

# Πιθανότητες II

## Tutorial 6+

1)

Ας υποθέσουμε ότι η από κοινού σ.π. των διακριτών τ.μ.  $X, Y$  δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{21}, & x=1, 2, 3, \quad y=1, 2 \\ 0 & \text{αλλου} \end{cases}$$

Να βρεθεί η συνδιακύμανση των τ.μ.  $(X, Y)$

2)

Η από κοινού σ.π. της διδιάστατης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής  $(X, Y)$  δίνεται από τον τύπο

$$f(x, y) = 1, \text{ αν } |x| < y < 1$$

και  $f(x, y) = 0$ , διαφορετικά.

Να δειχθεί ότι, ενώ οι τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι ασυσχέτιστες, δεν είναι ανεξάρτητες.

3)

Ο χρόνος ζωής ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος που είναι τοποθετημένο σε μια συσκευή περιγράφεται από μια τ.μ.  $Y$ , ενώ ο χρόνος ζωής της συσκευής περιγράφεται από μια άλλη τ.μ.  $X$ . Αν το εξάρτημα καταστραφεί, παύει να λειτουργεί και η συσκευή χωρίς να συμβαίνει και το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι η από κοινού σ.π. των τ.μ.  $X$  και  $Y$  (σε χρόνια) δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{49} e^{-\frac{y}{7}}, & 0 < x < y < \infty \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι ο αναμενόμενος επιπλέον χρόνος που ζει ένα εξάρτημα σε σχέση με τη συσκευή είναι ίσος με 7 χρόνια.

(β) Αν  $E[XY] = 147$ , να δειχθεί ότι οι τ.μ.  $X$  και  $Y$  είναι θετικά συσχετισμένες και να εξηγηθεί διαισθητικά το αποτέλεσμα.

(γ) Να βρεθεί η διακύμανση της διαφοράς των χρόνων ζωής του εξαρτήματος και της συσκευής.

4)

Μια φαρμακευτική εταιρεία διανέμει στο εμπόριο κουτιά βάρους 2 γραμμαρίων που περιέχουν 3 διαφορετικές βιταμίνες  $A_1, A_2, A_3$ . Το βάρος  $X$  της βιταμίνης τύπου  $A_1$  και το βάρος  $Y$  της βιταμίνης τύπου  $A_2$  που περιέχονται στο κουτί είναι τ.μ. (το βάρος  $Z$  της βιταμίνης τύπου  $A_3$  είναι  $Z=2-X-Y$ ) με από κοινού σ.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, x+y \leq 2 \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

όπου  $c$  είναι μια θετική σταθερά.

(α) Να βρεθεί η τιμή του  $c$

(β) Να βρεθεί η περιθώρια σ.π., η μέση τιμή και η διακύμανση της  $X, Y$

(γ) Να βρεθεί η συνδιακύμανση των τ.μ.  $(X, Y), (Y, Z), (X, Z)$  και οι αντίστοιχοι συντελεστές συσχέτισης