ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1

TUTORIAL 1

1) ΝΔΟ A=(A-B) U(AB)

2) Να απλοποιηθεί η παράσταση AU(B-AB) U(Γ-ΑΓ)

3) Να αποδείξετε την τριγωνική ανισότητα: $\left||a|-|b|\right| \leq |a+b| \leq |a|+|b|, \ \forall \ a,b \in \mathbb{R}$

4) ΝΔ επαγωγικά ότι $\forall$ θετικό ακέραιο $n \geq 3$ ισχύει $(n+1)^n < n^{n+1}$ και $n! \geq \sqrt{n^n}$, $\forall \ n$

(Αρχή της επαγωγής) Εστω *Π(n)* είναι μια μαθηματική πρόταση που εξαρτάται από το φυσικό αριθμό *n*. Αν η *Π(1)* είναι αληθής και αν για κάθε φυσικό αριθμό *n* ισχύει

Π(n) αληθής $\Rightarrow$ *Π(n+1) αληθής,*

τότε η πρόταση *Π(n)* είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό *n*.

5) Αν $z=4-i, \ w=3+2i$, να βρείτε τους $z+w, \ z-w, \ z \cdot w, \ \dfrac{z}{w}$

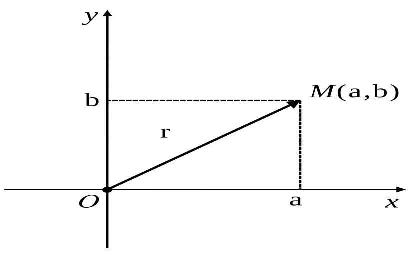
6) Αν $z=1-2i$, να βρείτε τον z^{-1}

Έστω $z=x+i\,y$ μιγαδικός αριθμός. Ο αντίστροφος του μιγαδικού αριθμού $z=a+i\,b$ είναι ο αριθμός $z^{-1}=\dfrac{1}{z}$

7) Αν $w=\dfrac{2-3i}{1+i}$, να γραφεί σε μορφή α+βi

8) Να βρείτε το μέτρο του $w=\dfrac{1+2i}{(2+3i)(1-i)}$

Σαν μέτρο $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ή απόλυτη τιμή του z ορίζεται το μήκος του διανύσματος OM .



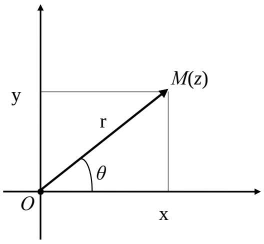
Συζυγής μιγαδικός αριθμός του $z=x+i\,y$ είναι ο μιγαδικός αριθμός $\bar{z}=x-i\,y$. Οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+i\,y$ και $\bar{z}=x-i\,y$ είναι συμμετρικοί ως προς τον πραγματικό άξονα.

9) Δίνεται ο αριθμός $z=\sqrt{3}+i$. Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή του.

Πολική ή τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών:

Κάθε μιγαδικός αριθμός z εκτός από την καρτεσιανή του μορφή $z=x+i\,y$, έχει και την πολική ή τριγωνομετρική του μορφή, η οποία είναι: $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$,

όπου r είναι το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z και θ είναι το ***πρωτεύον ή κύριο όρισμα*** του μιγαδικού αριθμού z, το οποίο συμβολίζεται $\arg(z)=\theta$. Η γωνία θ ορίζεται από τον ημιάξονα Ox και το διάνυσμα OM.



Παρατήρηση:

Κάθε γωνία θ' με το ίδιο ημίτονο και το ίδιο συνημίτονο με την θ λέγεται όρισμα του z και διαφέρει από τη θ κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Άρα: $\theta+2k\pi$. Από το σχήμα είναι φανερό ότι για: $0\le\theta<2\pi$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ $\quad\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ καθώς και $\tan\theta=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ με.

Η απόδειξη της τριγωνομετρικής μορφής, μπορεί να γίνει απλά, ως εξής:

$$\left.\begin{aligned}\sin\theta=\frac{y}{r}\\ \cos\theta=\frac{x}{r}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y=r\sin\theta\\ x=r\cos\theta\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\ x+i\,y=r\cos\theta+i\,r\sin\theta\Leftrightarrow\ x+i\,y=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$$

Παρατήρηση: Η τριγωνομετρική μορφή μας βοηθά στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση μιγαδικών αριθμών.

10) Να υπολογιστεί η παράσταση $A=\dfrac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{60}}{\left(4i\right)^{30}}$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το **Θεώρημα (De Moivre)**
Έστω $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$. Τότε για κάθε φυσικό αριθμό n έχουμε:
$z^n=r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$, όπου n ακέραιος αριθμός.
Το Θεώρημα του De Moivre ισχύει και όταν ο εκθέτης είναι αρνητικός ακέραιος.)

ΝΔ αν τα ακόλουθα σύνολα είναι αριθμήσιμα ή υπεραριθμήσιμα

$A=\{x\in\mathbf{Q}\mid -100\le x\le 100\}$
$B=\{(x,y)\mid \mathrm{x}\in\mathbf{N},\mathrm{y}\in\mathbf{Z}\}$
$C=\{(0,0.1]\}$
$D=\left\{\dfrac{1}{n}\mid n\in\mathbf{N}\right\}$

Έστω Α σύνολο ακολουθιών με όρους 0 και 1. Τότε το Α είναι υπεραριθμήσιμο.

Σύνολα

Ορισμός 2.1 (Πράξεις συνόλων) 1. Ένα **σύνολο** είναι μια συλλογή στοιχείων. Για παράδειγμα, τα $A = \{-1, +1\}$, $B = \{3, 5, 9\}$, $\Gamma = \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ = οι ακέραιοι αριθμοί, $\Delta = \mathbb{R}$ = οι πραγματικοί αριθμοί, $E = \{A, B, 5, \{5\}, \mathbb{R}\}$ είναι όλα σύνολα.

2. Όταν κάποιο στοιχείο α **ανήκει** σε κάποιο σύνολο A, γράφουμε $\alpha \in A$. Αν το α **δεν ανήκει** στο A, γράφουμε $\alpha \notin A$. Π.χ., πιο πάνω έχουμε, $3 \in B$, αλλά, $0 \notin A$.

3. Το A είναι **υποσύνολο** του B αν κάθε στοιχείο του A ανήκει και στο B, οπότε γράφουμε $A \subset B$ ή $A \subseteq B$.

4. Το **κενό σύνολο** $\emptyset$ ή $\{\}$ έχει την ιδιότητα ότι δεν περιέχει κανένα στοιχείο, δηλαδή $\alpha \notin \emptyset$ για οποιοδήποτε α.

5. Η **ένωση** $A \cup B$ δύο συνόλων A, B είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή στο B (ή και στα δύο). Γενικότερα, η ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_N$ συμβολίζεται ως,

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N = \bigcup_{i=1}^{N} A_i,$$

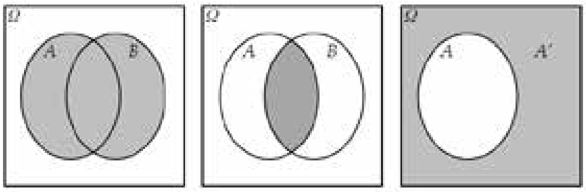
και περιέχει όλα τα στοιχεία του A_1, τα στοιχεία του A_2 κλπ. Βλ. Σχήμα 2.1.

6. Η **τομή** $A \cap B$ δύο συνόλων A, B είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B. Γενικότερα, η τομή ενός πεπερασμένου πλήθους συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_N$ συμβολίζεται ως,

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N = \bigcap_{i=1}^{N} A_i,$$

και αποτελείται από τα στοιχεία που περιέχονται σε όλα τα A_i. Βλ. Σχήμα 2.1.

7. Το **συμπλήρωμα** A' ενός συνόλου A που είναι υποσύνολο του βασικού συνόλου Ω, αποτελείται από όλα τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο A. Βλ. Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Γραφική αναπαράσταση της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος συνόλων.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Αντιμεταθετική	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Προσεταιριστική	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Επιμεριστική	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Κανόνας συμπλήρωσης	$\overline{\overline{A}} = A$

Ουδέτερο στοιχείο	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$
Απορροφητικό στοιχείο	$A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cup U = U$
Αυτοπάθεια	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Κανόνας Απορρόφησης	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Κανόνας De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$