ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1

TUTORIAL 7

1) Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο [0,1] και διαφορετικές από του μηδενός $\forall\ x \in (0,1)$, καθώς επίσης $f(0)=0$ και $g(1)=0$, ΝΔΟ $\exists\ x_0 \in (0,1)$: $\dfrac{f'(x_0)}{f(x_0)} + \dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)} = 0$

2) Αν η παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί της συνθήκες $f(-1) = -2$ και $f(1) = 2$

   ΝΔΟ $\exists\ x_1, x_2,\ -1 < x_1 < x_2 < 1$: $\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{1}{f'(x_2)} = 1$

3) Γενικευμενο Θεωρημα Μεσης τιμής : (Cauchy)

   Εστω $f(x), g(x)$ συνεχεις σε διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο $(a,b), g(b) \neq g(a)$ τοτε υπαρχει τουλαχιστον ενα

$$x_0 \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

   Εφαρμογή: Έστω οι συναρτήσεις $f(t) = 3t+2, \quad g(t) = t^2+1.$

   Να βρεθεί ενα σημείο $\xi \in [1,4]$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)}$$

4) Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (x)^{\frac{1}{x}}$

5) ΝΔΟ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}$

6) Να προσδιορίσετε τις σταθερές a,b ώστε η $f(x) = ax^3 + bx^2 - x + 1$ να έχει τοπικά ακρότατα στα $x = -2$ και $x=1$ και να χαρακτηρισθούν