{y-1}{3}\right)' = \frac{1}{3} \neq 0$$

$$f_Y(y) = 1 \cdot \frac{1}{3}, \quad y \in (1,4) \Rightarrow Y \sim U(1,4)$$

Άσκηση 11

Έστω X μία τυχαία μεταβολή που κατανέμεται σύμφωνα με την $f(x) = 2^x \cdot \log 2$, $0 < x < 1$. Τι κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή $Y = 2^X$;

Λύση

$$\text{Ισχύει: } y = 2^x \text{ ή } x \log 2 = \log y \quad (y > 0) \text{ ή } x = \log y / \log 2$$

$$\text{Άρα } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y \log 2} \quad (\neq 0) \text{ και}$$

$$0 < x < 1 \text{ συνεπάγεται } 2^0 < 2^x < 2^1 \text{ ή } 1 < y < 2$$

Συνολικά

$$f_Y(y) = y \cdot \log 2 \left| \frac{1}{y \log 2} \right|, \quad 1 < y < 2 \text{ ή } f_Y(y) = 1, \quad 1 < y < 2 \text{ δηλ Uniform}(1, 2)$$

Αποδείξτε την γενικότερη άσκηση ότι αν $f(x) = \frac{\theta^x \cdot \log \theta}{\theta - 1}$, $0 < x < 1$, είναι η πυκνότητα μιας κατανομής με παράμετρο $\theta > 1$, τότε ο μετασχηματισμός $Y = \theta^X$ κατανέμεται με την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(1, \theta)$.

Επέκταση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών και στις περιπτώσεις που ο μετασχηματισμός είναι “κομματιαστά αμφιμονοσήμαντος”

Το θεώρημα που έχει αποδειχθεί για αμφιμονοσήμαντους μετασχηματισμούς ισχύει και στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός αλλάζει μονοτονία στο εσωτερικό του S (στήριγμα της αρχικής τ.μ.) αλλά το σύνολο των σημείων στα οποία αλλάζει η μονοτονία είναι πεπερασμένο.

Οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι αμφιμονοσήμαντοι, δηλ. η συνάρτηση είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια μονότονη, για διαδοχικά διαστήματα του πεδίου ορισμού και λέγονται κομματιαστά αμφιμονοσήμαντοι:

Για τους παραπάνω μετασχηματισμούς ισχύει το παρακάτω θεώρημα (χωρίς απόδειξη)

Θεώρημα: Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$ και ένας μετασχηματισμός $y = g(x)$. Θέτουμε $S = \{x : f_X(x) > 0\}$ (στήριγμα της X) και $T = \{y : y = g(x), x \in S\}$.

Υποθέτουμε ότι:

(i) υπάρχει μία διαμέριση $S_1, S_2, \dots, S_k$ του S (S_i ξένα μεταξύ τους και $\cup S_i = S$) τέτοια ώστε για κάθε S_i η $h(x)$ να είναι "1-1" από το $S_i \rightarrow T$. Έστω $y = g(x)$ ο περιορισμός της συνάρτησης h στο S_i και $T_i = \{y : y = g(x), x \in S_i\}$. Ισχύει $T = \cup_{i=1}^k T_i$ (T_i όχι κατά ανάγκη ξένα).

(ii) $\forall i$ η αντίστροφη $y = g^{-1}(x)$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι συνεχής και μη μηδενική $\forall y \in T_i$. Τότε η $Y = g(X)$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_i f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|, & y \in \cup T_i \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου το άθροισμα είναι για εκείνα τα i για τα οποία $h_i(x) = y$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Παρατήρηση

1. Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει σαν αποτέλεσμα ότι ο τύπος της αλλαγής μεταβλητών ισχύει και όταν $\frac{dx}{dy} = 0$ σε εσωτερικό σημείο του A , αρκεί να είναι πεπερασμένα σε πλήθος.
2. Αν $\frac{dx}{dy} = 0$ για άπειρα σημεία ή διάστημα, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή για το αντίστοιχο διάστημα και το παραπάνω θεώρημα δεν ισχύει.

3. Ο προσδιορισμός των S_i προκύπτει από το σύνολο S και από τα σημεία για τα οποία $\frac{dx}{dy}=0$. πχ. Αν $S = \mathbb{R}$ και

Άσκηση 1: (1-διάσταση, κομματιαστά "1-1")

Έστω $X \sim N(0,1)$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = X^2$.

Λύση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}, \quad y > 0$$

$$1\eta \text{ περίπτωση: } x = \sqrt{y}, \quad x > 0 \text{ και } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

$$2\eta \text{ περίπτωση: } x = -\sqrt{y}, \quad x < 0 \text{ και } \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f(\sqrt{y}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + f(-\sqrt{y}) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}(2)^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y}, \quad y > 0 \Rightarrow Y \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ δηλαδή } X_1^2. \end{aligned}$$

Άσκηση 2: Έστω $X \sim U(0, \pi)$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $Y = \sin X$

Λύση:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}, \quad x \in (0, \pi)$$

Οι δυνατές τιμές της Y είναι $(0,1)$.

$$\text{Αν } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos x > 0 (S_1).$$

$$\text{Αν } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos x < 0 (S_2).$$

$$\sin(x) = \sin(-x) = y$$

$$y = \sin x \begin{cases} x = \arcsin y (S_1), & \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ x = -\arcsin y (S_2), & \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right| + \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in (0,1)$$

Είναι όντως πυκνότητα διότι όπως θα δούμε παρακάτω $\int f(y)dy = 1$.

$$\int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} dy, \quad \text{θέτω } t = 1 - y^2 \Rightarrow y = 1 - t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}}$$

$$\int_0^1 \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} dy = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{2\sqrt{1-t}} dt = \frac{2}{2\pi} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$$

2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Η μέθοδος Αλλαγής μεταβλητών επεκτείνεται σε >1 διαστάση για την αρχική τυχαία μεταβλητή X .

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα (χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα

Εάν (X_1, X_2) ένα δι-διάστατο τυχαίο διάνυσμα με από κοινού κατανομή $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in S \subset \mathbb{R}^2$ και $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$, $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ ένας 2×2 αντιστρέψιμος μετασχηματισμός, δηλ. υπάρχουν οι $X_1 = h_1(Y_1, Y_2)$, $X_2 = h_2(Y_1, Y_2)$, τότε:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)) \cdot |J|, (y_1, y_2) \in T,$$

όπου

J είναι η ιακωβιανή ορίζουσα του αντιστρόφου μετασχηματισμού, δηλ.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix} \text{ και}$$

$$T = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y_1 = g_1(x_1, x_2) \text{ και } y_2 = g_2(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in S\}$$

Παρατηρήσεις

1. Το παραπάνω θεώρημα είναι γενίκευση του αντίστοιχου για μία διάσταση και σ' αυτή την περίπτωση $\left| \frac{dx}{dy} \right| = |J|$.
2. Το θεώρημα ισχύει όταν οι συναρτήσεις g_1, g_2 είναι αντιστρέψιμες, δηλ. $J \neq 0$ για τα εσωτερικά σημεία του T .
3. Για να ισχύει το θεώρημα χρειάζεται επίσης οι πραγματικές συναρτήσεις $y_1 = g_1(x_1, x_2)$ και $y_2 = g_2(x_1, x_2)$ να έχουν συνεχείς πρώτης τάξης παραγώγους ως προς τα x_1, x_2 .

Παράδειγμα 1:

Να βρεθεί ο Ιακωβιανός πίνακας και η ορίζουσα του, υποθέτοντας τον παρακάτω μετασχηματισμό.

$$Y_1 = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = X_2$$

Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} (= h_1(y_1, y_2)) \\ (= h_2(y_1, y_2)) \end{array}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Άσκηση 1

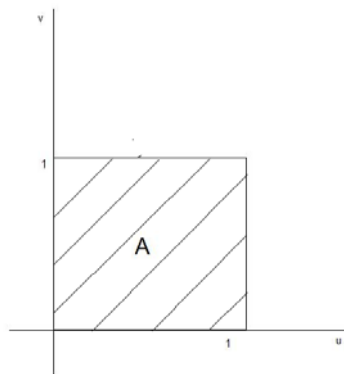
Έστω $f_{X,Y}(x,y) = 4xyI_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$. Δίνονται δύο καινούργιες τυχαίες μεταβλητές

$U = X^2$, $V = Y^2$. Να βρεθεί η από κοινού κατανομή των U, V .

Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ v = y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \sqrt{u} \\ y = \sqrt{v} \end{array} \Rightarrow (x, y > 0)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{uv}} \neq 0$$



$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$$

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = x^2, v = y^2, (x, y) \in S\}$$

$$= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sqrt{u} < 1, 0 < \sqrt{v} < 1\}$$

$$= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 1, 0 < v < 1\}$$

Τώρα έχουμε:

$$f_{U,V}(u,v) = 4\sqrt{u}\sqrt{v} \frac{1}{4\sqrt{uv}} = 1, \quad (u,v) \in T$$

Δηλαδή $(U, V) \sim U(A)$.

Άσκηση 2

Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες και ισόνομες (ακολουθούν εκθετική κατανομή με

$\lambda=1$). Έστω οι τ.μ. $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ και $Y_2 = X_1 + X_2$.

A) Να βρεθεί η κατανομή του (Y_1, Y_2)

B) Να βρεθούν οι κατανομές των Y_1, Y_2

Γ) Είναι οι Y_1, Y_2 ανεξάρτητες;

Λύση:

Αφού οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες έχουμε:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = e^{-x_1}e^{-x_2} = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2)}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$(X_1, X_2) \rightarrow (Y_1, Y_2): S \rightarrow T$$

$$S = \{(x_1, x_2): x_1 > 0, x_2 > 0\}, \quad T = \left\{ (y_1, y_2): y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}, y_2 = x_1 + x_2, (x_1, x_2) \in S \right\}$$

$$\left. \begin{matrix} y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2} \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = y_1 y_2 \\ x_2 = y_2(1 - y_1) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y_1, y_2 > 0 \\ y_2(1 - y_1) > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < y_1 < 1 \\ y_2 > 0 \end{matrix}$$

Έχουμε :

$$T = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y_1 < 1, y_2 > 0\}, \quad J = y_2 \neq 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_2} y_2, & (y_1, y_2) \in T \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y_2} y_2 dy_2 = 1, \quad 0 < y_1 < 1 \Rightarrow Y_1 \sim U(0, 1)$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^1 e^{-y_2} y_2 dy_1 = e^{-y_2} y_2 \Big|_{y_1=0}^{y_1=1} = e^{-y_2} y_2, \quad y_2 > 0$$

Επειδή $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1) \cdot f_{Y_2}(y_2) \quad \forall (y_1, y_2) \in T$ συνεπάγεται πως οι τ.μ. Y_1, Y_2 είναι ανεξάρτητες.

Άσκηση 3

Δίνονται οι ανεξάρτητες τ.μ. X_1, X_2 με την ίδια κατανομή:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Δύο καινούργιες τυχαίες μεταβλητές:

$$U = X_1 + X_2, \quad V = \frac{X_1}{X_2}.$$

(i) Να βρεθεί η κατανομή του (U, V) .

(ii) Να βρεθούν οι κατανομές των τ.μ. U και V και να αναγνωριστούν εάν είναι δυνατό.

(iii) Είναι οι U, V ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Λύση:

Αφού X_1, X_2 ανεξάρτητες θα έχω:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 4e^{-2(x_1+x_2)}, & x_1, x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$U = X_1 + X_2, \quad V = \frac{X_1}{X_2}$$

$$u = x_1 + x_2 \Rightarrow u = vx_2 + x_2 \Rightarrow u = x_2(1+v) \Rightarrow x_2 = \frac{u}{1+v}$$

$$v = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow x_1 = vx_2 \Rightarrow x_1 = \frac{vu}{1+v}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(1+v)^2} \neq 0$$

$$T = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \frac{vu}{1+v} > 0, x_2 = \frac{u}{1+v} > 0, \quad u, v > 0 \right\} = \\ = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0 \right\}.$$

$$\text{Άρα έχουμε: } f_{U,V}(u, v) = 4e^{-2u} \frac{u}{(1+v)^2}, \quad u, v > 0$$

$$f_V(v) = \int_0^\infty \frac{4u}{(1+v)^2} e^{-2u} du = -\frac{2}{(1+v)^2} \int_0^\infty u de^{-2u} = -\frac{2}{(1+v)^2} ue^{-2u} \Big|_0^\infty + \\ + \frac{2}{(1+v)^2} \int_0^\infty e^{-2u} du = \frac{2}{(1+v)^2} \frac{(-1)}{2} e^{-2u} \Big|_0^\infty = \frac{1}{(1+v)^2} \Rightarrow f_V(v) = \frac{1}{(1+v)^2}, \quad v \in (0, \infty)$$

$$f_U(u) = \int_0^\infty \frac{4u}{(1+v)^2} e^{-2u} dv = 4ue^{-2u} \left(-\frac{1}{(1+v)} \right) \Big|_0^\infty = 4ue^{-2u}, \quad u > 0 \Rightarrow$$

$$U \sim \Gamma(2, \frac{1}{2})$$

$$f_U(u) \cdot f_V(v) = 4ue^{-2u} \frac{1}{(1+v)^2} = f_{U,V}(u, v)$$

Άρα U, V είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Άσκηση 4 Έστω (X, Y) τ.δ. με $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(i) Να βρεθούν οι κατανομές των $Z_1 = XY$ και $Z_2 = \frac{X}{Y}$

(ii) Να βρεθεί η $P(\frac{1}{4} < \frac{X}{Y} < 2)$

Λύση:

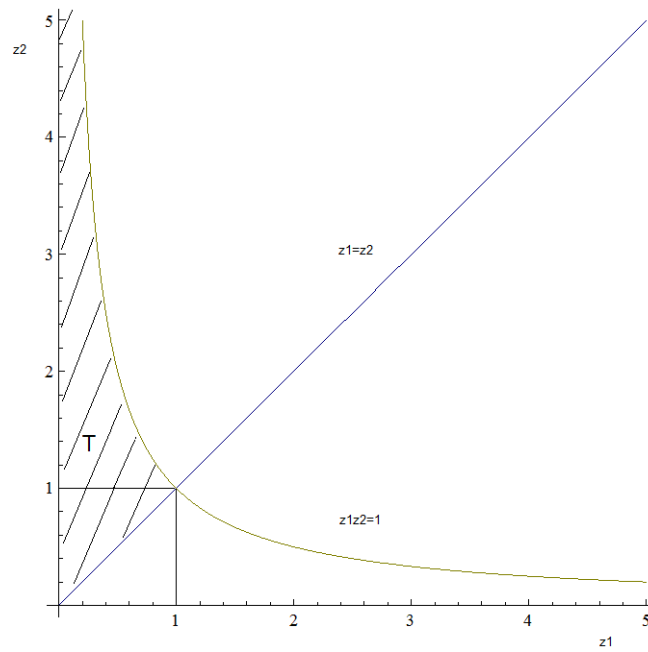
$$Z_1 = XY$$

$$Z_2 = \frac{X}{Y}$$

$$\left. \begin{matrix} z_1 = xy \\ z_2 = \frac{x}{y} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x = \sqrt{z_1 z_2} \\ y = \sqrt{\frac{x}{y}} \end{matrix} \Rightarrow J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z_1} & \frac{\partial x}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y}{\partial z_1} & \frac{\partial y}{\partial z_2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2z_2} \neq 0$$

$$\begin{aligned} T &= \left\{ (z_1, z_2) : z_1 = xy, z_2 = \frac{x}{y}, 0 < x < 1, 0 < y < 1 \right\} \\ &= \left\{ (z_1, z_2) : 0 < \sqrt{z_1 z_2} < 1, 0 < \sqrt{\frac{z_1}{z_2}} < 1, z_1, z_2 > 0 \right\} \end{aligned}$$

Διάγραμμα 1.1



$$f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2z_2}, \quad (z_1, z_2 \in T)$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} \int_0^{z_2} f(z_1, z_2) dz_1, & z_2 \in (0, 1) \\ \int_0^{\frac{1}{z_2}} f(z_1, z_2) dz_1, & z_2 \in (1, \infty) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & z_2 \in (0, 1) \\ \frac{1}{2z_2^2}, & z_2 \in (1, \infty) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{4} < \frac{X}{Y} < 2\right) = P\left(\frac{1}{4} < Z_2 < 2\right) = \int_{\frac{1}{4}}^1 f_{Z_2}(z_2) dz_2 + \int_1^2 f_{Z_2}(z_2) dz_2 =$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{2} dz_2 + \int_1^2 \frac{1}{2z_2^2} dz_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2z_2} \Big|_1^2 = \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

Άσκηση 5

Έστω ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Δύο καινούργιες τυχαίες μεταβλητές:

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = \frac{X_1}{X_2}.$$

Λύση:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x_1^{\alpha-1} e^{-\frac{x_1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x_2^{\alpha-1} e^{-\frac{x_2}{\beta}}, \quad x_1, x_2 > 0$$

$$\left. \begin{matrix} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = \frac{x_1}{x_2} \quad (y_2 > 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = y_1 - x_2 \\ y_2 = \frac{y_1 - x_2}{x_2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = y_1 - \frac{y_1}{y_2 + 1} \\ y_2 = \frac{y_1}{x_2} - 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = \frac{y_1 y_2 + y_1 - y_2}{y_2 + 1} \\ \frac{y_1}{x_2} = y_2 + 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_1 = \frac{y_1 y_2}{y_2 + 1} \\ x_2 = \frac{y_1}{y_2 + 1} \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{y_1 y_2}{y_2 + 1} > 0 \Rightarrow y_1 > 0$$

$$\frac{y_1}{y_2 + 1} > 0 \Rightarrow y_1 > 0$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{y_2}{y_2 + 1} & \frac{1}{y_2 + 1} \\ \frac{y_1(y_2 + 1) - y_1 y_2}{(y_2 + 1)^2} & -\frac{y_1}{(y_2 + 1)^2} \end{vmatrix} = -\frac{y_1 y_2}{(y_2 + 1)^3} - \frac{y_1}{(y_2 + 1)^3} = -\frac{y_1}{(y_2 + 1)^2} \neq 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2 \beta^{2\alpha}} \left(\frac{y_1 y_2}{y_2 + 1}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{y_1 y_2}{(y_2 + 1)\beta}} \left(\frac{y_1}{y_2 + 1}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{y_1}{(y_2 + 1)\beta}} \left| -\frac{y_1}{(y_2 + 1)^2} \right|, \quad y_1, y_2 > 0$$

$$= \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2 \beta^{2\alpha}} \left(\frac{y_1}{y_2 + 1}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y_2}{y_2 + 1}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{y_1}{\beta}} \frac{1}{y_1}, \quad y_1, y_2 > 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^2 \beta^{2\alpha}} \left(\frac{y_1}{y_2 + 1}\right)^{2\alpha} \left(\frac{y_2}{y_2 + 1}\right)^{\alpha-1} e^{-\frac{y_1}{\beta}} \frac{1}{y_1}, & y_1, y_2 > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άσκηση 6

Έστω ότι $(X_1, X_2) \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Δηλαδή η από κοινού κατανομή των (X_1, X_2) είναι:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $X_1^2 + X_2^2 = Y$.

Λύση:

Η συνάρτηση κατανομής της Y θα είναι:

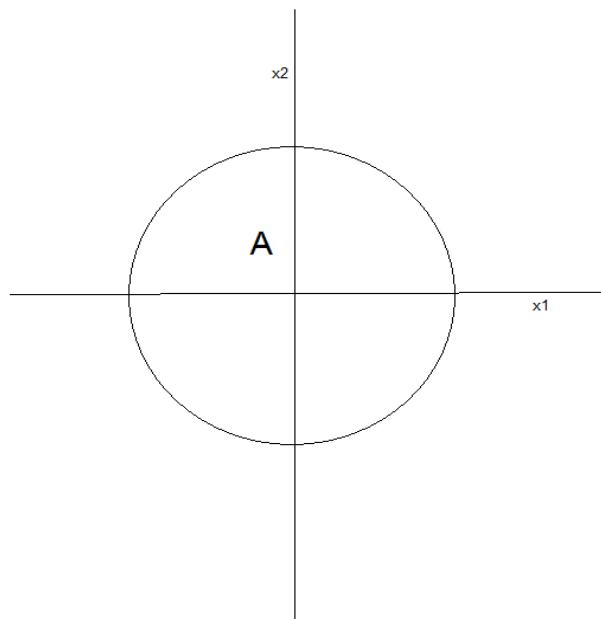
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1^2 + X_2^2 \leq y) = P((X_1, X_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq y\}) =$$

$$= \iint_{x_1^2 + x_2^2 \leq y} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_A \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)} dx_2 dx_1 \quad (1)$$

Όπου:

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq y\}$$

Διάγραμμα 1.3



Πολικές συντεταγμένες:

$$\left. \begin{matrix} x_1 = \rho \cos \theta \\ x_2 = \rho \sin \theta \end{matrix} \right\} \Rightarrow J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \rho} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho$$

$$A = \{(\rho, \theta) : 0 < \rho < \sqrt{y}, \quad 0 < \theta < 2\pi\}$$

$$(1) \Rightarrow \int_0^{\sqrt{y}} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho d\theta \right] d\rho = \int_0^{\sqrt{y}} 2\pi \frac{1}{2\pi} \rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = \int_0^{\sqrt{y}} \rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho =$$

$$= -e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \Big|_0^{\sqrt{y}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}y}$$

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\frac{1}{2}y}, \quad y \geq 0$$

Οπότε έχουμε:

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y}, \quad y \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Eκ}\theta\left(\frac{1}{2}\right)$$

Άσκηση 7

Έστω (X, Y) τ.δ. με $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

(i) Να βρεθεί η κατανομή της τμ $U = X + Y$

Λύση

Συμπληρώνουμε τον μετ/μό ώστε να είναι 2×2

Έστω $\begin{cases} U = X + Y \\ V = Y \end{cases}$ ο μετ/μός που θεωρούμε (με επιλογή $V = Y$ αυθαίρετη).

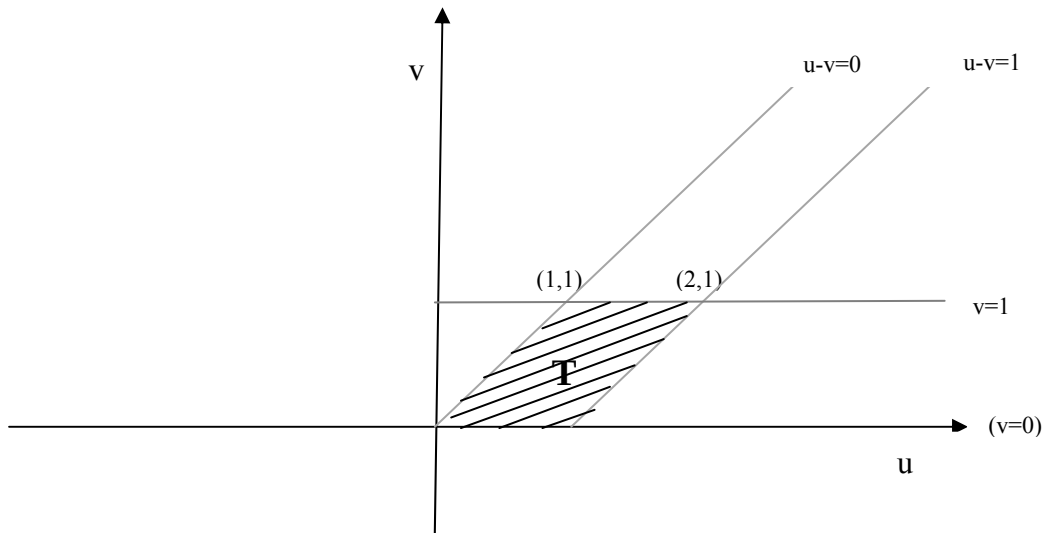
$$\text{Είναι } \begin{cases} u = x + y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - v \\ y = v \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \text{άρα αμφιμονοσήμαντος μετ/μός και}$$

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = x + y, v = y, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$$

$$= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : x = u - v, y = v, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]\}$$

ή ισοδύναμα: $0 < u - v < 1$ και $0 < v < 1$. Επίσης από τον τρόπο ορισμού τους προκύπτει ότι τα u, v είναι θετικοί μόνο αριθμοί. Οι περιορισμοί αυτοί συναληθεύουν στο παρακάτω χωρίο:



Οπότε

$f(u, v) = 1, \quad (u, v) \in T$ (Το T έχει εμβαδό 1, άρα η f είναι καλά ορισμένη)

Για την περιθώρια της U που ζητάμε θα είναι:

$$f_U(u) = \int_R f(u, v) dv = \begin{cases} \int_0^u 1 dv, & u \in (0, 1) \\ 0 & u \in [1, 2) \\ \int_{u-1}^1 1 dv, & u \in (1, 2) \end{cases} = \begin{cases} u, & u \in (0, 1) \\ 2-u, & u \in [1, 2) \end{cases} \quad (\text{τριγωνική κατανομή})$$

Συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα δύο τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή δεν ακολουθεί επίσης την ομοιόμορφη.

Άσκηση 8

Έστω ότι η από κοινού κατανομή των (X_1, X_2) είναι:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}.$$

Δύο καινούργιες τυχαίες μεταβλητές:

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = \frac{X_1}{X_2}.$$

Να βρεθεί η κατανομή του (Y_1, Y_2)

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ 2 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ Αλλαγή μεταβλητών

Έστω ότι η από κοινού κατανομή των $X_1, X_2, \dots, X_k$ ($k > 2$) είναι γνωστή και ζητούμενο είναι η από κοινού κατανομή των $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ όπου το καθένα από τα Y_i είναι συνάρτηση των $X_1, X_2, \dots, X_k$.

Γενικός τύπος μετασχηματισμού:

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

$$\vdots$$

$$Y_k = g_k(X_1, X_2, \dots, X_k)$$

Παρατήρηση: Ο μετασχηματισμός απαιτείται να είναι τετραγωνικός (δηλ. ίσος αριθμός των X_i και Y_i).

1^ο Βήμα: Εύρεση αντιστρόφου μετασχηματισμού

$$\left. \begin{array}{l} Y_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_k) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2, \dots, X_k) \\ \vdots \\ Y_k = g_k(X_1, X_2, \dots, X_k) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 = h_1(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \\ X_2 = h_2(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \\ \vdots \\ X_k = h_k(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \end{array}$$

Οι συναρτήσεις $h_1, h_2, \dots, h_k$ είναι οι συναρτήσεις που δίνουν τον αντίστροφο μετασχηματισμό, δηλ. τα X_i ως προς τα Y_i ($i=1, 2, \dots, k$).

2^ο Βήμα: Εύρεση της ιακωβιανής ορίζουσας J . Η ιακωβιανή (jacobian) ορίζουσα, J , είναι η ορίζουσα του μετασχηματισμού και υπολογίζεται κατά τα συνήθη:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial y_k} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_k}{\partial y_1} & \frac{\partial h_k}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial y_k} \end{vmatrix}$$

3^ο Βήμα: Εύρεση του συνόλου T , με τις δυνατές τιμές του νέου τυχαίου διανύσματος όπως αυτό ορίζεται λαμβάνοντας υπόψη το μετασχηματισμό.

Αυτό θα υπολογίζεται από:

$$T = \{(y_1, y_2, \dots, y_k) \in R^k : y_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_k), \text{ για } i = 1, \dots, k \text{ \& } (x_1, \dots, x_k) \in S\},$$

Όπου S είναι το αρχικό στήριγμα του τ . διανύσματος $(X_1, X_2, \dots, X_k)$

$$\begin{aligned} \text{ή } T &= \{(y_1, y_2, \dots, y_k) \in R^k : x_i = h_i(y_1, y_2, \dots, y_k), i = 1, \dots, k \text{ \& } (x_1, \dots, x_k) \in S\} \\ &= \{(y_1, y_2, \dots, y_k) \in R^k : h_i(y_1, y_2, \dots, y_k) \in S, \quad i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Συνολικά η νέα πυκνότητα θα είναι:

$$f_Y(y_1, y_2, \dots, y_k) = f_X(x_1(y_1, y_2, \dots, y_k), \dots, x_k(y_1, y_2, \dots, y_k)) |J|, \text{ εάν } J \neq 0,$$

όπου $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ και $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ τα δύο τυχαία διανύσματα.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω X, Y, Z τρεις ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν τον ίδιο εκθετικό νόμο με παράμετρο $\lambda = 1$, δηλαδή:

$$f_x(x) = e^{-x} \cdot 1_{(0,+\infty)}(x), \quad f_y(y) = e^{-y} \cdot 1_{(0,+\infty)}(y), \quad f_z(z) = e^{-z} \cdot 1_{(0,+\infty)}(z)$$

Θεωρούμε τις τρεις νέες τυχαίες μεταβλητές U, V, W που ορίζονται από τις σχέσεις:

$$U = X + Y + Z,$$

$$V = \frac{Y}{U},$$

$$W = \frac{Z}{U}$$

Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος (U, V, W) .

Λύση:

Έχουμε

$$(U, V, W) = (X + Y + Z, \frac{Y}{U}, \frac{Z}{U})$$

Δηλαδή:

$$u = x + y + z, \quad v = \frac{y}{x + y + z}, \quad w = \frac{z}{x + y + z}$$

Από τις προηγούμενες ισότητες βρίσκω τις αντίστροφες συναρτήσεις:

$$x = u(1 - v - w), \quad y = uv, \quad z = uw$$

Η ιακωβιανή ορίζουσα είναι:

$$J = \begin{vmatrix} 1-v-w & -u & -u \\ v & u & 0 \\ w & 0 & u \end{vmatrix} = u^2$$

$$u \cdot v > 0 \Rightarrow u, v > 0$$

$$u \cdot w > 0 \Rightarrow u, w > 0$$

$$u(1-v-w) > 0 \Rightarrow 1-v-w > 0 \Rightarrow v+w < 1$$

Επειδή οι τ.μ. X, Y, Z είναι ανεξάρτητες, έχουμε

$$f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = e^{-(x+y+z)} \cdot 1_{(0,+\infty)^3}(x, y, z)$$

$$f_{(U,V,W)}(u, v, w) = e^{-2} u^2 \cdot 1_S(u, v, w),$$

Όπου S είναι το σύνολο που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$u > 0, v > 0, w > 0, v + w < 1$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, X_3 \sim N(0,1)$ και R, Θ_1, Θ_2 τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε:

$$X_1 = R \cos \Theta_1 \cos \Theta_2$$

$$X_2 = R \cos \Theta_1 \sin \Theta_2$$

$$X_3 = R \sin \Theta_1$$

Όπου:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta_2 \leq 2\pi, \quad R > 0$$

Να δειχθεί ότι οι τ.μ. R, Θ_1, Θ_2 είναι ανεξάρτητες:

Λύση:

$$f_{X_1, X_2, X_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}, \quad (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R})$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_2 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

$$J = -r^2 \cos \theta_1 \neq 0, \quad T = \left\{ (r, \theta_1, \theta_2) : r > 0, \theta_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \theta_2 \in (0, 2\pi) \right\}$$

$$f_{R, \Theta_1, \Theta_2}(r, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{1}{2}r^2} |-r^2 \cos \theta_1|, \quad (r, \theta_1, \theta_2) \in T$$

$$f_{R, \Theta_1}(r, \theta_1) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{1}{2}r^2} r^2 \cos \theta_1 d\theta_2 = \frac{r^2 \cos \theta_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2}, \quad r > 0, \theta_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_R(r) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \cos \theta_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2} d\theta_1 = \frac{2r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad r > 0$$

$$f_{\Theta_1}(\theta_1) = \int_0^{+\infty} \frac{r^2 \cos \theta_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr = \frac{\cos \theta_1}{2}, \quad \theta_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_{R, \Theta_2}(r, \theta_2) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r^2 \cos \theta_1 d\theta_1 = \frac{2r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}}{(\sqrt{2\pi})^3}, \quad r > 0, \theta_2 \in (0, 2\pi)$$

$$f_{\Theta_2}(\theta_2) = \int_0^{+\infty} \frac{2r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2}}{(\sqrt{2\pi})^3} dr = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta_2 \in (0, 2\pi)$$

Παρατηρούμε ότι:

$$f_{R, \Theta_1, \Theta_2}(r, \theta_1, \theta_2) = f_R(r) \cdot f_{\Theta_1}(\theta_1) \cdot f_{\Theta_2}(\theta_2) \quad \forall (r, \theta_1, \theta_2) \in T$$

Άρα οι R, Θ_1, Θ_2 είναι ανεξάρτητες.

4^η Μέθοδος Ροπογεννήτριας

Έστω X τυχαία μεταβλητή.

Ορίζεται:

$$m_X(t) = Ee^{tX}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{υπό την προϋπόθεση η } Ee^{tX} \text{ έχει έννοια}).$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $m_X(0) = 1$ (η ροπογεννήτρια υπάρχει τουλάχιστον για $t = 0$)

$$2) m_{aX+b}(t) = e^{bt} m_X(at)$$

Απόδειξη: $m_{aX+b}(t) = Ee^{t(aX+b)} = Ee^{aXt} \cdot e^{bt} = e^{bt} Ee^{aXt} = e^{bt} e^{Xa \cdot t} = e^{bt} m_X(at)$

3) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Έχουμε:

$$m_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t)$$

Απόδειξη:

Για παράδειγμα για $n = 2$ έχουμε:

$$m_{X_1+X_2}(t) = Ee^{(X_1+X_2)t} = Ee^{X_1t+X_2t} = Ee^{X_1t} e^{X_2t} \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} Ee^{X_1t} Ee^{X_2t} = m_{X_1}(t) m_{X_2}(t)$$

4) Εάν η $m_X(t)$ υπάρχει $\forall t$ σε μια περιοχή του μηδενός τότε:

$$m_X^{(k)}(0) = EX^k \quad (\text{ροπή } k\text{-τάξεως της τ.μ. } X) \quad k = 1, 2, \dots \quad (|t| < c, \quad c > 0)$$

5) Εάν για τις τυχαίες μεταβλητές X, Y συμβαίνει:

$$m_X(t) = m_Y(t) \quad |t| < c, \quad c > 0,$$

έχω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν την ίδια κατανομή. Κάτι που είναι πολύ σημαντικό διότι δείχνει πως η ροπογεννήτρια χαρακτηρίζει (προσδιορίζει) την κατανομή της τ.μ. X υπό τον όρο ότι η ροπογεννήτρια υπάρχει σε μία περιοχή του μηδενός.

Παράδειγμα 1:

$$\text{Έστω } X \sim N(0,1), \quad m_X(t) = Ee^{tX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(x) dx = \dots = e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 2:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \quad \frac{X-\mu}{\sigma} = Z \Rightarrow X = \sigma Z + \mu \quad \text{και} \quad m_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$m_X(t) = e^{i\mu t} m_Z(\sigma t) = e^{i\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 3:

Έστω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Να δείξετε ότι

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

$$\begin{aligned} m_Y(t) &= m_{aX+b}(t) = e^{bt} m_X(at) = e^{bt} e^{\mu at + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 a^2} = e^{(b+a\mu)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 a^2} = \\ &= e^{\mu' t + \frac{1}{2}\sigma'^2 t^2}, \quad \text{όπου } \mu' = a\mu + b, \quad \sigma'^2 = \sigma^2 a^2 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4:

Έστω ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Να δείξετε ότι:

$$Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i \Rightarrow Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2\right).$$

$$\begin{aligned} m_{\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n}(t) &= m_{\alpha_1 X_1}(t) m_{\alpha_2 X_2}(t) \cdots m_{\alpha_n X_n}(t) = m_{X_1}(\alpha_1 t) m_{X_2}(\alpha_2 t) \cdots m_{X_n}(\alpha_n t) = \\ &= e^{\frac{1}{2}\alpha_1^2 t^2 \sigma_1^2 + \mu_1 \alpha_1 t} e^{\frac{1}{2}\alpha_2^2 t^2 \sigma_2^2 + \mu_2 \alpha_2 t} \cdots e^{\frac{1}{2}\alpha_n^2 t^2 \sigma_n^2 + \mu_n \alpha_n t} = e^{\frac{1}{2}t^2 \sum \alpha_i^2 \sigma_i^2 + t \sum \mu_i \alpha_i} \end{aligned}$$

Έπεται λοιπόν ότι $Y \sim N(\sum \alpha_i \mu_i, \sum \alpha_i^2 \sigma_i^2)$.

Παράδειγμα 5:

Έστω ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Να δείξετε ότι

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$. Άρα από την εφαρμογή του προηγούμενου

παραδείγματος προκύπτει ότι $\bar{X} \sim N\left(\sum \frac{1}{n} \mu, \sum \frac{1}{n^2} \sigma^2\right)$ δηλαδή $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Άθροίσματα και Γραμμικοί Συνδυασμοί Ανεξάρτητων Τυχαίων Μεταβλητών.

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι k ανεξάρτητες μεταβλητές. Θεωρώ το άθροισμα

$$Y = \sum_{i=1}^k X_i,$$

καθώς επίσης και το γραμμικό συνδυασμό των X_i

$$Z = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k.$$

Οι εκφράσεις γ.σ. εμφανίζονται πολύ συχνά στη στατιστική και ειδικότερα στις στατιστικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται ως εκτιμητές (π.χ.

δειγματικός μέσος, $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

Πρόταση 1

Έστω k ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ για τις οποίες οι $m_{X_i}(t) \quad i = 1, 2, \dots, k$

Υπάρχουν για ένα κοινό διάστημα Δ . Έχουμε:

$$m_Y(t) = m_{X_1}(t) \cdots m_{X_k}(t)$$

Πρόταση 2

Εάν οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι και ισόνομες τότε έχουμε:

$$m_{X_1 + \dots + X_k}(t) = (m_X(t))^k$$

Πρόταση 3

Έστω k ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ όπου

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sum a_i X_i \sim N(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$$

Απόδειξη (παράδειγμα 4)

Δεν ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα για όλες τις κατανομές (όπως π.χ. Γεωμετρική, Εκθετική).

Πρόταση 4

Έστω k ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ όπου

$X_i \sim B(n_i, p) \quad i = 1, 2, \dots, k$. Τότε έχω:

$$Y = \sum_{i=1}^k X_i, \quad Y \sim B\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$$

Απόδειξη: $m_{X_i}(t) = (pe^t + q)^{n_i}, \quad m_Y(t) = (pe^t + q)^{\sum n_i}$

Πρόταση 5

$X_1, X_2, \dots, X_k, \quad X_i \sim P(\lambda_i) \quad \text{και} \quad Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{τότε}$
 $Y \sim Poisson(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

Απόδειξη:

$$m_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t - 1)}$$

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^k e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\sum \lambda_i(e^t - 1)} = e^{(e^t - 1)(\sum \lambda_i)}$$

Σημείωση: Εάν όλες οι τ.μ. είναι επίσης και ισόνομες δηλ. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$ και συνεπώς οι $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι τυχαίο δείγμα από την $P(\lambda)$, τότε $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim P(n\lambda)$

Πρόταση 6

Έστω k ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ όπου

$$X_i \sim NB(k_i, p), \quad i = 1, \dots, n$$

$$Y = \sum Y_i \sim NB\left(\sum k_i, p\right)$$

Πρόταση 7

Έστω k ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \dots, X_k$ όπου

$$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta) . \quad \text{Τότε έχω:}$$

$$Y = \sum X_i \sim \Gamma\left(\sum \alpha_i, \beta\right), \quad m_{X_i}(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

Κατανομή Αθροισμάτων Τυχαίων Μεταβλητών (γενικότερη περίπτωση-μη ανεξάρτητες)

Πρόταση

Έστω $p = 2$ (διακριτή περίπτωση).

X, Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού σ.π. $P(x, y)$.

$Z = X + Y$ (convolution)

$$P_Z(z) = \sum_y P_{X,Y}(z-y, y) = \sum_x P_{X,Y}(x, z-x)$$

Ομοίως για $W = X - Y$ έχουμε

$$P_W(w) = \sum_y P_{X,Y}(w-y, y).$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} P_Z(z) &= \sum_y P(Z = z | Y = y) \cdot P(Y = y) = \sum_y P(X + Y = z | Y = y) P(Y = y) = \\ &= \sum_y P(X = z - y, Y = y) \end{aligned}$$

Όμοια για συνεχή:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(z-y, y) dy$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι τα όρια θα πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα εκεί που τα x, y παίρνουν τιμές.

Παράδειγμα 1:

Έστω $X_i \sim P(\lambda)$, $m_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Τότε έχουμε:

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda(e^t - 1)} = e^{n\lambda(e^t - 1)} \Rightarrow Y \sim P(n\lambda)$$

Παράδειγμα 2:

Έστω $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $m_X(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha_i}$, $t < \frac{1}{\beta}$

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Τότε έχουμε:

$$m_Y(t) = \prod_{i=1}^n m_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - \beta t)^{-\alpha_i} = (1 - \beta t)^{-\sum \alpha_i}$$

$$\Rightarrow Y \sim \Gamma(\sum \alpha_i, \beta), \quad y > 0$$

Θέμα 1

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ και $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα. Να βρεθεί η από κοινού κατανομή των τ.μ. $Z_1 = nY_1, Z_2 = (n-1)Y_2, Z_3 = (n-2)(Y_3 - Y_2), \dots, Z_n = Y_n - Y_{n-1}$.

Λύση:

Έστω $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ είναι το διατεταγμένο δείγμα, τότε έχουμε ότι

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \text{ (Order statistics).}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = ny_1 \\ z_2 = (n-1)(y_2 - y_1) \\ z_3 = (n-2)(y_3 - y_2) \\ \vdots \\ z_n = y_n - y_{n-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{n} z_1 \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{n-1} z_2 \\ y_3 = y_2 + \frac{1}{n-2} z_3 \\ \vdots \\ y_n = y_{n-1} + z_n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{n} z_1 \\ y_2 = \frac{1}{n} z_1 + \frac{1}{n-1} z_2 \\ y_3 = \frac{1}{n} z_1 + \frac{1}{n-1} z_2 + \frac{1}{n-2} z_3 \\ \vdots \\ y_n = \frac{1}{n} z_1 + \frac{1}{n-1} z_2 + \dots + z_n \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & \dots & \frac{1}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \dots \frac{1}{1} = n!$$

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{n!} n! f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)$$

Θέμα 2

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \theta x^{-2}$, $0 \leq \theta \leq x$, όπου θ παράμετρος του πληθυσμού. Υπολογίστε την μέση τιμή της μεταβλητής Z που ορίζεται ως:

$$Z = \begin{cases} 1, & \log\left(\frac{X}{\theta}\right) > \frac{1}{2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Λύση:

$$E(Z) = 1 \cdot P\left(\log\left(\frac{X}{\theta}\right) > \frac{1}{2}\right) = P\left(\log\left(\frac{X}{\theta}\right) > \frac{1}{2}\right)$$

$$Y = \log \frac{X}{\theta}$$

$$y = \log \frac{x}{\theta} \Rightarrow \frac{x}{\theta} = e^y \Rightarrow x = \theta e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = \theta e^y$$

$$x \geq \theta \Rightarrow \theta e^y \geq \theta \Rightarrow e^y \geq 1 \Rightarrow y \geq 0$$

$$f_Y(y) = \theta(\theta e^y)^{-2} |J| = \theta \cdot \theta^{-2} e^{-2y} \theta \cdot e^y = e^{-y}, \quad y > 0$$

$$Y \sim \text{Exp}(1)$$

$$P(Y > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\infty} = 0 + e^{-\frac{1}{2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Το τυχαίο δείγμα έχει συνάρτηση κατανομής:

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να βρεθούν:

α) $P(1 < X + Y < 2)$, β) $P(X < Y | X < 2Y)$

γ) $P(X < Y)$, δ) $f_{X|Y}(x|y)$.

Λύση:

Γνωρίζω ότι:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

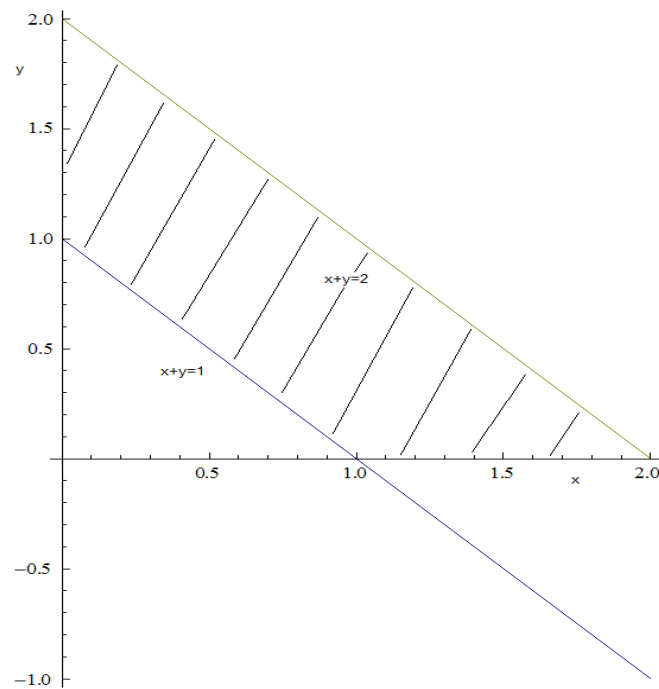
$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-x}(1 - e^{-y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = e^{-x-y}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

a) $P(1 < X + Y < 2) = P((X, Y) \in A) \quad \text{όπου } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x + y < 2\}$

$$\begin{aligned} P(1 < X + Y < 2) &= \iint_A f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{1-x}^{2-x} e^{-y-x} dy \right] dx + \int_1^2 \left[\int_0^{2-x} e^{-x-y} dy \right] dx = \\ &= \int_0^1 (-e^{-x-y} \Big|_{y=1-x}^{y=2-x}) dx + \int_1^2 (-e^{-x-y} \Big|_{y=0}^{y=2-x}) dx = \int_0^1 (e^{-x-1+x} - e^{-x-2+x}) dx + \int_1^2 (e^{-x} - e^{-x-2+x}) dx = \\ &= 2e^{-1} - 3e^{-2}. \end{aligned}$$

Διάγραμμα 1.4

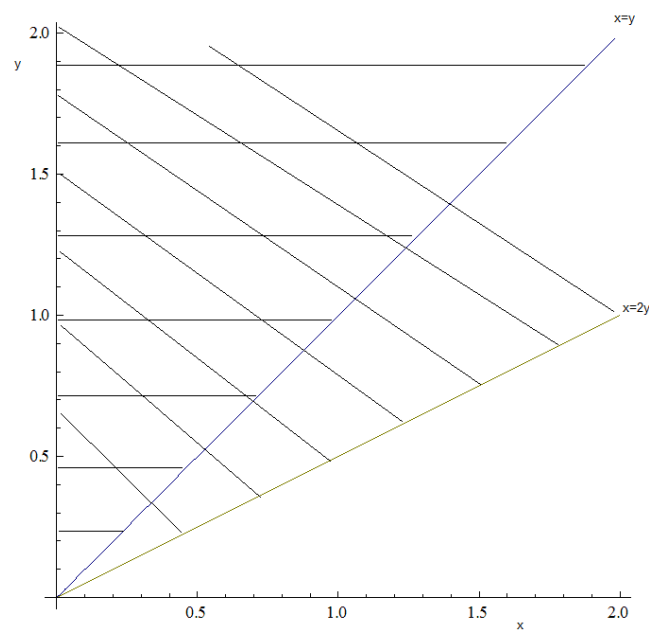


β)

$$P(X < Y | X < 2Y) = \frac{P(X < Y, X < 2Y)}{P(X < 2Y)} = \frac{P(X < Y)}{P(X < 2Y)}$$

γιατί το ενδεχόμενο $\{X < Y\}$ είναι υποσύνολο του ενδεχόμενου $\{X < 2Y\}$.

Διάγραμμα 1.5



$$P(X < Y | X < 2Y) = \frac{P(X < Y)}{P(X < 2Y)}$$

Υ)

$$P(X < Y) = \iint_{\{(x,y): x < y\}} f(x,y) dx dy = \int_0^{\infty} \left[\int_x^{\infty} e^{-x-y} dy \right] dx = \int_0^{\infty} [-e^{-x-y}]_{y=x}^{y \rightarrow \infty} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$P(X < 2Y) = \iint_{\{(x,y): x < 2y\}} f(x,y) dx dy = \int_0^{\infty} \left[\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-x-y} dy \right] dx = \int_0^{\infty} (-e^{-x-y}) \Big|_{\frac{x}{2}}^{\infty} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x-\frac{x}{2}} dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{3}{2}x} dx = -\frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}x} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{3}$$

Άρα έχουμε:

$$P(X < Y | X < 2Y) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-x-y} dx = -e^{-x-y} \Big|_{x=0}^{x \rightarrow \infty} = e^{-y}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

δ)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{e^{-y-x}}{e^{-y}} = e^{-x}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Άσκηση 4.5 (βιβλίου)

Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. με την ίδια Γεωμετρική κατανομή.

α) Να βρεθεί η κατανομή του $Y - X$.

β) Όμοια αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή.

Λύση:

α)

$$X, Y \sim Geo(p)$$

$$P_X(x) = q^{x-1} p, \quad x = 1, 2, \dots$$

$$P_{Y(y)} = q^{y-1}, \quad y = 1, 2, \dots$$

X, Y ανεξάρτητες άρα έχουμε:

$$P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y) = q^{x+y-2} p^2$$

$$P_{Y-X}(z) = P(Y-X=z) = \sum_x P(Y-X=z|X=x)P_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} P(Y=z+x, X=x) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \\ = \sum_{x=1}^{\infty} P(X=x)P(Y=z+x)$$

$P(X=x)$ και $P(Y=z+x)$ είναι >0 όταν $x, z+x > 0$, δηλαδή όταν παίρνουν τις τιμές $1, 2, \dots$. Σε διαφορετική περίπτωση είναι 0 . Για $z \geq 0$ τότε όταν το x παίρνει τις τιμές $1, 2, \dots$ και τα $x, z+x$ θα είναι θετικά άρα για $z \geq 0$ θα έχω:

Για $z < 0$ έστω ότι το x παίρνει τιμές $1, 2, \dots$

Τότε το $z+x$ θα είναι θετικό όταν το παίρνει τιμές από $-z+1$ και άνω. Πράγματι:

$$z+x > 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} x > -z \\ x \in \mathbb{A} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \geq -z+1, \text{ άρα τότε:}$$

$$P_{Y-X}(z) = \sum_{x=-z+1}^{\infty} q^{x-1} p q^{z+x-1} p = p^2 \sum_{x=-z+1}^{\infty} q^{2x+z-2} = p^2 \sum_{l=0}^{\infty} q^{2l-z} = \frac{p^2 q^{-z}}{1-q^2}, \quad z < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{Y-X}(z) = \frac{p^2 q^{|z|}}{1-q^2}, \quad z \in \mathbb{A}$$

β)

$X, Y \sim \text{Eκθ}(\lambda)$. Ζητείται η κατανομή του $Y-X$. Αν $Z = Y-X$ τότε σύμφωνα με το Θ. 4.5 θα έχω:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, x+z) dx \overset{\text{ανεξ.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(x+z) dx = \\ = \begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(x+z)} dx, & z \geq 0 \\ \int_{-z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(x+z)} dz, & z < 0 \end{cases} = \\ = \begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(2x+z)} dx = \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} e^{-2\lambda x} dx = \lambda e^{-\lambda z} \left(-\frac{1}{2} e^{-2\lambda x} \right)_0^{\infty}, & z \geq 0 \\ \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_{-z}^{\infty} e^{-2\lambda x} dx = \lambda e^{-\lambda z} \left(-\frac{1}{2} e^{-2\lambda x} \right)_{-z}^{\infty}, & z \in \mathbb{R} \end{cases} \\ = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda z}, & z > 0 \\ \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda z + 2\lambda z}, & z \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda z}, & z > 0 \\ \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda z}, & z \leq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda|z|}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 4.8 (Κομματαιστά αμφιμονοσήμαντος)

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2}, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty$$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1^2 + X_2^2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1^2 + y_2^2 \\ x_2 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm \sqrt{y_1 - y_2^2} \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

Κομματαιστά αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός

$$S_1 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

$$T_1 = \{(y_1, y_2) : y_1 > y_2^2, y_2 > 0\}$$

$$x_1 = \sqrt{y_1 - y_2^2}$$

$$x_2 = y_2$$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} & \frac{-2y_2}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} \neq 0$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0, x_2 < 0\}$$

$$T_2 = \{(y_1, y_2) : y_1 > y_2^2, y_2 < 0\}$$

$$x_1 = -\sqrt{y_1 - y_2^2}$$

$$x_2 = y_2$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} & \frac{y_2}{\sqrt{y_1 - y_2^2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} \neq 0$$

$$S_3 = \{(x_1, x_2) : x_1 < 0, x_2 > 0\}$$

$$T_3 = \{(y_1, y_2) : y_1 > y_2^2, y_2 > 0\}$$

$$x_1 = -\sqrt{y_1 - y_2^2}$$

$$x_2 = y_2$$

$$J_3 = -\frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} \neq 0$$

$$S_4 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 < 0\}$$

$$T_4 = \{(y_1, y_2) : y_1 > y_2^2, y_2 < 0\}$$

$$x_1 = \sqrt{y_1 - y_2^2}$$

$$x_2 = y_2$$

$$J_4 = \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} \neq 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \sum_{\substack{x_1, x_2 \\ y_1 = x_1^2 + x_2^2 \\ y_2 = x_2}} f_{X_1, X_2}(\pm\sqrt{y_1 - y_2^2}, y_2) |J|$$

$$= \begin{cases} \sum_{\substack{\text{για } \delta\delta o(x_1, x_2) \\ S_1, S_3}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1 - y_2^2 + y_2^2)} \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}}, & y_1 > y_2^2, \quad y_2 > 0 \\ \sum_{\substack{\text{για } \delta\delta o(x_1, x_2) \\ S_2, S_4}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1 - y_2^2 + y_2^2)} \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}}, & y_1 > y_2^2, \quad y_2 < 0 \end{cases}$$

$$= 2 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{y_1 - y_2^2}}, \quad y_1 > y_2^2, \quad y_2 \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 1:

Έστω $f(x, y) = 4e^{-2(x+y)}$, $x, y > 0$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $U = X + Y$.

Λύση:

$$u = x + y \Rightarrow x = u - y$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u - y, y) dy$$

$$\left. \begin{array}{l} u - y > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u > 0 \\ y < u \end{array} \right\}$$

$$f_U(u) = \int_0^u 4e^{-2(u-y+y)} dy = \int_0^u 4e^{-2u} dy = 4e^{-2u} \Big|_0^u = 4e^{-2u}, \quad u > 0$$

$$U \sim G(2, \frac{1}{2})$$

Άσκηση 2:

Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όπου $X \sim G(\alpha, 1)$ και $Y \sim G(\beta, 1)$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $U = X + Y$.

Λύση:

$$u = x + y \Rightarrow x = u - y$$

$$\left. \begin{array}{l} u - y > 0 \\ y > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u > 0 \\ y < u \end{array} \right\}$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u-y, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-y) \cdot f_Y(y) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (u-y)^{\alpha-1} e^{-(u-y)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} y^{\beta-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^u e^{-u} (u-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy$$

Άσκηση 3:

Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες και ισονομές τυχαίες μεταβλητές όπου $X_1 \sim G(\alpha_1, \beta)$, $X_2 \sim G(\alpha_2, \beta)$.

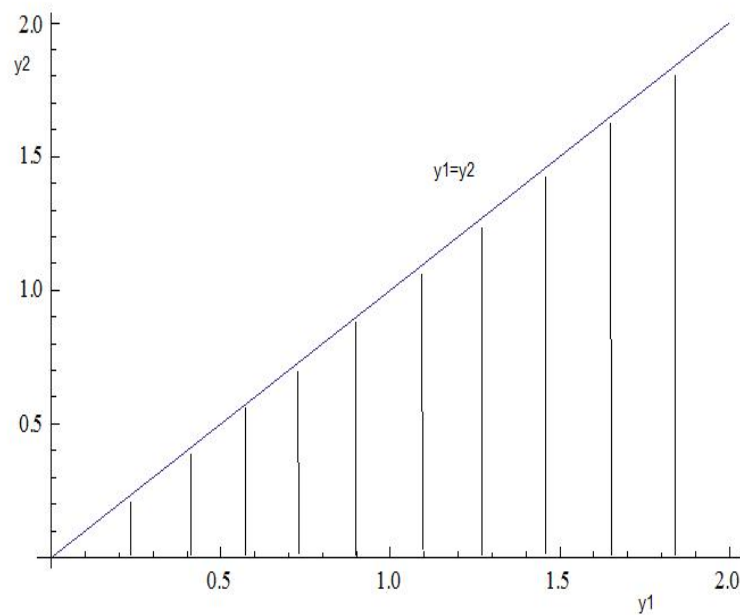
Να βρεθεί η από κοινού κατανομή $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ όπου $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2$.

Λύση:

$$\left. \begin{array}{l} y_2 > 0 \\ y_1 - y_2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y_1 > y_2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_2 = y_2 \\ x_1 = y_1 - x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_2 = y_2 \\ x_1 = y_1 - y_2 \end{array} \right\}$$

Διάγραμμα 1.6



$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} e^{-\frac{(x_1+x_2)}{\beta}} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1}$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} e^{-\frac{y_1}{\beta}} (y_1 - y_2)^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1}, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+$$

Άσκηση 4:

Έστω $(X_1, X_2) \sim M(u, p_1, p_2)$. Ναδειχθεί ότι $X_1 \sim B(u, p_1)$.

Λύση:

$$\begin{aligned} p(x_1) &= \sum_{x_2} p(x_1, x_2) = \sum_{x_2} \frac{u!}{x_1! x_2! (u - x_1 - x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{u - x_1 - x_2} \\ &= \frac{u!}{x_1!} p_1^{x_1} \sum_{x_2} \frac{p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{u - x_1 - x_2}}{x_2! (u - x_1 - x_2)!} \\ &= \frac{u!}{x_1! (u - x_1)!} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{u - x_1} \sum_{x_2} \frac{(u - x_1)!}{x_2! (u - x_1 - x_2)!} p_2^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{u - x_1 - x_2} \frac{1}{(1 - p_1)^{u - x_1}} = \\ &= \binom{u}{x_1} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{u - x_1} \sum_{x_2} \binom{u - x_1}{x_2} \left(\frac{p_2}{1 - p_1} \right)^{x_2} \left(\frac{1 - p_1 - p_2}{1 - p_1} \right)^{u - x_1} \\ \text{Ομως} \quad \sum_{x_2} \binom{u - x_1}{x_2} \left(\frac{p_2}{1 - p_1} \right)^{x_2} \left(\frac{1 - p_1 - p_2}{1 - p_1} \right)^{u - x_1} &= 1 \\ p(x_1) &= \binom{u}{x_1} p_1^{x_1} (1 - p_1)^{u - x_1} \end{aligned}$$

Άσκηση 5:

Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(1)$.

Ζητείται η κατανομή της

$$Y_1 = \log \frac{X_1}{X_2}$$

$$Y_2 = X_2$$

$$y_1 = \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \Rightarrow y_1 = \log\left(\frac{x_1}{y_2}\right) \Rightarrow e^{y_1} = \frac{x_1}{y_2} \Rightarrow x_1 = y_2 e^{y_1}$$

$$x_2 = y_2$$

$$x_2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0$$

$$y_2 e^{y_1} \geq 0, \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}$$

$$J = \begin{vmatrix} y_2 e^{y_1} & 0 \\ e^{y_1} & 1 \end{vmatrix} = y_2 e^{y_1} \neq 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = e^{-y_2 e^{y_1}} e^{-y_2} y_2 e^{y_1}, \quad y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geq 0$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = y_2 e^{-y_2(1+e^{y_1})+y_1}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^\infty y_2 e^{-y_2(1+e^{y_1})} e^{y_1} dy_2 = \frac{e^{y_1}}{1+e^{y_1}} \int_0^\infty y_2 (1+e^{y_1}) e^{-y_2(1+e^{y_1})} dy_2$$

$$\text{Ομως} \quad \int_0^\infty y_2 (1+e^{y_1}) e^{-y_2(1+e^{y_1})} dy_2 = E(E\kappa\theta(1+e^{y_1})) = \frac{1}{1+e^{y_1}}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{e^{y_1}}{1+e^{y_1}} \frac{1}{1+e^{y_1}} = \frac{e^{y_1}}{(1+e^{y_1})^2}, \quad y_1 \in \mathbb{R}$$

Θέμα 1

Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες έχουν κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση 1. Και έστω μετασχηματισμός

$$Y_1 = X_1 + 3X_2$$

$$Y_2 = 2X_1 + \alpha X_2, \text{ όπου } \alpha \neq 4$$

Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των Y_1 και Y_2 . Να βρεθεί επίσης η τιμή του α για την οποία οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες.

Λύση:

$$Y_1 = X_1 + 3X_2$$

$$Y_2 = 2X_1 + \alpha X_2, \text{ όπου } \alpha \neq 4$$

$$\left. \begin{matrix} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 2x_1 + \alpha x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2y_1 = 2x_1 + 6x_2 \\ y_2 = 2x_1 + \alpha x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2y_1 - y_2 = (6-\alpha)x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{2y_1 - y_2}{6-\alpha}$$

$$x_1 = y_1 - 3 \cdot \frac{2y_1 - y_2}{6-\alpha} \Rightarrow x_1 = \frac{-\alpha}{6-\alpha} y_1 + \frac{3}{6-\alpha} y_2$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{-\alpha}{6-\alpha} & \frac{2}{6-\alpha} \\ \frac{3}{6-\alpha} & \frac{-1}{6-\alpha} \end{vmatrix} = \frac{\alpha-6}{6-\alpha} = -1$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(6-\alpha)^2} (-\alpha y_1 + 3y_2)^2 + \frac{1}{(6-\alpha)^2} (2y_1 - y_2)^2 \right)} |J| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2(6-\alpha)^2} [\alpha^2 y_1^2 + 9y_2^2 - 6\alpha y_1 y_2 + 4y_1^2 + y_2^2 - 4y_1 y_2]} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2(6-\alpha)^2} [(\alpha^2 + 4) y_1^2]}$$

Όπως γνωρίζουμε $X_1, X_2 \sim N(0,1)$.

Από ιδιότητα της μέσης τιμής και της διακύμανσης εύκολα υπολογίζουμε με βάση τους μετασχηματισμούς ότι:

$$E(Y_1) = 0, \quad \text{Var}(X_1) = 1 + 3$$

$$E(Y_2) = 0, \quad \text{Var}(X_2) = 4 + \alpha^2$$

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = \text{Cov}(X_1 + 3X_2, 2X_1 + \alpha X_2) = 2 \cdot 1 + 3\alpha = 2 + 3\alpha$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Y_1, Y_2 για να είναι ανεξάρτητες σημαίνει ότι το $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$.

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 2 + 3\alpha$$

$$2 + 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$$

Θέμα

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $(\theta, \frac{1}{\theta})$, $\theta < 1$. Ποια πρέπει να είναι η συνάρτηση πυκνότητας της X ώστε η $\log(x)$ να είναι ομοιόμορφα κατανομημένη (δηλαδή να έχει συνάρτηση πυκνότητας ίση με μία σταθερά) στο διάστημα $(\log(\theta), -\log(\theta))$. Αιτιολογείστε.

Λύση:

$$x \in (\theta, \frac{1}{\theta}), \quad \theta < 1$$

$$y = \log x \Rightarrow e^y = x \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$Y \sim U(\log(\theta), -\log(\theta))$$

$$f_Y(y) = f_X(e^y) \cdot e^y$$

$$f_X(e^y) \cdot e^y = \frac{1}{-\log \theta - \log \theta} \Rightarrow f_X(e^y) = \frac{e^{-y}}{-2 \log \theta}$$

$$f(x) = \frac{1}{-2x \log \theta}$$

Θέμα

Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές κατανομημένες ομοιόμορφα στο διάστημα $(0, 1)$. Να βρεθεί η πυκνότητα της $Y = X_1 + X_2$.

Λύση:

$$Y_1 = Y = X_1 + X_2$$

$$Y_2 = X_2$$

$$\left. \begin{matrix} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y_1 = x_1 + y_2 \\ y_2 = x_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

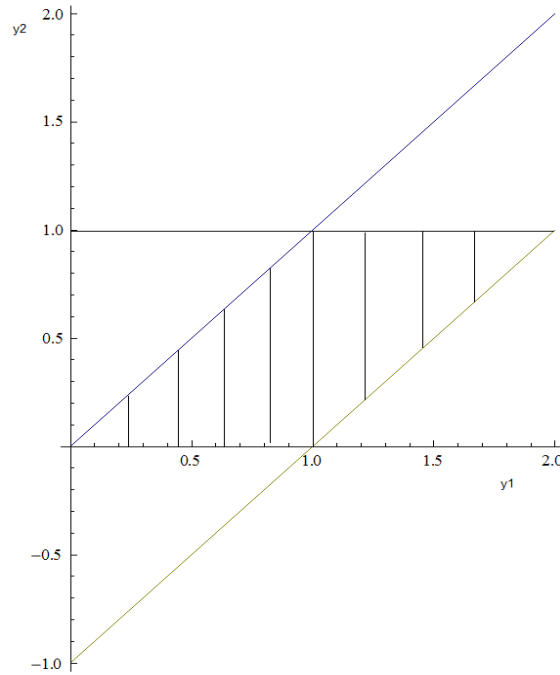
Γνωρίζω ότι $X_1 \in (0,1)$, $X_2 \in (0,1)$. Έχω:

$$y_1 - y_2 > 0 \Rightarrow y_2 < y_1$$

$$y_1 - y_2 < 1 \Rightarrow y_2 > y_1 - 1$$

$$y_2 \in (0,1), \quad y_1 \in (0,2)$$

Διάγραμμα 1.7



Για $y_1 \in (0,1) \Rightarrow y_2 \in (0,y_1)$

Για $y_1 \in (1,2) \Rightarrow y_2 \in (y_1 - 1,1)$

$$f(x_1, x_2) = 1, \quad x_1, x_2 \in (0,1)$$

$$f(y_1, y_2) = 1, \quad y_1 \in (0,1), y_2 \in (0,2)$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{y_1} 1 dy_2 + \int_{y_1-1}^1 1 dy_2 = y_1 + (1 - y_1 + 1) = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ (Μέθοδος Συνάρτησης Κατανομής)

Έστω η από κοινού κατανομή των X, Y είναι:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0 < x, y < +\infty \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να βρεθεί η κατανομή της $\frac{X}{Y}$.

Λύση:

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P\left(\frac{X}{Y} \leq a\right) = \iint_{\frac{X}{Y} \leq a} e^{-(x+y)} dx dy$$

$$0 \leq x \leq ay$$

$$y \in [0, +\infty)$$

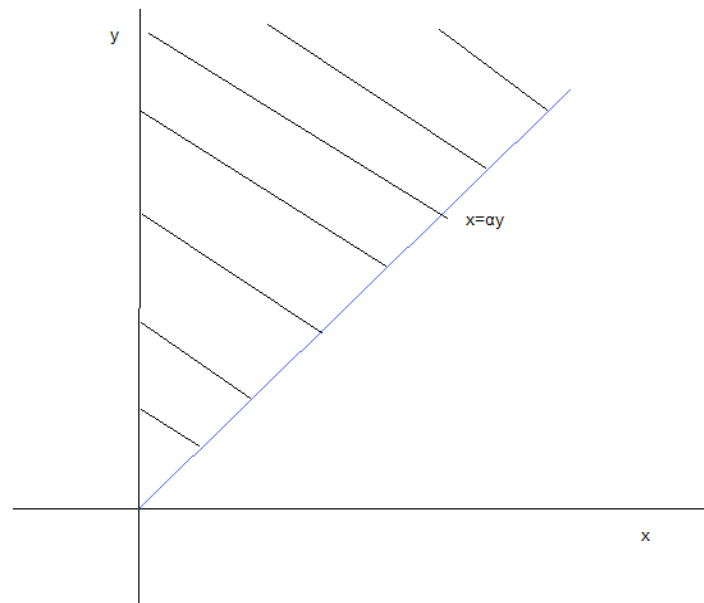
$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = \iint_{\frac{X}{Y} \leq a} e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{ay} e^{-(x+y)} dx \right] dy = \int_0^{+\infty} \left[-e^{-(x+y)} \Big|_0^{ay} \right] dy =$$

$$\int_0^{+\infty} (-e^{-(ay+y)} + e^{-y}) dy = -e^{-y} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-y(a+1)} dy = 1 + \frac{1}{a+1} \cdot e^{-y(a+1)} \Big|_0^a =$$

$$= 1 - \frac{1}{1+a}$$

$$f_{\frac{X}{Y}}(a) = F'_{\frac{X}{Y}}(a) = \frac{1}{(a+1)^2}, \quad a \in (0, +\infty)$$

Διάγραμμα 1.8



ΆΣΚΗΣΗ 4.3(βιβλίου)

Δύο φοιτητές συμφωνούν να συναντηθούν σε ένα εστιατόριο μεταξύ 6 και 7 μ.μ. Να βρεθεί η πιθανότητα να συναντηθούν, αν ο καθένας συμφωνεί να

περιμένει 15 λεπτά (και όχι πέραν της 7) για τον άλλον και ο καθένας φτάνει ανεξάρτητα στην τύχη μεταξύ 6 και 7.

Λύση:

Έστω X : χρόνος άφιξης του πρώτου φοιτητή

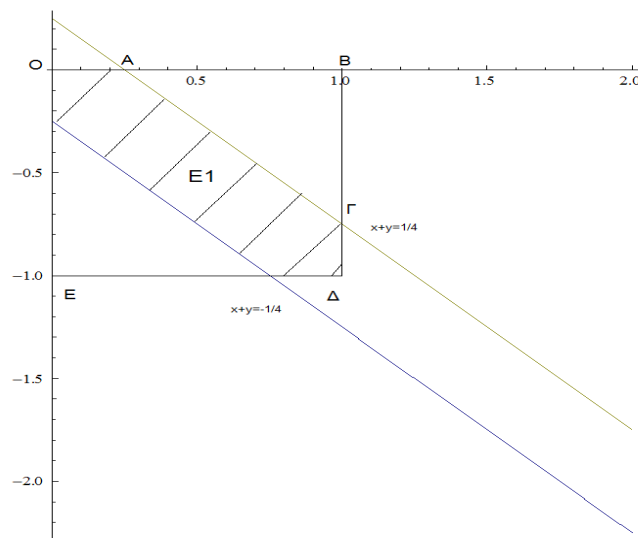
Y : χρόνος άφιξης του δεύτερου φοιτητή

$X, Y \sim U(6, 7)$ ή ισοδύναμα $X, Y \sim U(0, 1)$

X, Y ανεξάρτητες άρα:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Διάγραμμα 1.9



$$P(\{\text{να συναντηθούν}\}) = P\left(\left|x - y < \frac{1}{4}\right|\right) = \iint_{E_1} 1 dx dy = E\mu\beta(E_1) =$$

$$E\mu\beta(OB\Delta E) - 2E\mu\beta(AB\Gamma) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$