

Φροντιστήριο 12°

- 1) Αναπτύξτε κατά Fourier την συνάρτηση $f(x) = 1, \quad -\rho < x < 0$ και $f(x) = x, \quad 0 < x < \rho$
- 2) Έστω η περιοδική συνάρτηση παλμού $f = f(x)$ όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x < -1 \\ 1, & -1 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

αν $-3 \leq x < 3$ και $f(x+6) = f(x)$. Παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση και εξετάστε εάν είναι άρτια ή περιττή. Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier που αντιστοιχούν σε αυτή και γράψτε την αντίστοιχη σειρά Fourier.

- 3) (α) Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά Fourier της $f(x) = 1 - |x|, \quad -1 \leq x \leq 1$, είναι

$$1 - |x| = \frac{1}{2} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^2 (2k-1)^2} \cos((2k-1)\pi x)$$

- (β) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ανάπτυγμα δείξτε ότι

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$