Μαθηματικός Λογισμός Ι | **Φθινόπωρο 2014**
Σημειώσεις 22-12-14 | **Μ. Ζαζάνης**

1 Παραδείγματα ανάλυσης σε απλά κλάσματα

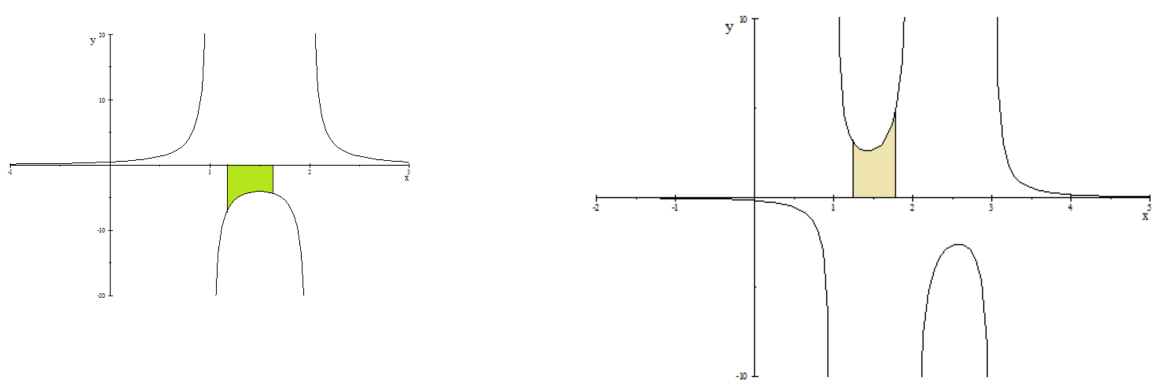
Προκειμένου να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$ χρησιμοποιούμε την ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x-(A+2B)}{(x-1)(x-2)}.$$

Προκειμένου να ισχύει η παραπάνω σχέση θα πρέπει $A+B=0$ και $A+2B=-1$. Οι δύο αυτές σχέσεις δίνουν $A=1$ και $B=-1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = \log(x-2) - \log(x-1) + C \\ &= \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C.\end{aligned}$$

Όταν υπολογίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα κλασμάτων πρέπει να είμαστε προσεκτικοί σε ότι αφορά τα σημεία που η συνάρτηση μπορεί να έχει ιδιομορφία. Για παράδειγμα, το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{1.2}^{1.5} \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_{1.2}^{1.5} = \log\left|\frac{1.5-2}{1.5-1}\right| - \log\left|\frac{1.2-2}{1.2-1}\right| = \log\left|\frac{-0.5}{0.5}\right| - \log\left|\frac{-0.8}{0.2}\right| = \log 1 - \log 4 = -2\log 2$. (Το αποτέλεσμα είναι βεβαίως αρνητικός αριθμός, όπως φαίνεται και στο σχήμα.) Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αυτό για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{1.5}^{3} \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$ επειδή το διάστημα ολοκλήρωσης $[1.5, 3]$ περιλαμβάνει το ιδιόμορφο σημείο 2 όπου η συνάρτηση απειρίζεται.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση αριστερά απεικονίζει την συνάρτηση $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ ενώ δεξιά απεικονίζεται η $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Παρομοίως,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} = \frac{A(x^2-5x+6)+B(x^2-4x+3)+C(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Ο αριθμητής γράφεται ως $x^2(A+B+C) - x(5A+4B+3C) + 6A+3B+2C$ και επομένως οι σταθερές A, B, C θα πρέπει να ικανοποιούν το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & + & C & = & 0 \\ 5A & + & 4B & + & 3C & = & 0 \\ 6A & + & 3B & + & 2C & = & 1 \end{array}$$

του οποίου η λύση είναι $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \int \left(\frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1/2}{x-3} \right) dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3} \\ &= \frac{1}{2}\log|x-1| - \log|x-2| + \frac{1}{2}\log|x-3| + C. \end{aligned}$$

2 Παράγωγοι και ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ως γνωστόν,

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\cos x, \quad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Κάποια τριγωνομετρικά ολοκληρώματα υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους. Έτσι έχουμε

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} \;=\; \tan x + C. \tag{1}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \;==-\int \frac{dy}{y} \quad (\text{ αντικατάσταση } y = \cos x,\, dy = -\sin x\; dx) \quad = -\log|y| + C \\ &= -\log|\cos x| + C. \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\cos x}$. Μια προσέγγιση είναι να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\cos x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{\cos^2} dx \;=\; \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x} \;=\; \int \frac{du}{1-u^2} \quad (\text{αντικατάσταση: } u = \sin x) && (2) \\ &= \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+u} + \frac{\frac{1}{2}}{1-u} \right) du \quad (\text{ανάλυση σε μερικά κλάσματα}) && (3) \\ &= \frac{1}{2}\log|1+u| - \frac{1}{2}\log|1-u| \;=\; \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right| \;=\; \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|. && (4) \end{aligned}$$

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι συχνά πολύ χρήσιμες για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Πχ. έχουμε

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1. \tag{5}$$

Έτσι μπορούμε για παράδειγμα να υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \;=\; \int \tan^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \tan^2 x dx \\
&= \int u^2 du - \int \tan^2 x dx \quad (\text{ αντικατάσταση } u = \tan x,\ du = (\tan x)' dx = \tfrac{dx}{\cos^2 x}) \\
&= \frac{1}{3}u^3 - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \quad (\text{ χρήση της ταυτότητας (5)}) \\
&= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + x \;=\; \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C \quad (\text{ χρήση του ολοκληρώματος (1)}).
\end{aligned}$$

2.1 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ισχύει ότι

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{8}$$

Συνεπώς

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \;+\; C, \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \;+\; C. \tag{10}$$

2.2 Ο μετασχηματισμός $t = \tan\frac{x}{2}$.

Πολλά τριγωνομετρικά ολοκληρώματα υπολογίζονται με την βοήθεια του μετασχηματισμού αυτού. Θέτουμε $t = \tan\frac{x}{2}$. Έχουμε

$$dt = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$$

και επομένως

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{11}$$

Ισχύουν επίσης οι ταυτότητες

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\tan x &= \frac{2t}{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε ξανά το ολοκλήρωμα (2)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \log|1+t| - \log|1-t| + C \\ &= \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \log\left|\frac{(1+t)^2}{1-t^2}\right| + C = \log\left|\frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{2t}{1-t^2}\right| + C \\ &= \log\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C.\end{aligned}$$

Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι το εξής:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2+\sin x - \cos x} &= \int \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{2+2t^2+2t-1+t^2} = \int \frac{2dt}{1+2t+3t^2} \\ &= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2}/3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}/3}dt}{\left(\frac{t+\frac{1}{3}}{\sqrt{2}/3}\right)^2+1} \\ &= \sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{3}}{\sqrt{2}/3}\right) = \sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{3\tan(x/2)+1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

2.3 Ρίζες

Το ολοκλήρωμα $\int\sqrt{1-x^2}dx$ υπολογίζεται με την αντικατάσταση $x=\sin y$, $dx=\cos y dy$:

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1-x^2}dx &= \int\sqrt{1-\sin^2 y}\cos y dy = \int \cos^2 y dy = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2y)dy \\ &= \frac{1}{2}\int dy + \frac{1}{4}\cos(2y)d(2y) + C = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\sin(2y) + C \\ &= \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\sin y\cos y + C = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται και άλλα παρόμοια ολοκληρώματα που είναι ρητές συναρτήσεις των x και $\sqrt{1-x^2}$. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}dx &= \int \frac{\cos y}{1+\cos y}dy = \int \frac{1+\cos y - 1}{1+\cos y}dy \\ &= \int dy - \int \frac{dy}{1+\cos y} = y - \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}dt \quad (\text{ μετασχηματισμός } t=\tan(y/2)) \\ &= y - \int \frac{2}{1+t^2+1-t^2}dt = y - \int dt = y - t + C = \arcsin x - \tan\left(\frac{\arcsin x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $\tan(\frac{y}{2}) = \frac{\sqrt{1+\tan^2 y}-1}{\tan y}$,

$$\tan\left(\frac{\arcsin x}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\tan^2(\arcsin x)}-1}{\tan(\arcsin x)} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}-1}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Έτσι έχουμε

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

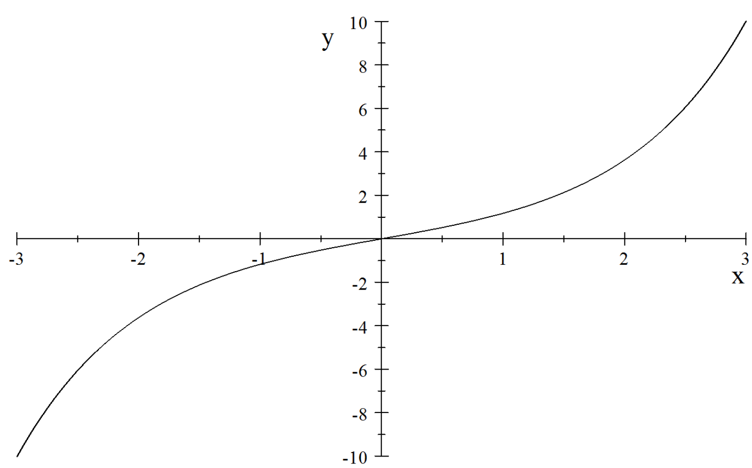
2.4 Υπερβολικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x, & (12)\\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, & (13)\\
\tanh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x. & (14)
\end{aligned}$$

και ότι ισχύει η θεμελιώδης σχέση

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$



Σχήμα 2: Υπερβολικό ημίτονο $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

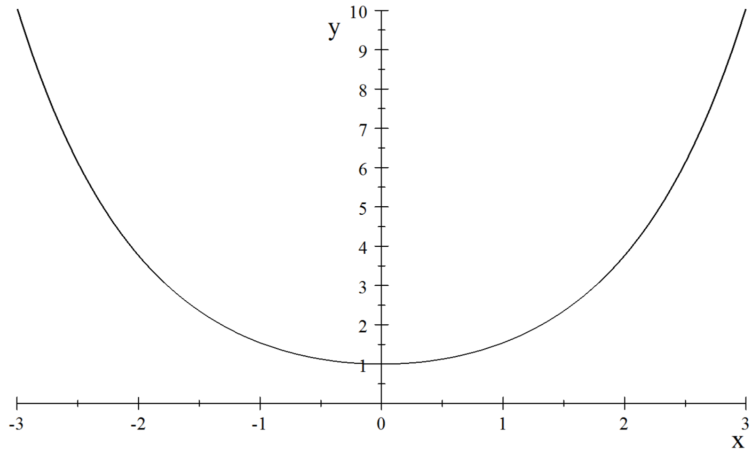
2.5 Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται ως εξής: Για το υπερβολικό ημίτονο, $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ή ισοδύναμα, $2ye^x = e^{2x} - 1$ που δίνει $e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$. (Το αρνητικό πρόσημο δεν γίνεται δεκτό γιατί $y - \sqrt{y^2+1} < 0$.) Συνεπώς, το αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο είναι η συνάρτηση

$$x = \sinh^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{y^2+1}), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Παρομοίως προσδιορίζουμε και το αντίστροφο υπερβολικό συνημίτονο και την αντίστροφη υπερβολική εφαπτομένη.

$$\begin{aligned}
x &= \cosh^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{y^2-1}), \;\; y \in [1, \infty), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\\
x &= \tanh^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}, \;\; y \in (-1, 1), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2}.
\end{aligned}$$



Σχήμα 3: Υπερβολικό συνημίτονο $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

2.6 Ολοκληρώματα που υπολογίζονται με την βοήθεια των υπερβολικών συναρτήσεων

Το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{x^2+1}dx$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x = \sinh y$, $dx = \cosh y dy$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}dx &= \int \sqrt{\sinh^2 y + 1}\, \cosh y\, dy \;=\; \int \cosh^2 y\, dy \quad (\text{ επειδή } \cosh^2 - \sinh^2 = 1) \\
&= \int \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 dy \quad (\text{ ορισμός του } \cosh y) \;=\; \int \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4}\, dy \\
&= \frac{1}{8}\int e^{2y} d(2y) + \frac{1}{8}\int e^{-2y} d(2y) + \frac{1}{2}\int dy \;=\; \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{8} + \frac{1}{2}y + C
\end{aligned}$$

Προκειμένου να εκφράσουμε το y ως προς x έχουμε $y = \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ και επομένως

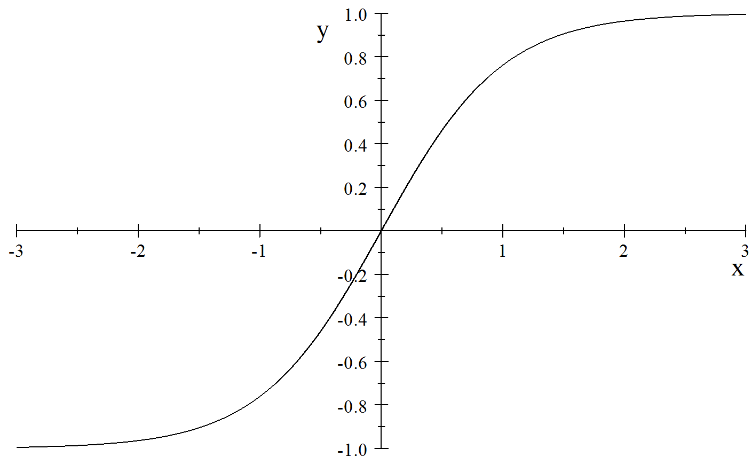
$$\begin{aligned}
e^{2y} &= \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 \;=\; 2x^2 + 1 + 2x\sqrt{x^2+1}, \\
e^{-2y} &= \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^{-2} \;=\; \left(\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2 \;=\; 2x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{4}\sinh(2y) = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{8} \;=\; \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}.$$

και επομένως

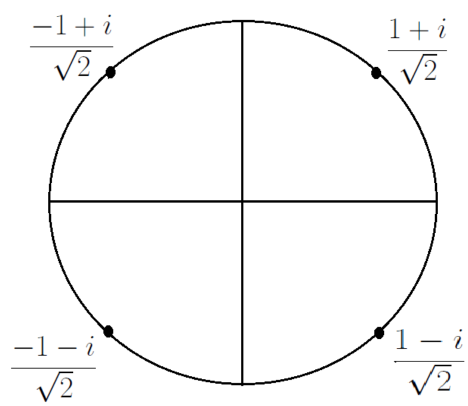
$$\int \sqrt{x^2+1}dx \;=\; \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{x^2+1}) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + C.$$



Σχήμα 4: Υπερβολική εφαπτομένη $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

3 Χρήση μιγαδικών αριθμών στην παραγοντοποίηση

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{x^4+1}$. Οι τέσσερεις ρίζες της εξίσωσης $x^4 + 1 = 0$ είναι οι $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ όπως φαίνονται στο σχήμα 5. Επομένως έχουμε



Σχήμα 5: Οι ρίζες της εξίσωσης $x^4 + 1 = 0$.

$$
\begin{aligned}
x^4 + 1 &= \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2\right) \\
&= \left(\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)\left(\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Έχουμε κατά συνέπεια την ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^4+1} &= \frac{ax+b}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{cx+d}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}\\ &= \frac{x^3(a+c)+x^2(\sqrt{2}a-\sqrt{2}c+b-d)+x(a+c+\sqrt{2}b-\sqrt{2}d)+b+d}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & & + & c & & & = & 0\\ \sqrt{2}a & + & b & - & \sqrt{2}c & + & d & = & 0\\ a & + & \sqrt{2}b & + & c & - & \sqrt{2}d & = & 0\\ & & b & & & + & d & = & 1\end{array} \quad \text{απ' όπου προκύπτει ότι } a=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{2}{2\sqrt{2}},\ d=\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^4+1} &= \int\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\left(\frac{x+\sqrt{2}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{x-\sqrt{2}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)dx\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\left(\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)dx\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}-\int\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)+\frac{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\log\left(\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)-\log\left(\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\quad+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int\frac{\sqrt{2}dx}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}+\int\frac{\sqrt{2}dx}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1}\right)\end{aligned}$$

και έτσι έχουμε

$$\int\frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)\right)+C.$$

Με βάση το παραπάνω θα υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dx}{x^4+1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan(0)+\arctan(2)\right)\\
&\quad-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan(-1)+\arctan(+1)\right)\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\log 5+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(2).\end{aligned}$$