

Φροντιστήριο 7^ο

1. Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα Taylor δεύτερης τάξης για την $f(x, y) = e^x \cos y$ με κέντρο το σημείο $A(0, \pi)$.
2. Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο και η κάθετη ευθεία στο σημείο $A(2, -1, 5)$ της επιφάνειας $x^2 + y^2 = z$.
3. Να αποδειχτεί ότι οι επιφάνειες

$$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0, \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$$

εφάπτονται στο σημείο $A(2, 1, 1)$.

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι 1^{ης} και 2^{ης} τάξης της πλεγμένης συνάρτησης $y = y(x)$ που ορίζεται από την σχέση

$$F(x, y) = 3x - y^3 - 3xy = 0$$

5. α) Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $D_u f(x_0)$ της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ στο σημείο $x_0 = (2, 1, 3)$ κατά την διεύθυνση του διανύσματος $u = i - 2j$

β) Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $(D_h f)_p$ της συνάρτησης $f(x, y) = xe^{xy} + y$ στο

σημείο $P = (2, 0)$ κατά την διεύθυνση της γωνίας $q = \frac{2p}{3}$

6. Έστω ότι η θερμοκρασία T στο σημείο $M(x, y, z)$ του χώρου δίνεται (σε βαθμούς Κελσίου) από την συνάρτηση $T(x, y, z) = 100 - x^2 - y^2 - z^2$. Οι μονάδες μήκους στο χώρο είναι μέτρα (m).

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας στο σημείο $M_0(3, -4, 5)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $u = 3i - 4j + 12k$.

β) Προς ποια κατεύθυνση η θερμοκρασία T αυξάνει με το μεγαλύτερο ρυθμό στο σημείο M_0 ;

γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου στο σημείο M_0 ;