Θέμα 1

Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ και $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ το αντίστοιχο διατεταγμένο δείγμα. Να βρεθεί η από κοινού κατανομή των τ.μ. $Z_1 = nY_1, Z_2 = (n-1)Y_2, Z_3 = (n-2)(Y_3 - Y_2), ..., Z_n = Y_n - Y_{n-1}$.

Λύση:

Έστω $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ είναι το διατεταγμένο δείγμα, τότε έχουμε ότι

$f(y_1, y_2, ..., y_n) = n! f(x_1) f(x_2) \mathrm{L}\ f(x_n)$ (Order statistics).

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = ny_1 \\ z_2 = (n-1)(y_2 - y_1) \\ z_3 = (n-2)(y_3 - y_2) \\ \mathrm{M} \\ z_n = y_n - y_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{n} z_1 \\ y_2 = y_1 + \frac{1}{n-1} z_2 \\ y_3 = y_2 + \frac{1}{n-2} z_3 \\ \mathrm{M} \\ y_n = y_{n-1} + z_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{1}{n} z_1 \\ y_2 = \frac{1}{n} z_1 + \frac{1}{n-1} z_2 \\ y_3 = \frac{1}{n} z_1 + \frac{1}{n-1} z_2 + \frac{1}{n-2} z_3 \\ \mathrm{M} \\ y_n = \frac{1}{n} z_1 + \frac{1}{n-1} z_2 + \mathrm{L}\ + z_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \mathrm{L} & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \mathrm{L} & \frac{1}{n-1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & \mathrm{K} & \frac{1}{n-2} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{n-2} \mathrm{L}\ \frac{1}{1} = n!$$

$$f(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{n!} n! f(x_1) f(x_2) \mathrm{L}\ f(x_n) = f(x_1) f(x_2) \mathrm{L}\ f(x_n)$$

Θέμα 2

Έστω X μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)=\theta x^{-2},\ \ 0\le\theta\le x$, όπου θ παράμετρος του πληθυσμού. Υπολογίστε την μέση τιμή της μεταβλητής Z που ορίζεται ως:

$$Z=\begin{cases}1, & \log(\frac{X}{\theta})>\frac{1}{2}\\ 0, & \textit{διαφορετικά}\end{cases}.$$

Λύση:

$$E(Z)=1\cdot P(\log\left(\frac{X}{\theta}\right)>\frac{1}{2})=P(\log\left(\frac{X}{\theta}\right)>\frac{1}{2})$$

$$Y=\log\frac{X}{\theta}$$

$$y=\log\frac{x}{\theta}\Rightarrow\frac{x}{\theta}=e^{y}\Rightarrow x=\theta e^{y}$$

$$\frac{dx}{dy}=\theta e^{y}$$

$$x\ge\theta\Rightarrow\theta e^{y}\ge\theta\Rightarrow e^{y}\ge 1\Rightarrow y\ge 0$$

$$f_Y(y)=\theta(\theta e^{y})^{-2}\left|J\right|=\theta\cdot\theta^{-2}e^{-2y}\theta\cdot e^{y}=e^{-y},\quad y>0$$

$$Y\sim \mathrm{E}\kappa\theta(1)$$

$$P(Y>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\infty}=0+e^{-\frac{1}{2}}$$

ΆΣΚΗΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Το τυχαίο δείγμα έχει συνάρτηση κατανομής:

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & x>0,\ y>0\\ 0, & \textit{διαφορετικά}\end{cases}$$

Να βρεθούν:

α) $P(1<X+Y<2)$, β) $P(X<Y\big|X<2Y)$

γ) $P(X<Y)$, δ) $f_{X|Y}(x\big|y)$.

Λύση:

Γνωρίζω ότι:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{-x}(1-e^{-y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = e^{-x-y}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x,y>0 \\ 0, & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

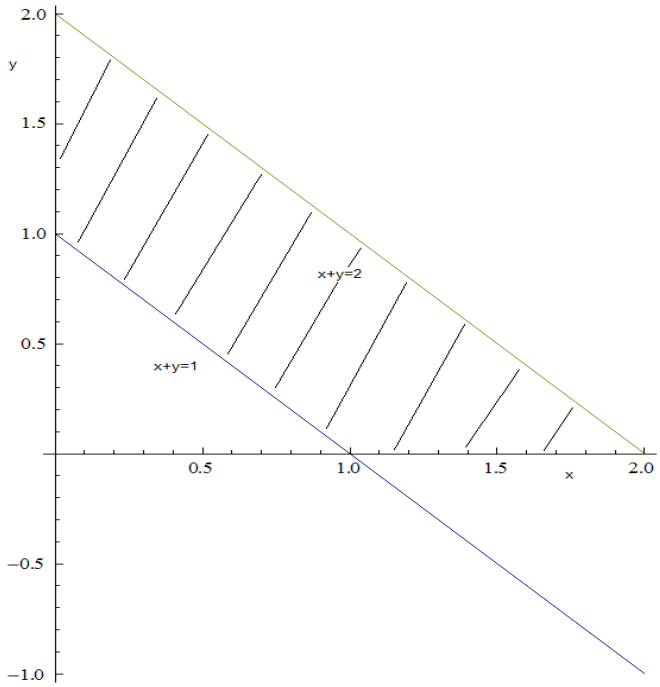
$$a) \quad P(1<X+Y<2) = P((X,Y)\in A) \quad \textit{όπου } A = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 1<x+y<2\right\}$$

$$P(1<X+Y<2) = \iint_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_{1-x}^{2-x} e^{-y-x}dy\right]dx + \int_1^2 \left[\int_0^{2-x} e^{-x-y}dy\right]dx =$$

$$= \int_0^1 (-e^{-x-y}\Big|_{y=1-x}^{y=2-x})dx + \int_1^2 (-e^{-x-y}\Big|_{y=0}^{y=2-x})dx = \int_0^1 (e^{-x-1+x} - e^{-x-2+x})dx + \int_1^2 (e^{-x} - e^{-x-2+x})dx =$$

$$= 2e^{-1} - 3e^{-2}.$$

Διάγραμμα 1.4

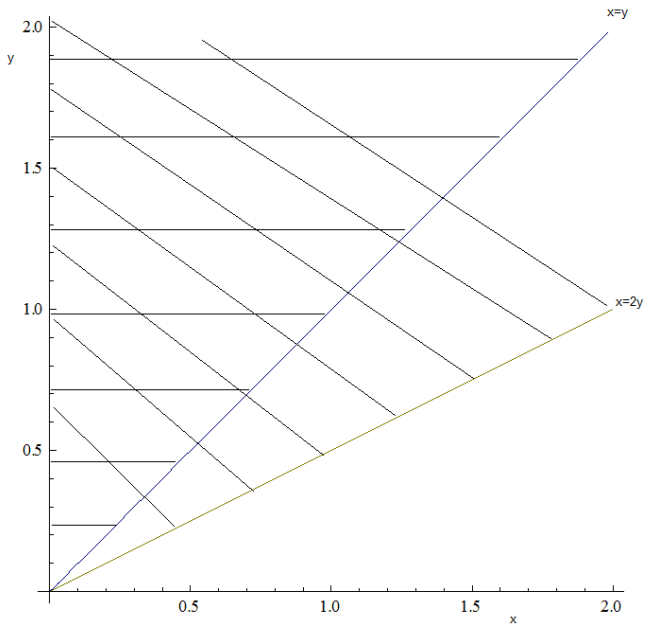


β)

$$P(X<Y|X<2Y)=\frac{P(X<Y,X<2Y)}{P(X<2Y)}=\frac{P(X<Y)}{P(X<2Y)}$$

γιατί το ενδεχόμενο $\{X<Y\}$ είναι υποσύνολο του ενδεχόμενου $\{X<2Y\}$.

Διάγραμμα 1.5



$$P(X<Y|X<2Y)=\frac{P(X<Y)}{P(X<2Y)}$$

γ)

$$P(X<Y)=\iint_{\{(x,y):x<y\}} f(x,y)dxdy=\int_0^\infty[\int_x^\infty e^{-x-y}dy]dx=\int_0^\infty[-e^{-x-y}\Big|_{y=x}^{y\to\infty}]dx=$$

$$=\int_0^\infty e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2}$$

$$P(X<2Y)=\iint_{\{(x,y):x<2y\}} f(x,y)dxdy=\int_0^\infty[\int_{\frac{x}{2}}^\infty e^{-x-y}dy]dx=\int_0^\infty(-e^{-x-y}\Big|_{\frac{x}{2}}^\infty)dx=$$

$$=\int_0^\infty e^{-x-\frac{x}{2}}dx=\int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}x}dx=-\frac{2}{3}e^{-(\frac{3}{2})x}\Bigg|_0^\infty=\frac{2}{3}$$

Άρα έχουμε:

$$P(X<Y|X<2Y)=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}.$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y)=\int_0^\infty e^{-x-y}dx=-e^{-x-y}\Big|_{x=0}^{x\to\infty}=e^{-y}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$$

$\delta)$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{e^{-y-x}}{e^{-y}}=e^{-x}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha}\end{cases}$$

Άσκηση 4.5 (βιβλίου)

Έστω X,Y ανεξάρτητες τ.μ. με την ίδια Γεωμετρική κατανομή.

α) Να βρεθεί η κατανομή του $Y-X$.

β) Όμοια αν οι X,Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με εκθετική κατανομή.

Λύση:

α)

$$X,Y\sim Geo(p)$$
$$P_X(x)=q^{x-1}p,\quad x=1,2,...$$
$$P_{Y(y)}=q^{y-1},\quad y=1,2,...$$

X,Y ανεξάρτητες άρα έχουμε:

$$P_{X,Y}(x,y)=P_X(x)P_Y(y)=q^{x+y-2}p^2$$

$$P_{Y-X}(z)=P(Y-X=z)=\sum_x P(Y-X=z|X=x)P_X(x)=\sum_{x=1}^\infty P(Y=z+x,X=x)\overset{\alpha\nu\varepsilon\xi}{=}$$

$$=\sum_{x=1}^\infty P(X=x)P(Y=z+x)$$

$P(X=x)$ και $P(Y=z+x)$ είναι >0 όταν $x,z+x>0$, δηλαδή όταν παίρνουν τις τιμές $1,2,...$ Σε διαφορετική περίπτωση είναι 0. Για $z\geq 0$ τότε όταν το x παίρνει τις τιμές $1,2,...$ και τα $x,z+x$ θα είναι θετικά άρα για $z\geq 0$ θα έχω:

Για $z<0$ έστω ότι το x παίρνει τιμές $1,2,...$

Τότε το $z+x$ θα είναι θετικό όταν το παίρνει τιμές από $-z+1$ και άνω. Πράγματι:

$$z+x>0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x>-z \\ x\in \text{Ά} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\geq -z+1,$$ άρα τότε:

$$P_{Y-X}(z)=\sum_{x=-z+1}^{\infty} q^{x-1}pq^{z+x-1}p=p^2\sum_{x=-z+1}^{\infty} q^{2x+z-2}=p^2\sum_{l=0}^{\infty} q^{2l-z}=\frac{p^2q^{-z}}{1-q^2},\quad z<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{Y-X}(z)=\frac{p^2q^{|z|}}{1-q^2},\quad z\in \text{Ά}$$

β)

$X,Y\sim \text{Εκθ}(\lambda)$. Ζητείται η κατανομή του $Y-X$. Αν $Z=Y-X$ τότε σύμφωνα με το Θ. 4.5 θα έχω:

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,x+z)dx \overset{\alpha\nu\varepsilon\xi}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(x+z)dx=$$

$$=\begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(x+z)}, & z\geq 0 \\ \int_{-z}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(x+z)}dz, & z<0 \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(2x+z)}dx=\lambda^2\int_0^{\infty} e^{-\lambda z}e^{-2\lambda x}dx=\lambda e^{-\lambda z}(-\frac{1}{2}e^{-2\lambda x}\Big|_0^{\infty}), & z\geq 0 \\ \lambda^2 e^{-\lambda x}\int_{-z}^{\infty} e^{-2\lambda x}dx=\lambda e^{-\lambda z}(-\frac{1}{2}e^{-2\lambda x}\Big|_{-z}^{\infty}), & z\in \text{΄΄} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda z}, & z>0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda z+2\lambda z}, & z\leq 0 \end{cases}=\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda z}, & z>0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda z}, & z\leq 0 \end{cases}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|z|},\quad z\in \text{΄΄}$$

Άσκηση 4.8 (Κομματιαστά αμφιμονοσήμαντος)

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2}, \quad -\infty<x_1,x_2<+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_1=X_1^{\,2}+X_2^{\,2} \\ Y_2=X_2 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1=x_1^{\,2}+x_2^{\,2} \\ y_2=x_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=x_1^{\,2}+y_2^{\,2} \\ x_2=y_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=\pm\sqrt{y_1-y_2^{\,2}} \\ x_2=y_2 \end{array}\right|$$

Κομματιαστά αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός

$$S_1=\{(x_1,x_2):x_1>0,\,x_2>0\}$$
$$T_1=\{(y_1,y_2):y_1>y_2^{\,2},\,y_2>0\}$$

$$x_1=\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}$$
$$x_2=y_2$$

$$J_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}} & \frac{-2y_2}{2\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}}\neq 0$$

$$S_2=\{(x_1,x_2):x_1<0,\,x_2<0\}$$
$$T_2=\{(y_1,y_2):y_1>y_2^{\,2},\,y_2<0\}$$

$$x_1=-\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}$$
$$x_2=y_2$$

$$J_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}} & \frac{y_2}{\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2\sqrt{y_1-y_2^{\,2}}}\neq 0$$

$$S_3=\{(x_1,x_2):x_1<0,\,x_2>0\}$$
$$T_3=\{(y_1,y_2):y_1>y_2^{\,2},\,y_2>0\}$$

$$x_1 = -\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}$$
$$x_2 = y_2$$

$$J_3 = -\frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}} \neq 0$$

$$S_4 = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 < 0\}$$
$$T_4 = \{(y_1, y_2) : y_1 > y_2^{\,2}, y_2 < 0\}$$

$$x_1 = \sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}$$
$$x_2 = y_2$$

$$J_4 = \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}} \neq 0$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \sum_{\substack{x_1, x_2 \\ y_1 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \\ y_2 = x_2}} f_{X_1,X_2}(\pm\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}, y_2)|J|$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\gamma\iota\alpha\ \delta\acute{\upsilon}o\,(x_1,x_2) \\ S_1, S_3}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1 - y_2^{\,2} + y_2^{\,2})} \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}}, & y_1 > y_2^{\,2}, \quad y_2 > 0 \\ \displaystyle\sum_{\substack{\gamma\iota\alpha\ \delta\acute{\upsilon}o\,(x_1,x_2) \\ S_2, S_4}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(y_1 - y_2^{\,2} + y_2^{\,2})} \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}}, & y_1 > y_2^{\,2}, \quad y_2 < 0 \end{cases}$$

$$= 2\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{y_1 - y_2^{\,2}}}, \quad y_1 > y_2^{\,2}, \quad y_2 \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 1:

Έστω $f(x, y) = 4e^{-2(x+y)}, \quad x, y > 0$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $U = X + Y$.

Λύση:

$u = x + y \Rightarrow \quad x = u - y$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y, y)dy$$

$$\left.\begin{array}{l} u-y>0 \\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} u>0 \\ y<u \end{array}$$

$$f_U(u) = \int_0^u 4e^{-2(u-y+y)}dy = \int_0^u 4e^{-2u}dy = 4e^{-2u}\Big|_0^u = 4e^{-2u}, \quad u>0$$

$$U \sim G(2, \frac{1}{2})$$

Άσκηση 2:

Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όπου $X \sim G(\alpha, 1)$ και $\mathrm{Y} \sim G(\beta, 1)$.

Να βρεθεί η κατανομή της τ.μ. $U = X + Y$.

Λύση:

$$u = x + y \Rightarrow \quad x = u - y$$

$$\left.\begin{array}{l} u-y>0 \\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} u>0 \\ y<u \end{array}$$

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u-y, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-y) \cdot f_Y(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(u-y)^{\alpha-1}e^{-(u-y)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)}y^{\beta-1}e^{-y}dy = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^u e^{-u}(u-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy$$

Άσκηση 3:

Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες και ισονομές τυχαίες μεταβλητές όπου $X_1 \sim G(\alpha_1, \beta), \quad \mathrm{X}_2 \sim G(\alpha_2, \beta)$.

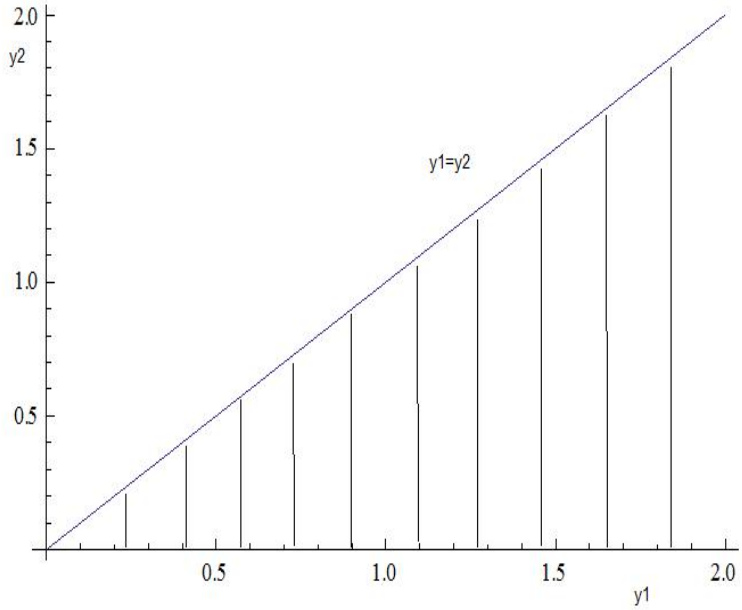
Να βρεθεί η από κοινού κατανομή $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ όπου $Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2$.

Λύση:

$$\left.\begin{array}{l} y_2>0 \\ y_1-y_2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y_1 > y_2 > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = y_2 \\ x_1 = y_1 - x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = y_2 \\ x_1 = y_1 - y_2 \end{array}$$

Διάγραμμα 1.6



$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} e^{-\frac{(x_1+x_2)}{\beta}} x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1}$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} e^{-\frac{y_1}{\beta}} (y_1 - y_2)^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1}, \qquad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$$

Άσκηση 4:

Έστω $(X_1, X_2) \sim M(u, p_1, p_2)$. Να δειχθεί ότι $X_1 \sim B(u, p_1)$.

Λύση:

$$p(x_1) = \sum_{x_2} p(x_1, x_2) = \sum_{x_2} \frac{u!}{x_1!x_2!(u-x_1-x_2)!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} (1-p_1-p_2)^{u-x_1-x_2}$$

$$= \frac{u!}{x_1!} p_1^{x_1} \sum_{x_2} \frac{p_2^{x_2}(1-p_1-p_2)^{u-x_1-x_2}}{x_2!(u-x_1-x_2)!}$$

$$= \frac{u!}{x_1!(u-x_1)!} p_1^{x_1}(1-p_1)^{u-x_1} \sum_{x_2} \frac{(u-x_1)!}{x_2!(u-x_1-x_2)!} p_2^{x_2}(1-p_1-p_2)^{u-x_1-x_2} \frac{1}{(1-p_1)^{u-x_1}} =$$

$$= \binom{u}{x_1} p_1^{x_1}(1-p_1)^{u-x_1} \sum_{x_2} \binom{u-x_1}{x_2}^{x_2} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2} \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^{u-x_1}$$

$$\text{Όμως} \quad \sum_{x_2} \binom{u-x_1}{x_2}^{x_2} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^{x_2} \left(\frac{1-p_1-p_2}{1-p_1}\right)^{u-x_1} = 1$$

$$p(x_1) = \binom{u}{x_1} p_1^{x_1}(1-p_1)^{u-x_1}$$

Άσκηση 5:

Έστω ανεξάρτητες και ισόνομες X_1, X_2 ~Εκθ(1).

Ζητείται η κατανομή της

$$Y_1 = \log \frac{X_1}{X_2}$$
$$Y_2 = X_2$$

$$y_1 = \log(\frac{x_1}{x_2}) \Rightarrow y_1 = \log(\frac{x_1}{y_2}) \Rightarrow e^{y_1} = \frac{x_1}{y_2} \Rightarrow x_1 = y_2 e^{y_1}$$
$$x_2 = y_2$$

$$x_2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0$$
$$y_2 e^{y_1} \geq 0, \quad \forall y_1 \in \mathbb{R}$$

$$J = \begin{vmatrix} y_2 e^{y_1} & 0 \\ e^{y_1} & 1 \end{vmatrix} = y_2 e^{y_1} \neq 0$$

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = e^{-y_2 e^{y_1}} e^{-y_2} y_2 e^{y_1}, \quad y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geq 0$$
$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = y_2 e^{-y_2(1+e^{y_1})+y_1}$$
$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^\infty y_2 e^{-y_2(1+e^{y_1})} e^{y_1} dy_2 = \frac{e^{y_1}}{1+e^{y_1}} \int_0^\infty y_2 (1+e^{y_1}) e^{-y_2(1+e^{y_1})} dy_2$$
$$\text{Όμως} \quad \int_0^\infty y_2 (1+e^{y_1}) e^{-y_2(1+e^{y_1})} dy_2 = E(\text{Εκθ}(1+e^{y_1})) = \frac{1}{1+e^{y_1}}$$
$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{e^{y_1}}{1+e^{y_1}} \frac{1}{1+e^{y_1}} = \frac{e^{y_1}}{(1+e^{y_1})^2}, \quad y_1 \in \mathbb{R}$$

Θέμα 1

Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες έχουν κανονική κατανομή με μέσο 0 και διακύμανση 1. Και έστω μετασχηματισμός

$$Y_1 = X_1 + 3X_2$$
$$Y_2 = 2X_1 + \alpha X_2, \text{ όπου } \alpha \neq 4$$

Να βρεθεί η από κοινού πυκνότητα των Y_1 και Y_2. Να βρεθεί επίσης η τιμή του α για την οποία οι Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες.

Λύση:

$$Y_1 = X_1 + 3X_2$$
$$Y_2 = 2X_1 + \alpha X_2, \text{ όπου } \alpha \neq 4$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + 3x_2 \\ y_2 = 2x_1 + \alpha x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y_1 = 2x_1 + 6x_2 \\ y_2 = 2x_1 + \alpha x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y_1 - y_2 = (6-\alpha)x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{2y_1 - y_2}{6-\alpha}$$

$$x_1 = y_1 - 3 \cdot \frac{2y_1 - y_2}{6-\alpha} \Rightarrow x_1 = \frac{-\alpha}{6-\alpha} y_1 + \frac{3}{6-a} y_2$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{-\alpha}{6-\alpha} & \frac{2}{6-\alpha} \\ \frac{3}{6-\alpha} & \frac{-1}{6-\alpha} \end{vmatrix} = \frac{\alpha - 6}{6-\alpha} = -1$$

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(6-\alpha)^2}(-\alpha y_1 + 3y_2)^2 + \frac{1}{(6-\alpha)^2}(2y_1 - y_2)^2\right)\cdot} |J| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2(6-\alpha)^2}\left[\alpha^2 y_1^2 + 9y_2^2 - 6\alpha y_1 y_2 + 4y_1^2 + y_2^2 - 4y_1 y_2\right]} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2(6-\alpha)^2}\left[\left(\alpha^2+4\right)y_1^2\right]}$$

Όπως γνωρίζουμε $X_1, X_2 \sim N(0,1)$.

Από ιδιότητα της μέσης τιμής και της διακύμανσης εύκολα υπολογίζουμε με βάση τους μετασχηματισμούς ότι:

$$E(Y_1) = 0, \quad Var(X_1) = 1 + 3$$
$$E(Y_2) = 0, \quad Var(X_2) = 4 + \alpha^2$$
$$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(X_1 + 3X_2, 2X_1 + \alpha X_2) = 2 \cdot 1 + 3\alpha = 2 + 3\alpha$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Y_1, Y_2 για να είναι ανεξάρτητες σημαίνει ότι το $Cov(Y_1, Y_2) = 0$.

$$Cov(Y_1, Y_2) = 2 + 3\alpha$$
$$2 + 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$$

Θέμα

Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $(\theta, \frac{1}{\theta}), \quad \theta < 1$. Ποια πρέπει να είναι η συνάρτηση πυκνότητας της X ώστε η $\log(x)$ να είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη (δηλαδή να έχει συνάρτηση πυκνότητας ίση με μία σταθερά) στο διάστημα $\left(\log(\theta), -\log(\theta)\right)$. Αιτιολογείστε.

Λύση:

$$x \in (\theta, \frac{1}{\theta}), \quad \theta < 1$$

$$y = \log x \Rightarrow e^y = x \Rightarrow \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$Y \sim U(\log(\theta), -\log(\theta))$$

$$f_Y(y) = f_X(e^y) \cdot e^y$$

$$f_X(e^y) \cdot e^y = \frac{1}{-\log\theta - \log\theta} \Rightarrow f_X(e^y) = \frac{e^{-y}}{-2\log\theta}$$

$$f(x) = \frac{1}{-2x\log\theta}$$

Θέμα

Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές κατανεμημένες ομοιόμορφα στο διάστημα $(0,1)$. Να βρεθεί η πυκνότητα της $Y = X_1 + X_2$.

Λύση:

$$Y_1 = Y = X_1 + X_2$$
$$Y_2 = X_2$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y_1 = x_1 + y_2 \\ y_2 = x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$$

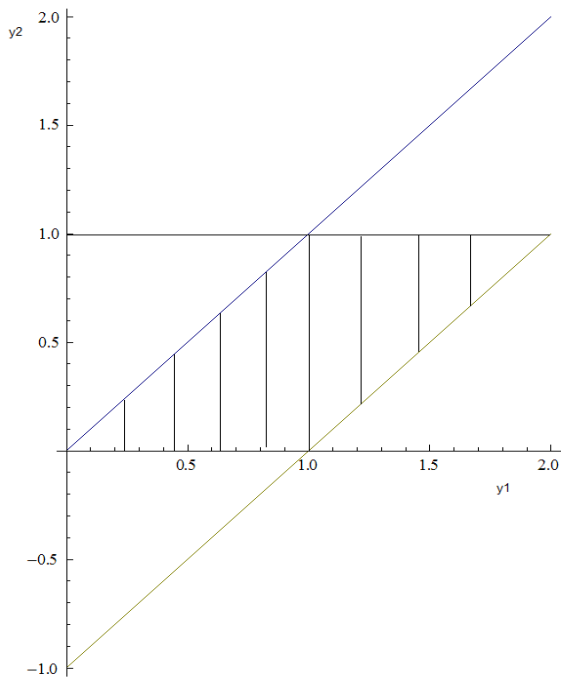
$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Γνωρίζω ότι $X_1 \in (0,1), \quad X_2 \in (0,1)$. Έχω:

$$y_1 - y_2 > 0 \Rightarrow y_2 < y_1$$
$$y_1 - y_2 < 1 \Rightarrow y_2 > y_1 - 1$$

$$y_2 \in (0,1), \quad y_1 \in (0,2)$$

Διάγραμμα 1.7



Για $y_1 \in (0,1) \Rightarrow y_2 \in (0, y_1)$

Για $y_1 \in (1,2) \Rightarrow y_2 \in (y_1 - 1, 1)$

$$f(x_1, x_2) = 1, \quad x_1, x_2 \in (0,1)$$
$$f(y_1, y_2) = 1, \quad y_1 \in (0,1),\ y_2 \in (0,2)$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{y_1} 1 dy_2 + \int_{y_1 - 1}^{1} 1 dy_2 = y_1 + (1 - y_1 + 1) = 2$$

ΑΣΚΗΣΗ (Μέθοδος Συνάρτησης Κατανομής)

Έστω η από κοινού κατανομή των X, Y είναι:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0 < x, y < +\infty \\ 0, & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Να βρεθεί η κατανομή της $\dfrac{X}{Y}$.

Λύση:

$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = P(\frac{X}{Y} \le a) = \iint\limits_{\frac{X}{Y} \le a} e^{-(x+y)} dxdy$$

$$0 \le x \le ay$$

$$y \in [0, +\infty)$$

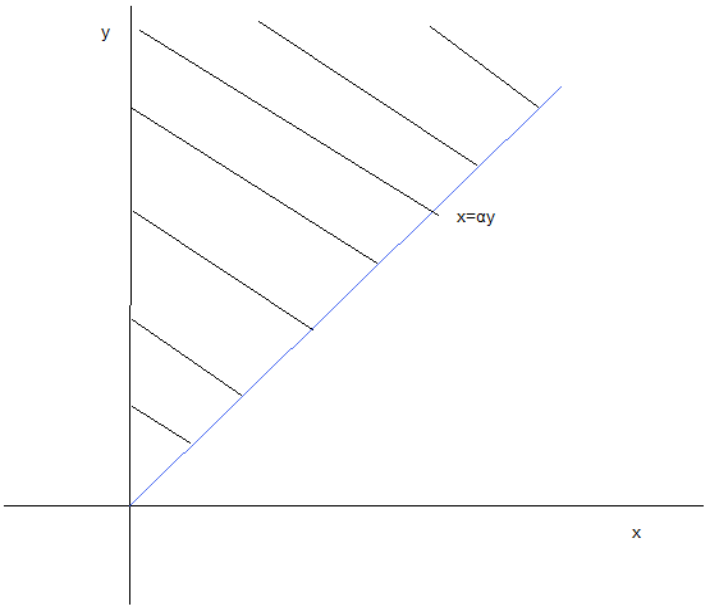
$$F_{\frac{X}{Y}}(a) = \iint\limits_{\frac{X}{Y} \le a} e^{-(x+y)} dxdy = \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{ay} e^{-(x+y)} dx \right] dy = \int_0^{+\infty} \left[-e^{-(x+y)} \Big|_0^{ay} \right] dy =$$

$$\int_0^{+\infty} (-e^{-(ay+y)} + e^{-y}) dy = -e^{-y} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-y(a+1)} dy = 1 + \frac{1}{a+1} \cdot e^{-y(a+1)} \Big|_0^{a} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1+a}$$

$$f_{\frac{X}{Y}}(a) = F'_{\frac{X}{Y}}(\alpha) = \frac{1}{(\alpha+1)^2}, \quad \alpha \in (0, +\infty)$$

Διάγραμμα 1.8



ΆΣΚΗΣΗ 4.3(βιβλίου)

Δύο φοιτητές συμφωνούν να συναντηθούν σε ένα εστιατόριο μεταξύ 6 και 7 μ.μ. Να βρεθεί η πιθανότητα να συναντηθούν, αν ο καθένας συμφωνεί να περιμένει 15 λεπτά (και όχι πέραν της 7) για τον άλλον και ο καθένας φτάνει ανεξάρτητα στην τύχη μεταξύ 6 και 7.

Λύση:

Έστω X : χρόνος άφιξης του πρώτου φοιτητή

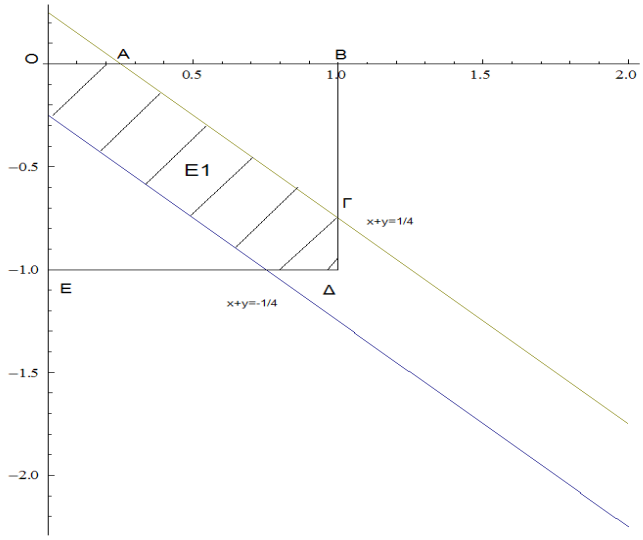
Y : χρόνος άφιξης του δεύτερου φοιτητή

$X, Y \sim U(6,7)$ ή ισοδύναμα $X, Y \sim U(0,1)$

X, Y ανεξάρτητες άρα:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0, & \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Διάγραμμα 1.9



$$P\left(\left\{\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha\nu\tau\eta\theta o\acute{\upsilon}\nu\right\}\right)=P\left(\left|x-y<\frac{1}{4}\right|\right)=\iint_{E_1}1dxdy=\mathrm{E}\mu\beta(\mathrm{E}_1)=$$

$$\mathrm{E}\mu\beta(\mathrm{OB\Delta E})-2\mathrm{E}\mu\beta(\mathrm{AB\Gamma})=1-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$$