

(5)

Αυτά ούτε λίγο ούτε πολύ μου λέει ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει και θεωρήσουμε οποιονδήποτε $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό, τότε θα υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$: $|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$. Αυτά μου λέει ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας θα βρεθούν κοντά δύο και με οποιαδήποτε σειρά είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Αυτά είναι η ιδέα για την ακολουθία Cauchy.

[10]. Ορισμός

Θα λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) είναι Cauchy ή βασική αν $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$.

Είναι σαφές ότι ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με τον

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ ώστε } |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \text{ και } \forall k \in \mathbb{N}$$

[11]. Πρόταση

Κάθε ακολουθία που συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ είναι Cauchy

Απόδειξη

Περιέχεται στην παρατήρηση [9].

[12]. Το κεντρικό αποτέλεσμα των ακολουθιών Cauchy περιέχεται στο επόμενο θεώρημα

Θεώρημα: Κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη: Έστω (x_n) μια ακολουθία Cauchy.

Ισχυρισμός 1^{ος}: Η (x_n) είναι φραγμένη

Απόδειξη του ισχυρισμού: Έστω $\varepsilon_0 = 1$. Αφού η (x_n) είναι Cauchy $\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}$:

$|x_n - x_m| < 1 \quad \forall n, m \geq n_1$. Αυτά για $m = n_1 \Rightarrow |x_n - x_{n_1}| < 1 \quad \forall n \geq n_1$. Παρατηρούμε ότι $\forall n \geq n_1$ ισχύει $|x_n| = |(x_n - x_{n_1}) + x_{n_1}| \leq$

$$\leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1}| < 1 + |x_{n_1}| \Rightarrow |x_n| \leq 1 + |x_{n_1}| \quad \forall n \geq n_1 \quad (1)$$

Θέτουμε $M = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n_1}| \}$

τότε $|x_1| \leq M, |x_2| \leq M, \dots, |x_{n_1-1}| \leq M$, (2)

και $1 + |x_{n_1}| \leq M$. Το τελευταίο με βάση την (1) δίνει

$$|x_n| < M \quad \forall n \geq n_1 \quad (3)$$

Από τις (2), (3) $\Rightarrow |a_n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άρα η (a_n) είναι απόλυτα φραγμένη, άρα φραγμένη. Η απόδειξη του Ισχυρισμού τελείωσε.

Ισχυρισμός 2ος: Υπάρχει συγκλίνουσα υποακολουθία (a_{k_n}) της ακολουθίας (a_n) .

Απόδειξη του Ισχυρισμού:
Από τον 1ο Ισχυρισμό η (a_n) είναι φραγμένη. Άρα από το Θ. Bolzano-Weierstrass $\exists$ συγκλίνουσα υποακολουθία (a_{k_n}) της ακολουθίας (a_n)

Αφού η (a_{k_n}) είναι συγκλίνουσα $\exists a \in \mathbb{R} : \lim a_{k_n} = a$

Ισχυρισμός 3ος:

Υπάρχει το όριο της (a_n) και ισχύει $\lim a_n = a$

Απόδειξη του Ισχυρισμού:
~~Απόδειξη~~ Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim a_{k_n} = a \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ για $n \geq n_2$ (1) $\forall n \geq n_2$
Αφού η (a_n) είναι Cauchy για $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists n_3 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_3$ (2)
αφού $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ για $n \geq n_3$ θα έχω $k_n \geq n_3$.
Εφαρμόζω την (2) για k_n και n ως μέλη του m . Άρα έχω $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ (3) $\forall n \geq n_3$
Θέτω $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$
Τότε $\forall n \geq n_0$ οι (1), (3) ισχύουν ταυτόχρονα.
~~Εστω για κάθε $n \geq n_0$~~
Για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε
$$|a_n - a| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - a)| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

από τον ορισμό του ορίου έπεται $\lim a_n = a$

Η απόδειξη τελείωσε.

Συμπέρασμα: Ισχύει η επόμενη ισοδυναμία

Η (a_n) συγκλίνει αν-ν είναι Cauchy.

ΣΕΙΡΕΣ

①

[1] Ορισμός

- Έστω (a_n) μια ακολουθία.

Από αυτήν ορίζεται μια νέα ακολουθία (S_n) με τύπο

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{π.χ. } S_1 = a_1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{k.o.k.} \end{array} \right).$$

Η ακολουθία (S_n) λέγεται ακολουθία μερικών αθροισμάτων της ακολουθίας (a_n) . Ιδιαίτερα ο S_n ονομάζεται μερικό n -οστό αθροισμα της (a_n) .

Η σειρά της ακολουθίας (a_n) είναι το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + \dots$

- Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα ή ότι η ακολουθία (a_n) είναι αθροιστήμη, εάν η ακολουθία (S_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ ονομάζεται άθροισμα της σειράς και συμβολίζεται $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Η σειρά λέμε ότι αποκλίνει αν δεν συγκλίνει η (S_n) στο $\mathbb{R}$.
- Αν το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ ή $-\infty$ τότε θα λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο $+\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.

Γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ ή $-\infty$ αντίστοιχα.

[2] Πρόταση

Έστω ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν και λείπει ένας πραγματικός αριθμός. Τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n)$ συγκλίνουν και έχουν άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \alpha_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

(2)

Απόδειξη:

Έστω (S_n) ακολουθία μερικών αθροισμάτων ως

$$\begin{array}{lcl} (S_n) & \text{---//---//---//---//---} & \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \\ (\sigma_n) & \text{---//---//---//---//---} & \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \\ (\tau_n) & \text{---//---//---//---//---} & \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) \\ (t_n) & \text{---//---//---//---//---} & \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \alpha_n) \end{array}$$

Φανερά $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

$\sigma_n = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n$

$\tau_n = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_n + \beta_n) = S_n + \sigma_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$t_n = \lambda \alpha_1 + \lambda \alpha_2 + \dots + \lambda \alpha_n = \lambda \cdot S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Από τα δεδομένα $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$

Από τη θεωρία ακολουθιών έχουμε ότι η ακολουθία $(S_n + \sigma_n)$

συγκλίνει και ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n + \sigma_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \xrightarrow{\text{op. 6.}} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$

Πάλι από τη θεωρία ακολουθιών έχουμε ότι η $\lambda \cdot S_n$ συγκλίνει

και ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda S_n = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda S_n = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xrightarrow{\text{op. 6.}}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \alpha_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

[3] Πόρισμα

Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει και ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ αποκλίνει.

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n)$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ συγκλίνει.

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Rightarrow$ η $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ συγκλίνει
(από την προηγούμενη πρόταση για $\lambda = -1$)

Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + b_n) + (-a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει. Αποπρ.

[4] Παρατήρηση (S.O.S.)

Είναι δυνατόν δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ να αποκλίνουν ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ να συγκλίνει. Για παράδειγμα θέτουμε $a_n = (-1)^n$ και $b_n = (-1)^{n+1}$ για $n = 1, 2, 3, \dots$

Η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει μερικό άθροισμα $S_n = (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^n$

Έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0$ (π.χ. $S_2 = (-1)^1 + (-1)^2 = 0$
 $S_4 = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 = 0$)

$$S_{2n-1} = -1$$

άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = 0$ κ' $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1} = -1$

άρα η (S_n) δεν συγκλίνει γιατί αν συνέκλινε, όλες οι υπακόλουθες θα είχαν το ίδιο όριο.

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ έχει μερικό άθροισμα $\sigma_n = (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^n$

Έχουμε $\sigma_{2n} = 0$

$$\sigma_{2n+1} = 1$$

άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{2n} = 0$ κ' $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_{2n+1} = 1$ οπότε η (σ_n) αποκλίνει

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

(4)

Η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ είναι

$$t_n = ((-1)^1 + (-1)^2) + ((-1)^2 + (-1)^3) + \dots + ((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0.$$

[5] Πρόταση

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη.

Απόδειξη:

Επειδή η σειρά συγκλίνει έπεται ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Άρα η (s_n) συγκλίνει.

Κάθε όμως συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Άρα η (s_n) είναι φραγμένη.

[6] Παρατήρηση

Το αντίστροφο της προηγούμενης πρότασης δεν ισχύει. Δηλαδή ενδέχεται για μια ακολουθία (a_n) το μερικό άθροισμα (s_n) να είναι φραγμένο αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ να μην συγκλίνει.

π.χ. $a_n = (-1)^n$, τότε:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \text{ είναι άρτιο} \\ -1 & \text{αν } n \text{ είναι περιττό} \end{cases} \Rightarrow (s_n) \text{ φραγμένη.}$$

Όμως η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπως είδαμε στην παρατήρηση [4] δεν συγκλίνει.

[7] Πρόταση

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $a_n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη:

Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει έπεται ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων (S_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell, \ell \in \mathbb{R}, \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \ell.$$

$$\text{Άρα } \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n-1} = \ell - \ell = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

[8] Παρατηρήσεις

$$\text{ii) Έστω } a_n = \frac{n+1}{2n+1} \text{ τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει μαζί αν συνέκλινε

$$\text{τότε } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

ii) Το αντίστροφο της πρότασης 7 γενικά δεν ισχύει.

Δηλαδή ενδέχεται $a_n \rightarrow 0$ και η σειρά να μην συγκλίνει.

π.χ. 1

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \text{Φανερά } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Παρατηρούμε ότι } S_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n-\text{φορές}} = \\ &= \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \Rightarrow S_n \geq \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε από την πρόταση [5] η ακολουθία

(S_n) είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $\mu > 0$: $|S_n| \leq \mu \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
(συνολ.)

$\Rightarrow S_n \leq \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και επειδή $\sqrt{n} \leq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ τελικά έχουμε

$\sqrt{n} \leq \mu \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \mu^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ άρα από την αρχιμήδεια ιδιότητα.

π.χ. 2. $a_n = \frac{1}{n}$ (αυτή λήγεται αρμονική πρώτη τάξης) ^⑥

φανερὰ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Παρατηρούμε ότι:

$$S_{2n} - S_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{2n}) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \\ = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ ηδηθες } n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Εάν υποθέσουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει τότε η ακολουθία (S_n) συγκλίνει. Θέσουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ell$ (υποακολουθία)

Από τις $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ έπεται $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \ell - \ell \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2} \text{ άποπο.}$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ αποκλίνει.

[9] Πρόταση (κριτήριο - φραγμένως)

Έστω $\alpha_n \geq 0$ για $n=1, 2, \dots$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει αν-ν η ακολουθία $S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ για $n=1, 2, \dots$ των τερικων αδροισματων της είναι άνω φραγμένη.

Απόδειξη:

Αν η σειρά συγκλίνει τότε από την πρόταση [5] έχουμε ότι η (S_n) είναι φραγμένη και επομένως άνω φραγμένη.

Αντίστροφα: έστω ότι η (S_n) είναι άνω φραγμένη

Παρατηρώ ότι $S_{n+1} - S_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \alpha_{n+1}) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) =$

$$= a_{n+1} > 0 \Rightarrow S_{n+1} > S_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (S_n) \uparrow$$

Αφού η (S_n) είναι $\uparrow$ και άνω φραγμένη έπεται ότι συγκλίνει.

Αφού η (S_n) συγκλίνει $\Rightarrow$ η (a_n) συγκλίνει.

[10] Πρόβλημα

Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$

- Αν $k > 1$ συγκλίνει
- Αν $k \leq 1$ αποκλίνει

Απόδειξη:

$$\text{Έστω } a_n = \frac{1}{n^k} > 0 \quad \forall n$$

- Για να δείξω ότι η σειρά συγκλίνει όταν $k > 1$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση αρκεί να δείξω ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη.

$$\text{Φανερά } S_n = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k}$$

Ηφού $k > 1$ και αμέσως έπεται ότι $k \geq 2$.

Αν m είναι φυσικός με $m \geq 2$ τότε

$$\frac{1}{m^2} < \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}$$

$$\forall m \geq 2$$

Εφαρμόζουμε αυτών των ανισώσεων για $m = 2, 3, \dots, n$

~~$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$~~

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$\vdots$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

(+)

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow$$

$$\cancel{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 \Rightarrow$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2. \quad (*)$$

Αφού $k \geq 2$ έχουμε:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \stackrel{(*)}{<} 2 \Rightarrow$$

$$S_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα η S_n είναι άνω φραγμένη και άρα η σειρά συγκλίνει.

- Αν $k \leq 1$ θα δείξουμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων S_n δεν είναι άνω φραγμένη.

$$\text{Φανερό } S_n = \frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{n^k} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (**)$$

αφού $k \leq 1$.
Υποθέτω ότι η S_n είναι άνω φραγμένη, τότε από τη **(**)** έπεται ότι η ακολουθία $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ είναι επίσης άνω φραγμένη.

$$\text{Φανερό } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow b_n < b_{n+1} \quad \forall n$$

Άρα η b_n είναι $\uparrow$ και αφού είναι και άνω φραγμένη έπεται ότι συγκλίνει.

Αφού η b_n συγκλίνει, είναι Cauchy.

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ οπότε και για $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$ υπάρχει

$$n_0 \in \mathbb{N} : |b_n - b_m| < \frac{1}{3} \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Η παραπάνω φανερά ισχύει και για $n=2m$.

$$\text{Άρα } |b_{2m} - b_m| < \frac{1}{3} \Rightarrow \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} \right) \right| < \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} \right| < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} < \frac{1}{3} \quad (***) \textcircled{9}$$

Παρατηρώ ότι $\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m} \geq \underbrace{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m}}_{\text{πλήθος } m} =$

$$= m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m} < \frac{1}{3} \Rightarrow (***)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{3} \text{ άτοπο.}$$

Άρα η S_n δεν είναι άνω φραγμένη και επομένως η αντιστοίχη σειρά αποκλίνει.

[11] Κριτήριο Cauchy

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 , ώστε

$$|\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \dots + \alpha_n| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0.$$

Απόδειξη

Η σειρά συγκλίνει αν-ν s_n συγκλίνει.

Η (s_n) συγκλίνει αν-ν είναι Cauchy. Η (s_n) είναι Cauchy

$$\text{αν-ν } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : |s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0. \Leftrightarrow$$

$$\left| (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m + \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) \right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \dots + \alpha_n| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0$$

[12] Ορισμός

Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \text{ συγκλίνει.}$$

[13] Πρόταση

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη:

Αφού η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει απόλυτα έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ συγκλίνει.

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ συγκλίνει από το κριτήριο Cauchy
 έπεται ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : | |\alpha_{m+1}| + |\alpha_{m+2}| + \dots + |\alpha_n| | < \varepsilon$
 $\forall n > m \geq n_0 \Leftrightarrow |\alpha_{m+1}| + |\alpha_{m+2}| + \dots + |\alpha_n| < \varepsilon \forall n > m \geq n_0$

Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι:

$$|\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \dots + \alpha_n| \leq |\alpha_{m+1}| + |\alpha_{m+2}| + \dots + |\alpha_n|$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \dots + \alpha_n| < \varepsilon \forall n > m \geq n_0$

Άρα από το κριτήριο Cauchy η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

Γιατί δεν ισχύει το αντίστροφο θα το δούμε στο...

Παρατήρηση

Στο προηγούμενο θώρημα είδαμε ότι αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει και απλά. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μία συγκλίνουσα σειρά ~~θετικών~~ ^{μη-αρνητικών} όρων. (δηλ. $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Έστω (ε_n) αυθαίρετη ακολουθία που παίρνει το πολύ δύο τιμές, τις $+1, -1$. Προφανώς υπάρχουν άπειρες τέτοιες ακολουθίες.

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$.

Παρατηρούμε ότι
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n| \cdot |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
 η οποία συγκλίνει.

Άρα συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |\varepsilon_n a_n|$, δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ συγκλίνει απόλυτα άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n$ συγκλίνει.

Έτσι από μια συγκλίνουσα σειρά μη-αρνητικών όρων έχουμε φτιάξει άπειρες συγκλίνουσες σειρές που δεν είναι μη αρνητικών όρων.

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, όπως έχουμε δείξει στο πρόβλημα [10] συγκλίνει. Φανερά $\frac{1}{n^2} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Αν (ε_n) όπως πριν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^2}$ συγκλίνει.

[14] Πρόταση (κριτήριο Leibniz)

Αν (a_n) μια φθίνουσα ακολουθία μη-αρνητικών όρων με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει (κάθε τέτοια σειρά λέγεται εναλλασσόμενη).

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_n = (-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n \text{ συγκλίνει.}$$

Θα αποδείξουμε ότι οι υπακολουθίες $(S_{2n}), (S_{2n-1})$ συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + \dots + (-1)^{2n+1} a_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} - \\ &\quad - [(-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + \dots + (-1)^{2n+1} a_{2n}] = \end{aligned}$$

$$= (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0 \text{ για } (\alpha_n) \downarrow \quad (12)$$

$$\Rightarrow S_{2n+2} - S_{2n} \geq 0 \Rightarrow S_{2n+2} \geq S_{2n} \Rightarrow (S_{2n}) \uparrow$$

$$\begin{aligned} \bullet S_{2n+1} - S_{2n-1} &= \frac{(-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + \dots + (-1)^{2n} a_{2n-1}}{1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} - \left[\frac{(-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + \dots + (-1)^{2n} a_{2n-1}}{1} \right] = \\ &= (-1)^{2n+1} a_{2n} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0 \text{ για } (\alpha_n) \downarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{2n+1} - S_{2n-1} \leq 0 \Rightarrow S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \Rightarrow (S_{2n-1}) \downarrow$$

$$\begin{aligned} \bullet S_{2n} - S_{2n-1} &= \frac{(-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + \dots + (-1)^{2n} a_{2n-1}}{1} - \left[\frac{(-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 + \dots + (-1)^{2n} a_{2n-1}}{1} \right] = \\ &= (-1)^{2n+1} a_{2n} = -a_{2n} \leq 0 \Rightarrow S_{2n} - S_{2n-1} \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{2n} \leq S_{2n-1} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Από: } (S_{2n}) \uparrow \Rightarrow S_{2n} \geq S_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_{2n} \geq (-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{2+1} a_2 = a_1 - a_2$$

$$(S_{2n-1}) \downarrow \Rightarrow S_{2n-1} \leq S_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S_{2n-1} \leq (-1)^{1+1} a_1 = a_1$$

Έτσι η (*) δίνει:

$$a_1 - a_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα η (S_{2n}) είναι άνω φραγμένη από το a_1 και η (S_{2n-1}) είναι κάτω φραγμένη από το $a_1 - a_2$.

Η (S_{2n-1}) ως $\downarrow$ και φραγμένη συγκλίνει σε κάποιο $l_1 \in \mathbb{R}$

Η (S_{2n}) ως $\uparrow$ και φραγμένη συγκλίνει σε κάποιο $l_2 \in \mathbb{R}$

Από την σχέση • έχουμε $S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_{2n}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_{2n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_2 - l_1 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2.$$

Παρατήρηση: Έχουμε αποδείξει ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει και απλά, και έχουμε αποδείξει επιπλέον ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

Σχετικώς είναι το επόμενο παράδειγμα.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ σύμφωνα με το κριτήριο

Leibniz συγκλίνει γιατί $a_n = \frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

$(a_n) \downarrow$ και $\lim_n a_n = 0$.

Όμως $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει σύμφωνα με το πρόβλημα [10]

Άρα έχουμε μια σειρά που συγκλίνει ~~απλά~~ ^{απλά} και δεν συγκλίνει ~~απόλυτα~~ ^{απόλυτα}

[15] Πρόταση (κριτήριο σύγκρισης)

Έστω $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε

(i) αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, και

(ii) αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει, έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει

Απόδειξη:

Έστω (S_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

και (σ_n) η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αφού $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n \leq \sigma_n$: *

(i) Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει έπεται ότι η (σ_n) είναι άνω φραγμένη και από την * η (S_n) είναι άνω φραγμένη. Αφού η (S_n) είναι άνω φραγμένη και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι θετικών όρων έπεται ότι συγκλίνει.

(12) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ δεν αποκλίνει τότε συγκλίνει και από το (2) (14)

Έχουμε ότι συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, άρα από την υπόθεση.

Σχόλιο: Το κριτήριο εξακολουθεί να ισχύει και αν $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$.

[16] Πρόταση (γεωμετρική σειρά)

Αν $|\theta| < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$ συγκλίνει στο άθροισμα $\frac{\theta}{1-\theta}$.

Απόδειξη:

Εδώ έχουμε $a_n = \theta^n$. Το κριτικό άθροισμα της σειράς είναι

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \theta + \theta^2 + \dots + \theta^n = \theta (1 + \theta + \dots + \theta^{n-1}) = \theta \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta}$$

$$= \theta \cdot \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta \cdot \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta} =$$

$$= \frac{\theta}{1 - \theta} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \theta^n) = \frac{\theta}{1 - \theta} \cdot (1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta^n) = \frac{\theta}{1 - \theta} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

Σχόλιο: Αν $\theta \geq 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$ αποκλίνει.

[17] Πρόταση

Έστω (a_n) μια ακολουθία φυσικών αριθμών, $0 \leq a_n \leq 9 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό α , με $0 \leq \alpha \leq 1$.

Απόδειξη Αφού $0 \leq a_n \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$

Θέτω $b_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$, τότε από την προηγούμενη πρόταση η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει στο $9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$.

Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ συγκλίνει σε έναν αριθμό που ανήκει στο $[0, 1]$.

Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \geq 0$, τότε:

- i) Αν $0 \leq \ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει
- ii) Αν $\ell > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ αποκλίνει.
- iii) Αν $\ell = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Απόδειξη:

(i) Επιλέξω $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$

$$\text{Αφού } \lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow \exists n_0: |\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \frac{1-\ell}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{a_n} - \ell < \frac{1-\ell}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1+\ell}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Theta \text{ έστω } \Theta = \frac{1+\ell}{2}. \text{ Επειδή } 0 \leq \ell < 1 \Rightarrow 1 \leq \ell+1 \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\ell+1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \Theta < 1 \quad (1)$$

$$\text{Αρα } \sqrt[n]{a_n} < \Theta \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < \Theta^n \quad \forall n \geq n_0 \quad (2)$$

Από την (1) έχουμε ότι η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \Theta^n$ συγκλίνει (βλέπε πρόταση [16])

Από την (2) σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης (πρόταση [15]) έχουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

ii) Επιλέξω $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$.

$$\text{Αφού } \lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \Rightarrow \exists n_0: |\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \frac{\ell-1}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\frac{1-\ell}{2} < \sqrt[n]{a_n} - \ell < \frac{\ell-1}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1-\ell}{2} < \sqrt[n]{a_n} - \ell \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\ell+1}{2} < \sqrt[n]{a_n} \quad \forall n \geq n_0$$

Θ έτω

$$\Theta = \frac{\ell+1}{2}. \text{ Επειδή } \ell > 1 \Rightarrow \ell+1 > 2 \Rightarrow \frac{\ell+1}{2} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Theta > 1$$

Η προηγούμενη ζώρα γράφεται

$$\Theta < \sqrt[n]{\alpha_n} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \alpha_n > \Theta^n \quad \forall n \geq n_0 \quad (3)$$

Επειδή $\Theta > 1$ έπεται ότι η γεωμετρική αποκλίνει, δηλαδή η

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \Theta^n$ αποκλίνει και από την (3) και το κριτήριο σύγκρισης

έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ αποκλίνει.

ii) Έστω $\alpha_n = \frac{1}{n}$, τότε $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, από πρόταση [10]

Έστω $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, τότε $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει από πρόταση [10].

Άρα αν $\ell = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε ως προς την σύγκλιση ή την απόκλιση.

[19] Πρόταση (Κριτήριο λόγου του d'Alembert)

Έστω (α_n) ακολουθία θετικών όρων με $\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \ell > 0$, τότε:

- i) Αν $0 \leq \ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει
- ii) Αν $\ell > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ αποκλίνει
- iii) Αν $\ell = 1$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Απόδειξη:

(i) Επιλέγω $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$

Αφού $\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \ell \Rightarrow \exists n_0 : \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \ell \right| < \frac{1-\ell}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \ell < \frac{1-\ell}{2} \Rightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < \frac{1+\ell}{2} \quad \forall n \geq n_0$

Θέτω $\Theta = \frac{1+\ell}{2}$. Επειδή $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow 1 \leq \ell+1 \leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\ell+1}{2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \Theta < 1$

Άρα $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < \Theta \Rightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} < \Theta \Rightarrow \alpha_{n+1} < \Theta \alpha_n \quad \forall n \geq n_0$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα για $n = n_0, n_0+1, \dots, n$

~~$\alpha_{n_0+1} < \Theta \cdot \alpha_{n_0}$~~

~~$\alpha_{n_0+2} < \Theta \cdot \alpha_{n_0+1}$~~

$\vdots$

~~$\alpha_{n+1} < \Theta \cdot \alpha_n$~~ (.)

$\alpha_{n+1} < \Theta^{n-n_0+1} \alpha_{n_0} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \alpha_n < \Theta^{n-n_0} \alpha_{n_0} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_n < \Theta^{n-n_0} \frac{\alpha_{n_0}}{\Theta^{n_0}} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \alpha_n < \frac{\alpha_{n_0}}{\Theta^{n_0}} \cdot \Theta^n \quad \forall n \geq n_0 \quad (1)$

Επειδή $\frac{1}{2} \leq \Theta < 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty} \Theta^n$ συγκλίνει άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n_0}}{\Theta^{n_0}} \Theta^n$

συγκλίνει και από την (1) και το κριτήριο σύγκρισης έπεται ότι

η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει

$$ii) \quad E_{\pi_1} \lambda_{\varepsilon} \omega \quad \varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0.$$

$$\text{Aufg 10} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \ell \Rightarrow \exists n_0: \left| \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \ell \right| < \frac{\ell-1}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-\ell}{2} < \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} - \ell \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{\ell+1}{2} < \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\ominus \dot{\Sigma}_{200} \quad \ominus = \frac{\ell+1}{2} \quad \text{Eπεδν} \quad \ell > 1 \Rightarrow \ell+1 > 2 \Rightarrow \frac{\ell+1}{2} > 1 \Rightarrow \mathcal{D} > 1$$

Η προηγούμενη ώρα διαφέρει

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > \vartheta \Rightarrow \alpha_{n+1} > \vartheta \alpha_n \quad \forall n \geq n_0$$

Εφαρμόζουμε την παραπάνω ανισότητα για $n = n_0, n_0+1, \dots, n$

$$\alpha_{n_0+1} > \mathcal{D} \cdot \alpha_{n_0}$$

$$\cancel{\alpha_{n_0+2}} > \mathcal{D} \cdot \cancel{\alpha_{n_0+1}}$$

•
•
•

$$\frac{\alpha_{n+1} > \beta \cdot \alpha_n}{\alpha_{n+1} > \beta^{n-n_0+1} \alpha_{n_0}} \quad (.)$$

$$\Rightarrow \alpha_n > \theta^n \frac{\alpha_{n_0}}{\theta^{n_0}} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \alpha_n > \frac{\alpha_{n_0}}{\theta^{n_0}} \theta^n \quad \forall n \geq n_0 \quad (2)$$

Επειδή $\theta > 1$ η $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$ αποκλίνει άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{n_0}}{\theta^{n_0}} \theta^n$

18
αποκρίνει: και από την ② και το κριτήριο σύμφωνας έλγεται ότι

$$n \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \propto \text{τοκλίει}$$

iii) Έστω $\alpha_n = \frac{1}{n}$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{αποκλίνει από πείραμα [10]}$$

Εξω $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, τότε $\alpha_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ και η
 σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει στο $\pi^2/6$ [10].

Άρα αν $\ell=1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε ως προς τη σύγκλιση ή την απόκλιση.

Η αρχή μεταφοράς του Heine για τη συνέχεια

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ εάν και μόνο εάν για κάθε ακολουθία (x_n) με όρους στο A για την οποία ισχύει

$\lim x_n = x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$

Η αρχή μεταφοράς του Heine για τη σύγκλιση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ισχύει το επόμενο:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ αν-ν $\forall$ ακολουθία (x_n) με όρους στο A

για την οποία ισχύει $\lim x_n = x_0$ η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο l .

Η πυκνότητα των ρηζών στους πραγματικούς

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία ρηζών (r_n) ώστε

$$\lim r_n = x.$$

Η πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία άρρητων (α_n) ώστε

$$\lim \alpha_n = x.$$

1. (συνάρτηση Dirichlet)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Να δείχτεί ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$

Λύση:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συνέχειας της f .

Από την πυκνότητα των ρητών σε $\mathbb{R}$ πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία ρητών ώστε $\lim r_n = x_0$

Ανάλογα από την πυκνότητα των αρήτων σε $\mathbb{R}$ πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία αρήτων (a_n) ώστε $\lim a_n = x_0$

Αφού η f είναι συνεχής σε x_0 απ' την αρχή μεταφοράς του

Heine έπεται ότι $\lim f(r_n) = f(x_0)$ και $\lim f(a_n) = f(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim 1 = f(x_0) \text{ και } \lim 0 = f(x_0) \Rightarrow 1 = f(x_0) \text{ και } 0 = f(x_0)$$

Άτοπο.

Άρα $\nexists x \in \mathbb{R}$ ώστε f συνεχής. Άρα η f είναι ασυνεχής.

2. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

είναι συνεχής μόνο σε 0.

Λύση:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συνέχειας της f .

Από την πυκνότητα των ρητών σε $\mathbb{R}$ πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία ρητών ώστε $\lim r_n = x_0$

Ανάλογα από την πυκνότητα των αρήτων σε $\mathbb{R}$ πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία αρήτων (a_n) ώστε $\lim a_n = x_0$

Αφού η f είναι συνεχής στο x_0 από την αρχή μεταφοράς (21) του Heine έπεται ότι $\lim f(r_n) = f(x_0)$ και $\lim f(\alpha_n) = f(x_0) \Rightarrow \lim r_n = f(x_0)$ και $\lim \alpha_n = f(x_0) \Rightarrow x_0 = f(x_0)$ και $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$.

Άρα το μοναδικό σημείο συνέχειας της f είναι το 0.

3. Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x+3 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Λύση:

Έστω x_0 σημείο συνέχειας, της f .

Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $\lim r_n = x_0$

Από την πυκνότητα των αρήτων στους πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία αρήτων (α_n) ώστε $\lim \alpha_n = x_0$

Από την αρχή μεταφοράς του Heine έπεται ότι $\lim f(r_n) = f(x_0)$ και $\lim f(\alpha_n) = f(x_0) \Rightarrow \lim 2x = f(x_0)$ και $\lim (x+3) = f(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x_0) = 2x \text{ και } f(x_0) = x+3 \Rightarrow 2x_0 = x_0+3 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Άρα το μοναδικό σημείο συνέχειας της f είναι το $x=3$.

4. Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Λύση:

Έστω x_0 σημείο συνέχειας της f .

Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία ρητών (r_n) ώστε $\lim r_n = x_0$

Από την πυκνότητα των αρήτων στους πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία αρήτων (α_n) ώστε $\lim \alpha_n = x_0$

Από την αρχή μεταφοράς του Heine έπεται ότι

$$\lim f(r_n) = f(x_0) \text{ και } \lim f(\alpha_n) = f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim x_0 = f(x_0) \text{ και } \lim x_0^2 = f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = x_0 \text{ και } f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = x_0^2 \Rightarrow x_0(x_0 - 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = 1$$

Άρα η f είναι συνεχής στα $x=0, x=1$.

5. Να δείχτεί ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$

Απόδειξη:

Έστω ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Τότε $\forall$ ακολουθία (x_n) τέ $(x_n) \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ που είναι ζέταια
ώστε $x_n \rightarrow 0$, από την αρχή μεταφοράς του Heine έχουμε
ότι το $\lim \cos \frac{1}{x_n}$ υπάρχει

Θεωρώ τις ακολουθίες $x'_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0$

$$x''_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$$

$$\text{Άρα } \lim \cos \frac{1}{x'_n} = \lim \cos \frac{1}{x''_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim \cos \frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \lim \cos \frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim \cos(2\pi n) = \lim \cos(2\pi n + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim 1 = \lim 0 \Rightarrow 1 = 0 \text{ Άνωτο.}$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει

6. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Τότε (i) Δεν υπάρχει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, και

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (x f(x)) = 0$

Λύση:

(i) Έστω ότι το παραπάνω όριο υπάρχει.

Τότε $\forall$ ακολουθία (x_n) που είναι ζέωια ώστε $x_n \rightarrow 0$. Από την αρχή μεταφοράς του Heine έχουμε ότι το

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ υπάρχει

Θεωρώ μια ακολουθία ριζών ~~που συγκλίνει στο 0~~

(r_n) με $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$

και μια ακολουθία αρίτων ~~(α_n)~~ με $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$

ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) \Rightarrow \lim 1 = \lim 0 \Rightarrow 1 = 0$ Άωπο. Άρα το όριο δεν υπάρχει

(ii) Η συνάρτηση $x f(x)$ έχει τύπο $x f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Θέσω $g(x) = x f(x)$

Θα αποδείξουμε ότι το όριο της g στο 0 υπάρχει.

Αρκούμε να δείξουμε ότι η g είναι συνεχής

Έστω x_0 σημείο συνέχειας της g .

Τότε από την πυκνότητα των ριζών στους πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία ριζών (r_n) ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_0$

Από την πυκνότητα των αρίτων στους πραγματικούς έπεται ότι υπάρχει ακολουθία αρίτων (α_n) ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = x_0$

Από την αρχή μεταφοράς του Heine έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} g(r_n) = g(x_0)$

και $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\alpha_n) = g(x_0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_0 = g(x_0)$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = g(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x_0) = x_0$ και $g(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$. Άρα η g ~~είναι~~ είναι συνεχής ακριβώς σε ένα σημείο, το $x = 0$, και άρα $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x f(x)) = 0$.

Κριτήριο σύγκρισης

~~Έστω $a_n \geq 0$ για $n = 1, 2, \dots$. Τότε η σειρά $\sum a_n$~~

Χρησιμοποιούμε κατά κανόνα τη σύγκλιση και την απόκλιση της αρμονικής σειράς :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \begin{cases} < +\infty & \text{αν } k > 1 \\ = +\infty & \text{αν } k \leq 1 \end{cases}$$

Επίσης χρησιμοποιούμε την γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega^n = \begin{cases} = \frac{1}{1-\omega} & \text{αν } |\omega| < 1 \\ = +\infty & \text{αν } \omega \geq 1. \end{cases}$$

1. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο $a_n = \frac{n}{2^n(n+1)}$

Λύση: φανερά : $0 < a_n = \frac{n}{2^n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ συγκλίνει γιατί είναι γεωμετρική με $\omega = \frac{1}{2}$

Άρα από κριτήριο σύγκρισης η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

2. Να μελετηθεί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου $a_n = \frac{\ln n}{n}$

Λύση

Για $n \geq 3$ έχουμε $\ln(n) \geq \ln 3 > \ln e = 1 \Rightarrow$

$$\ln(n) > 1 \quad \forall n \geq 3$$

$$0 \leq a_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 3$$

$$\text{Ομως } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

3. Να μελετηθεί η σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n^3+1}$ (δίνεται $\ln(n) \leq n-1$) (25)

Λύση φανερὰ $\ln(n) \leq n-1 < n$, άρα:

$$0 \leq \alpha_n = \frac{\ln(n)}{2n^3+1} < \frac{n}{2n^3+1} < \frac{n}{2n^3} = \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Ομως } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

4. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο

$$\alpha_n = \frac{1}{n^2+1}$$

Λύση:

$$0 < \alpha_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

~~Ας~~ Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα από το κριτήριο σύγκρισης

η ~~σειρά~~ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

5. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο:

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{n^2+n+1}$$

Λύση:

$$(2n-1 \geq n \Leftrightarrow n \geq 1 \text{ ισχύει})$$

$$0 < \alpha_n = \frac{2n-1}{n^2+n+1} > \frac{n}{n^2+n+1} > \frac{n}{n^2+n^2+n^2} = \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n}$$

Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ αποκλίνει.

6. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο:

(26)

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n-1}$$

Λύση:

$$0 < \alpha_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n-1} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n^2+n+1} = \frac{2\sqrt{n}}{n^2+n-1} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^2+n-n} = 2 \frac{\sqrt{n}}{n^2} =$$

$$= 2 \frac{n^{1/2}}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^{2-1/2}} = 2 \cdot \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \quad \text{γιατί} \quad k = \frac{3}{2} > 1.$$

άρα και $\sum \alpha_n < \infty$

7. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο

$$\alpha_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{n^2+n+1}} \quad \left(\text{Δίνεται} \quad \sin \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n} \right)$$

Λύση:

$$0 \leq \alpha_n = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n^2+n+1}} < \frac{\frac{\pi}{n}}{\sqrt{n^2}} = \frac{\frac{\pi}{n}}{n} = \frac{\pi}{n^2} = \pi \cdot \frac{1}{n^2}$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει

8. Να μελετηθεί η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n}$$

Λύση:

$$0 < \alpha_n = \frac{4n^2-n+3}{n^3+2n} < \frac{4n^2+3}{n^3+2n} \leq \frac{4n^2+3n^2}{n^3+2n} = \frac{7n^2}{n^3+2n} = \frac{7n}{n^2+2} < \frac{7n}{n^2} =$$

$$= \frac{7}{n} = 7 \cdot \frac{1}{n}$$

Αυτή αποκλίνει οπότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα για την $\sum (\alpha_n)$. Άρα πρέπει να πάμε με ανάποδες ανισότητες.

$$0 < \alpha_n = \frac{4n^2 - n + 3}{n^3 + 2n} \gg \frac{4n^2 - n^2 + 3}{n^3 + 2n} = \frac{3n^2 + 3}{n^3 + 2n} = \frac{3(n^2 + 1)}{n^3 + 2n} > \quad (27)$$

$$\frac{3n^2}{n^3 + 2n} = \frac{3n}{n^2 + 2} > \frac{3n}{n^2 + 2n^2} = \frac{3n}{3n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Ομως} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$$

Κριτήρια Cauchy και D'Alembert

Το κριτ. D'Alembert εφαρμόζεται κάτ' κανόνα όταν η (α_n) περιέχει παραγοντικά

Γενικά αν στον όρο της ακολουθίας υπάρχουν συνάρσεις εις την η μπορώ να παίξω και με Cauchy και με D'Alembert
Το κριτήριο Cauchy είναι ισχυρότερο από κριτήριο D'Alembert

9. Να μελετηθεί η σειρά με $\alpha_n = \frac{2^n}{n^{10}}$

Λύση:

με κριτήριο Cauchy $\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{10}}} = \lim \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^{10}}} =$
 $= \lim \frac{2}{\frac{n^{10}}{\sqrt[n]{n^{10}}}} = 2 \cdot \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^{10}} = 2 \cdot \frac{1}{(\lim \sqrt[n]{n})^{10}} = \frac{2}{1} = 2 > 1$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty.$

άλλη λύση (με D'Alembert)

$$\lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}}{\frac{2^n}{n^{10}}} = \lim \frac{n^{10} \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)^{10}} = \lim \left(\frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n^{10}}{(n+1)^{10}} \right) =$$

$$= \lim \left(2 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^{10} \right) = 2 > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$$

10. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο:

(28)

$$\alpha_n = \frac{2^n}{n!}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n \cdot (n+1)!} = \\ &= \lim \left(2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)} \right) = \lim \frac{2}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty \end{aligned}$$

11. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο $\alpha_n = \frac{n}{3^{n/2}}$

Λύση:

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[n]{\alpha_n} &= \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3^{n/2}}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3^{n/2}}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{3^{n/2/n}} = \\ &= \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 \quad \text{άρα από κριτήριο Cauchy} \quad \text{η} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty \end{aligned}$$

12. Να μελετηθεί η σειρά με γενικό όρο:

$$\alpha_n = \frac{n!}{n^n}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \lim \sqrt[n]{\alpha_n} &= \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \neq \\ \neq \lim \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{n^n \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \\ &= \lim \frac{n^n \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{(n+1)^{n+1} \cdot \cancel{n!}} = \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty \end{aligned}$$

13. Να μελετηθεί η σειρά: $\alpha_n = \frac{10^n}{n!}$

(29)

Λύση:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1} \cdot n!}{10^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1} \cdot n!}{10^n \cdot (n+1) \cdot n!}$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

14. Να μελετηθεί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Λύση:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

Μια άσκηση στις ακολουθίες που συνήδως πέφτει

Να βρεθεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7 \cdot n^2 + 3n + 5}$

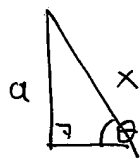
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Θεωρούμε γνωστά τα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \text{Arctan} x + C$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} =$$



$$\mu\eta\theta = \frac{a}{x} \Rightarrow$$

~~ε~~ Θεωρούμε $x = \frac{a}{\mu\eta\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{\mu\eta\theta}$$

$$dx = a \cdot \left(\frac{1}{\mu\eta\theta} \right)' d\theta \Rightarrow$$

$$dx = a \cdot \frac{-\sec^2\theta}{\mu\eta^2\theta} d\theta$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{\mu\eta\theta}\right)^2 - a^2}} \cdot \frac{-\sec^2\theta}{\mu\eta^2\theta} d\theta =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - a^2\mu\eta^2\theta}{\mu\eta^2\theta}}} \cdot \frac{-\sec^2\theta}{\mu\eta^2\theta} d\theta = \int \frac{\mu\eta\theta}{\sqrt{a^2(1-\mu\eta^2\theta)}} \cdot \frac{-\sec^2\theta}{\mu\eta^2\theta} d\theta =$$

$$= \int \frac{\cancel{\mu\eta\theta}}{\cancel{a^2} \cdot \cancel{\sec^2\theta}} \cdot \frac{-\sec^2\theta}{\mu\eta^2\theta} d\theta = - \int \frac{1}{a\mu\eta\theta} d\theta = -a \int \frac{1}{\mu\eta\theta} d\theta$$

$$= -\alpha \cdot \int \frac{m_1^2 \frac{\theta}{2} + 6w^2 \frac{\theta}{2}}{2m_1 \frac{\theta}{2} \cdot 6w \frac{\theta}{2}} d\theta =$$

$$= -\alpha \cdot \int \left(\frac{m_1 \frac{\theta}{2}}{26w \frac{\theta}{2}} + \frac{6w \frac{\theta}{2}}{2m_1 \frac{\theta}{2}} \right) d\theta =$$

$$= -\alpha \cdot \int \left(-\frac{1}{6w \frac{\theta}{2}} \cdot (6w \frac{\theta}{2})' + \frac{1}{m_1 \frac{\theta}{2}} \cdot (m_1 \frac{\theta}{2})' \right) d\theta =$$

$$= \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c} =$$

$$= -\alpha \cdot \left(-\ln \left| 6w \frac{\theta}{2} \right| + \ln \left| m_1 \frac{\theta}{2} \right| \right) =$$

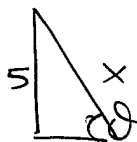
$$= -\alpha \cdot \left(\ln \left| m_1 \frac{\theta}{2} \right| - \ln \left| 6w \frac{\theta}{2} \right| \right) =$$

$$= -\alpha \cdot \ln \left| \frac{m_1 \frac{\theta}{2}}{6w \frac{\theta}{2}} \right| = -\alpha \cdot \ln \left| e \varphi \frac{\theta}{2} \right| + c =$$

$$= \boxed{m_1 \theta = \frac{a}{x} \Rightarrow \theta = \text{Arcsin} \frac{a}{x}} =$$

$$= -\alpha \cdot \ln \left| e \varphi \left(\frac{1}{2} \text{Arcsin} \frac{a}{x} \right) \right| + c.$$

$$I_2 = \int \sqrt{x^2 - 25} dx =$$



$$\sin \theta = \frac{5}{x}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{x}$$

$$dx = 5 \cdot \left(\frac{1}{\sin \theta}\right)' d\theta$$

$$dx = 5 \cdot \frac{-(\cos \theta)' \cdot 1 + 1 \cdot \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$dx = -5 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{5}{\sin \theta}\right)^2 - 25} \cdot \left(-5 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta\right) =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{25}{\sin^2 \theta} - \frac{25 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta}\right)} \cdot \left(-5 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta\right) =$$

$$= - \int \sqrt{\frac{25(1 - \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta}} \cdot 5 \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta =$$

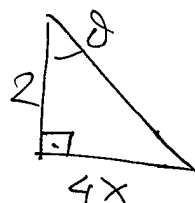
$$= - \int \sqrt{\frac{25 \cdot \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}} \cdot 5 \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$= - \int \frac{5 \cos \theta}{\sin \theta} \cdot 5 \cdot \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = -25 \cdot \int \frac{\cos^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta =$$

$$= -25 \cdot \int \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^3 \theta} d\theta = -25 \left(\int \frac{1}{\sin^3 \theta} d\theta - \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta \right)$$

substitution
wenn

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + 16x^2}}$$



$$\sin \theta = \frac{4x}{r}$$

$$\Rightarrow 2x = \sin \theta$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\theta = \arcsin(2x)$$

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \theta} d\theta$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{4 + 16 \cdot \left(\frac{1}{2} \varepsilon \varphi \vartheta\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4 + \cancel{16} \cdot \frac{1}{4} \cdot \varepsilon \varphi^2 \vartheta}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{4} (1 + \varepsilon \varphi^2 \vartheta)} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{\eta^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta}}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \vartheta}}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{1}{\sin \vartheta}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{4} \int \cancel{\sin \vartheta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sin \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{\sin \vartheta}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{\sin \vartheta}{1 - \eta^2 \vartheta} d\vartheta =$$

$$= \left(\begin{array}{l} \vartheta \varepsilon \eta \vartheta \quad \eta \vartheta = u \Rightarrow \sin \vartheta \cdot d\vartheta = du \end{array} \right) =$$

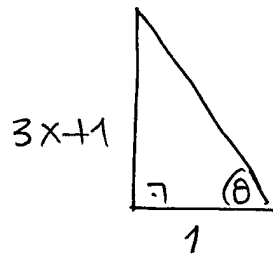
$$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{1 - u^2} du = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(-\ln|1-u| + \ln|1+u| \right) + c = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \ln \left| \frac{1 + \eta \vartheta}{1 - \eta \vartheta} \right| + c = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1 + \sin(\operatorname{Arctan}(2x))}{1 - \sin(\operatorname{Arctan}(2x))} \right| + c$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}}$$

$$9x^2 + 6x + 2 = 9x^2 + 6x + 1 + 1 = (3x+1)^2 + 1$$



$$\varepsilon \varphi \theta = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{\varepsilon \varphi \theta - 1}{3}$$



$$dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon \omega^2 \theta}$$

$$\theta = \text{Arc tan}(3x+1)$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x+1)^2 + 1}} = \int \frac{1}{\sqrt{(3x+1)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon \omega^2 \theta} d\theta =$$

$$= \int \frac{1}{1+\theta^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon \omega^2 \theta} d\theta = \int \frac{1}{1+\varepsilon \varphi \theta^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon \omega^2 \theta} d\theta =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon \omega^2 \theta + 4\mu^2 \theta}{\varepsilon \omega^2 \theta}}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon \omega^2 \theta} d\theta = \int \cancel{\varepsilon \omega \theta} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\varepsilon \omega^2 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\varepsilon \omega \theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\varepsilon \omega \theta}{\varepsilon \omega^2 \theta} d\theta = \frac{1}{3} \int \frac{\varepsilon \omega \theta}{1 - \mu^2 \theta} d\theta =$$

$$= \left(\varepsilon \omega \theta \quad u = \mu \theta \Rightarrow \varepsilon \omega \theta d\theta = du \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) du =$$

$$= \frac{1}{6} \left(-\ln|1-u| + \ln|1+u| \right) + C$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{|1+u|}{|1-u|} + C =$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{|1+u \delta|}{|1-u \delta|} + C = \frac{1}{6} \ln \frac{|1+u \operatorname{Arctan}(3x+1)|}{|1-u \operatorname{Arctan}(3x+1)|} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx =$$

$$x^2 - x + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{}$$