

1. Ορισμός

Κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και με τιμές στο $\mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών

Συμβολισμός: $a: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

Για τις τιμές αυτής της συνάρτησης αντί να γράφω $a(1), a(2), \dots, a(n), \dots$ γράφω $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Ιδιαίτερα ο όρος a_n λέγεται n -οσώς ή γενικός

Συνήθως γράφουμε $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ή πιο απλά (a_n) για να συμβολίσουμε μια ακολουθία.

2. Γνωρίζουμε μια ακολουθία αν συνήθως γνωρίζουμε το γενικό της όρο π.χ. $a_n = \frac{n+1}{n^2+4}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Φανερά } a_1 = \frac{2}{5}$$

$$a_2 = \frac{3}{8}$$

ε.ο.κ.

Υπάρχουν όμως ακολουθίες που ορίζονται με αναδρομικό τρόπο

$$\text{π.χ. 1: } a_1 = 1 \quad \text{και} \quad a_{n+1} = 7a_n - 3 \quad \text{για } n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{τότε } a_2 = 7a_1 - 3 = 7 \cdot 1 - 3 = 4$$

$$a_3 = 7 \cdot a_2 - 3 = 28 - 3 = 25$$

ε.ο.κ.

$$\text{π.χ. 2: } a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (\text{ακολουθία Fibonacci})$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2$$

Γενικά είναι καλό σε κάθε ακολουθία να γνωρίζω τον γενικό όρο

Ετσι στις περιπτώσεις αναδρομικών ~~ακολουθιών~~ ακολουθιών έχουμε πάντα σαν στόχο να βρούμε το γενικό όρο.

3. Φραγμένες ακολουθίες

Έστω (α_n) μια ακολουθία

- Η (α_n) λέγεται άνω φραγμένη αν υπάρχει σταθερός αριθμός M ώστε $\alpha_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Η (α_n) λέγεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει σταθερός αριθμός m ώστε $m \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Η (α_n) λέγεται φραγμένη αν είναι κατά πάνω και κατά κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν M, m σταθεροί ώστε:

$$m \leq \alpha_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Η α_n λέγεται απόλυτα φραγμένη εάν υπάρχει $\vartheta > 0$ σταθερό ώστε $|\alpha_n| \leq \vartheta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Θεώρημα: Η ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη αν-ν είναι απόλυτα φραγμένη

Αποδείξη

$(\Rightarrow)$ Έστω (α_n) φραγμένη, τότε $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq \alpha_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\ominus \text{ Έστωμε } \vartheta = \max(|M|, |m|) \Rightarrow \begin{cases} \vartheta \geq |M| \\ \vartheta \geq |m| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\vartheta \leq M \leq \vartheta \\ -\vartheta \leq m \leq \vartheta \end{cases}$$

Τότε:

$$-\vartheta \leq m \leq \alpha_n \leq M \leq \vartheta \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$-\vartheta \leq \alpha_n \leq \vartheta \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |\alpha_n| \leq \vartheta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα η (α_n) είναι απόλυτα φραγμένη.

$(\Leftarrow)$ Έστω (α_n) απόλυτα φραγμένη, τότε $\exists \vartheta > 0 : |\alpha_n| \leq \vartheta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{matrix} -\vartheta \leq \alpha_n \leq \vartheta \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ m \qquad \qquad M \end{matrix} \quad \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{φρ.}} (\alpha_n) \text{ φραγμένη}$$

4. Παραδείγματα

α) $\alpha_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$

Αφού $n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 < \alpha_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (\alpha_n)$ φραγμένη.

β) $\alpha_n = \frac{3\sin n - 4\cos n}{n^5}, n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι είναι φραγμένη

$$|\alpha_n| = \frac{1}{n^5} \cdot |3\sin n - 4\cos n| \leq \frac{1}{n^5} (3|\sin n| + 4|\cos n|) \leq \frac{1}{n^5} \cdot (3+4) = \frac{7}{n^5} \leq 7 \cdot \frac{1}{n^5} \leq 7 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\alpha_n| \leq 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα (α_n) φραγμένη.

γ) $\alpha_n = \frac{5\sin n + 7}{n^8 + 1}$

$$|\alpha_n| = \frac{1}{n^8 + 1} \cdot |5\sin n + 7| \leq \frac{1}{n^8 + 1} \cdot (5|\sin n| + 7) \leq \frac{1}{n^8 + 1} (5+7) = 12 \cdot \frac{1}{n^8 + 1} \leq 12 \cdot \frac{1}{n^8} \leq 12 \cdot 1 = 12 \Rightarrow |\alpha_n| \leq 12$$

Άρα (α_n) φραγμένη.

δ) $\alpha_n = \frac{n!}{n^n}$

φανερὰ $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Παρατηρώ ότι: $\alpha_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n^n} \leq \frac{\overbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}^{\text{παιθρος } n}}{n^n} = \frac{n^n}{n^n} = 1 \Rightarrow$

$\alpha_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Επομένως $0 < \alpha_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\alpha_n)$ φραγμένη.

ε) $\alpha_n = \frac{n}{3^n}$ φανερά είναι θετικών όρων δηλ. $\alpha_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Παρατηρώ ότι:

$3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2 \cdot n > 2n \Rightarrow 3^n > 2n \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{n}{3^n} < \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_n < \frac{1}{2}$

$0 < \alpha_n < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ δηλ. φραγμένη.

Σχόλιο

Κάθε φορά που έχω δύσκολη της μορφής k^n προσπαθώ να φτιάξω την ανίσωτη

Bernoulli

στ) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξε ότι είναι κάτω φραγμένη από το 2. 4.

~~Φανερά $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$~~

Παρατηρούμε ότι $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow a_n \geq 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

ζ) $a_1 = \sqrt{2}$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Δείξε ότι είναι φραγμένη

Μεθοδολογία: στις αναδρομικές ακολουθίες με επαγωγή

Φανερά $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξω ότι $a_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Για $n=1$ έχουμε $a_1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2$ ισχύει.

Εστω ότι για $n=k$ ισχύει $a_k < 2$ τότε

$$2 + a_k < 4 \Rightarrow \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{4} \Rightarrow a_{k+1} < 2$$

Από την αρχή της επαγωγής έλεται ότι $a_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα $0 < a_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$.

5. Supremum και Infimum ακολουθίας

ι) Εστω (a_n) ακολουθία άνω φραγμένη.

Αξίωμα:

Από όλα τα άνω φράγματα της (a_n) υπάρχει ένα που είναι το μικρότερο. Αυτό λέγεται Supremum της (a_n) και συμβολίζεται $\sup a_n$.

Ιδιότητες του supremum.

• Αν M είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα της (a_n) τότε

$$\sup a_n \leq M \quad (\text{φανερό από ορισμό του Supremum})$$

• Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε ~~$a_{n_0} > \sup a_n - \varepsilon$~~

$$a_{n_0} \geq \sup a_n - \varepsilon.$$

(SOS)

Απόδειξη:

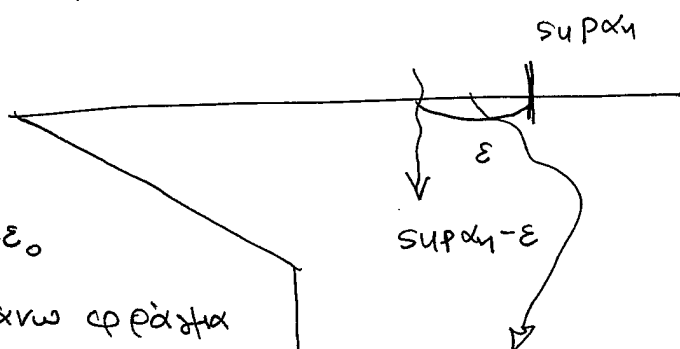
Διαισθητικά

Έστω ότι δεν ισχύει.

Τότε $\exists \varepsilon_0 > 0$ ώστε

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha \text{ έχω: } \alpha_n < \sup \alpha_n - \varepsilon_0$

Άρα ο αριθμός $\sup \alpha_n - \varepsilon_0$ είναι άνω φράγμα της (α_n) και από τον ορισμό του supremum έχουμε $\sup \alpha_n \leq \sup \alpha_n - \varepsilon_0 \Leftrightarrow 0 \leq -\varepsilon_0$ άτοπο.



Σε αυτό σημείο θα υπάρχει υποχρεωτικά κάποιος άρος α_n , γιατί αν δεν υπήρχε τότε όλοι οι άροι της $\alpha_n \leq \sup \alpha_n - \varepsilon$ δηλ. $\sup \alpha_n - \varepsilon$ θα είναι άνω φράγμα, και επομένως $\sup \alpha_n - \varepsilon \geq \sup \alpha_n$
 $\Rightarrow -\varepsilon \geq 0$ άτοπο.

ii) Έστω (α_n) μία κάτω φραγμένη ακολουθία

Αν υπάρχει το μεγαλύτερο από όλα τα κάτω φράγματα τότε το λέμε Infimum και συμβολίζεται $\inf \alpha_n$

Θα αποδείξουμε ότι κάθε κάτω φραγμένη έχει Infimum.

Θεωρώ την ακολουθία ~~(α_n)~~ $(-\alpha_n)$, $n \in \mathbb{N}$

Αφού η (α_n) είναι κάτω φραγμένη $\Rightarrow (-\alpha_n)$ άνω φραγμένη $\Rightarrow$ (από το αξίωμα της ^{υπαρξης} supremum) έπεται ότι $\exists$ το $\sup(-\alpha_n)$ ή' ισχύει $-\alpha_n \leq \sup(-\alpha_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\alpha_n \geq -\sup(-\alpha_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ το $-\sup(-\alpha_n)$ είναι κάτω φράγμα της (α_n) .

Θα δείξω ότι αν m είναι ~~κάτω~~ κάτω φράγμα (οποιοδήποτε) της (α_n) τότε $m \leq -\sup(-\alpha_n)$.

Έστω ότι αυτό δε συμβαίνει, τότε υποχρεωτικά θα έχω

$m > -\sup(-\alpha_n) \Rightarrow -m < \sup(-\alpha_n) \Rightarrow m + \sup(-\alpha_n) > 0$.

Πα την ακολουθία $(-\alpha_n)$ έχω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sup(-\alpha_n) - \varepsilon > -\alpha_{n_0}$.

Αφού αν ϵ ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ θα ισχύει

$$\text{και για } \epsilon = m + \sup(-\alpha_n) > 0.$$

$$\text{Αρα } \sup(-\alpha_n) - m - \sup(-\alpha_n) > -\alpha_{n_0} \Rightarrow$$

$$-m > -\alpha_{n_0} \Rightarrow \alpha_{n_0} < m \quad \text{Αποτέλεσμα}$$

ήδη $-\sup(-\alpha_n)$ είναι το μέγιστο από τα κάτω φράγματα. Αρα υπάρχει infimum.

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΕΙΕΣ

Εστω (α_n) μια ακολουθία

i) Η (α_n) λέγεται αύξουσα ($\uparrow$) αν $\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(δηλ. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$)

Φανερό κάθε αύξουσα είναι κάτω φραγμένη από το α_1 .

ii) Η (α_n) λέγεται γνήσια αύξουσα ($\uparrow$) αν $\alpha_n < \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(δηλ. $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$)

Φανερό κάθε γν. αύξουσα είναι κάτω φραγμένη από το α_1 .

Επίσης κάθε $\uparrow$ είναι και $\downarrow$. το αντίστροφο δεν ισχύει

iii) Η (α_n) λέγεται φθίνουσα ($\downarrow$) αν $\alpha_n \geq \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(δηλ. $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$)

Κάθε φθίνουσα είναι άνω φραγμένη από το α_1 .

iv) Η (α_n) λέγεται γνήσια φθίνουσα ($\downarrow$) αν $\alpha_n > \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(δηλ. $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$)

Φανερό κάθε γν. φθίνουσα είναι άνω φραγμένη από το α_1 .

Επίσης κάθε $\downarrow$ είναι και $\uparrow$. το αντίστροφο δεν ισχύει.

v) Οι γν. αύξουσες, γν. φθίνουσες λέγονται γν. μονότονες. Οι αύξουσες φθίνουσες λέγονται απλά μονότονες.

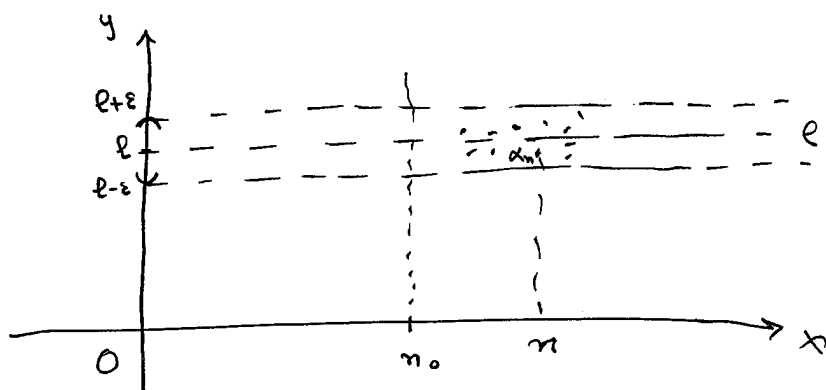
Σύγκριση ακολουθίας

1. Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό l και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ ή $\lim a_n = l$ ή $a_n \rightarrow l$ καθώς $n \rightarrow +\infty$ εάν:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ (που γενικά εξαρτάται από το } \varepsilon \text{)} \text{ ώστε}$$
$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Ανάλυση:

Επιλέγω $\varepsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό και ορίζω το διάστημα $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$



2. Πρόταση: αν μια ακολουθία έχει όριο τότε αυτό είναι μοναδικό

Απόδειξη:

Έστω ότι η ακολουθία (a_n) έχει δύο όρια, τα l, m με $l \neq m$ τότε $\lim a_n = l$ και $\lim a_n = m$.

Επιλέγω $\varepsilon = \frac{|l - m|}{3} > 0$.

- Αφού $\lim a_n = l$ έπεται από τον ορισμό ότι για το προηγούμενο ε υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \frac{|l - m|}{3} \quad (1) \quad \forall n \geq n_1$
- Αφού $\lim a_n = m$ έπεται από τον ορισμό ότι για το προηγούμενο ε υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - m| < \frac{|l - m|}{3} \quad (2) \quad \forall n \geq n_2$

Θέτω $n_0 = \max(n_1, n_2)$, τότε $\forall n \geq n_0$ οι ①, ② ισχύουν ταυτόχρονα

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \ell| &< \frac{|\ell - m|}{3} \\ |\alpha_n - m| &< \frac{|\ell - m|}{3} \quad \forall n \geq n_0 \end{aligned} \quad (H)$$

$$|\alpha_n - \ell| + |\alpha_n - m| < \frac{2}{3} |\ell - m| \quad \forall n \geq n_0$$

παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε:

$$|\ell - m| = |(\ell - \alpha_n) + (\alpha_n - m)| \leq |\ell - \alpha_n| + |\alpha_n - m| = |\alpha_n - \ell| + |\alpha_n - m| < \frac{2}{3} |\ell - m| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\ell - m| < \frac{2}{3} |\ell - m| \xrightarrow{|\ell - m| > 0} 1 < \frac{2}{3} \quad \text{Απονο.}$$

Άρα το όριο όταν υπάρχει είναι μοναδικό

3. Πρόταση: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη:

Έστω μια ακολουθία (α_n) που συγκλίνει στο $\ell \in \mathbb{R}$

Θεωρώ $\varepsilon = 1$. Αφού $\lim \alpha_n = \ell \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\alpha_n - \ell| < 1 \quad \forall n \geq n_0$
 $\Rightarrow -1 < \alpha_n - \ell < 1 \Rightarrow \ell - 1 < \alpha_n < \ell + 1 \quad \forall n \geq n_0 \quad (*)$

Θέτουμε $M = \max\{|\ell - 1|, |\ell + 1|, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{n_0-1}|\}$.

Φανερό

$$\left. \begin{aligned} |\alpha_1| &\leq M \\ |\alpha_2| &\leq M \\ \vdots \\ |\alpha_{n_0-1}| &\leq M \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Επειδή $|\ell + 1| \leq M \Rightarrow -M \leq \ell + 1 \leq M \Rightarrow \ell + 1 \leq M$

$|\ell - 1| \leq M \Rightarrow -M \leq \ell - 1 \leq M \Rightarrow -M \leq \ell - 1$

Ετσι η $(*)$ δίνει: $-M \leq \ell - 1 < \alpha_n < \ell + 1 \leq M \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -M < \alpha_n < M \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_n| < M \quad \forall n \geq n_0 \quad (2)$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_n| \leq M$$

από ①, ②, α_n ή (α_n) είναι φραγμένη

4. Παρατήρηση: Το αντίστροφο της πρότασης 3. δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει φραγμένη ακολουθία που δεν είναι ~~φραγμένη~~ συγκλίνουσα.

Θεωρούμε την ακολουθία ~~(α_n)~~ $(\alpha_n) = (-1)^n$

Φανερά είναι φραγμένη γιατί $|\alpha_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Θα αποδείξουμε ότι η (α_n) δεν συγκλίνει.

Έστω ότι συγκλίνει και ℓ είναι το όριο της

$$\text{Έστω } \varepsilon = \frac{1}{2}, \text{ τότε } \exists n_0 \text{ ώστε } |\alpha_n - \ell| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |(-1)^n - \ell| < \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\text{Έστω } n_1 > n_0 \text{ άρτιο, τότε η } (*) \text{ δίνει } |1 - \ell| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 1 - \ell < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

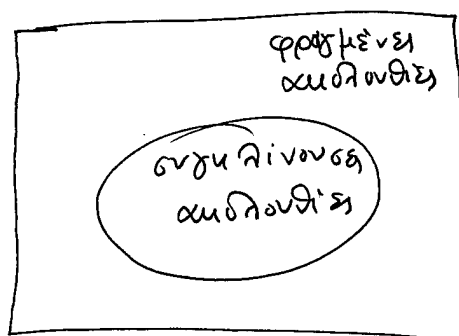
$$\Rightarrow -\frac{3}{2} < -\ell < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2} \quad ①$$

$$\text{Έστω } n_2 > n_0 \text{ περιττό, τότε η } (*) \text{ δίνει } |-1 - \ell| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1 + \ell| < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < 1 + \ell < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < \ell < -\frac{1}{2} \quad ②$$

από ①, ② άρα, ή αλλιώς

$$\text{η } \alpha_n = (-1)^n \text{ δεν συγκλίνει}$$



Πρόταση:

5. Αν $\lim \alpha_n = \ell$ τότε $\lim |\alpha_n| = |\ell|$

Το αντίστροφο δεν ισχύει εκτός αν $\ell = 0$.

Απόδειξη:

$$\text{Έστω } \varepsilon > 0. \text{ Αφού } \lim \alpha_n = \ell \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{Από την τριγωνική έχουμε } ||\alpha_n| - |\ell|| \leq |\alpha_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ||\alpha_n| - |\ell|| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim |\alpha_n| = |\ell|$$

για να δείξω ότι το αντιστρόφιο δεν ισχύει θεωρώ την ακολουθία 4.

$$a_n = (-1)^n$$

$$\text{Φανερά } |a_n| = |(-1)^n| = 1 \Rightarrow \lim |a_n| = 1$$

όμως το $\lim a_n$ δεν υπάρχει. (βλ. παρατήρηση 4.)

$$\text{αν } \lim |a_n| = 0 \text{ τότε } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : ||a_n| - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ||a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

6. Ορισμός: Αν μια ακολουθία έχει όριο το 0 τότε θα λέγεται μηδενική.

Από τον ορισμό του ορίου $\lim a_n = 0$ έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0$ ώστε $|a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Αν θεωρήσω $b_n = a_n - 0$ τότε ~~$\lim b_n$~~ έχω:

$$|b_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim b_n = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim (a_n - 0) = 0.$$

Αρα

$$\boxed{\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim (a_n - 0) = 0}$$

7. Πρόταση: Αν (a_n) είναι μια μηδενική ακολουθία και (b_n) μια φραγμένη τότε η ακολουθία $(a_n b_n)$ είναι μηδενική (δηλ. $\lim (a_n b_n) = 0$).

(Συμπέρασμα: μηδενική επί φραγμένη δίνει μηδενική)

Απόδειξη:

Αφού η (b_n) είναι φραγμένη ~~•~~ έπεται ότι είναι απόλυτα φραγμένη, άρα υπάρχει $\mu > 0$ ώστε $|b_n| \leq \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $\frac{\varepsilon}{\mu} > 0$ και επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \frac{\varepsilon}{\mu}$

$$\text{Για κάθε } n \geq n_0 \text{ έχουμε } |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \quad \forall n \geq n_0$$

$$|a_n| \cdot \mu < \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \mu = \varepsilon \Rightarrow |a_n b_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim (a_n b_n) = 0$$

8. Πρόταση: Έστω $(a_n), (b_n), (c_n)$ ακολουθίες με
 $b_n \leq a_n \leq c_n \quad (*) \quad \forall n \geq n_1$ (ενδεχομένως $n_1=1$ και έτσι θα έχω $\forall n \in \mathbb{N}$)

Εάν $\lim b_n = l$ και $\lim c_n = l$ τότε $\lim a_n = l$.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim b_n = l$ έπεται ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε
 $|b_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2 \Rightarrow -\varepsilon < b_n - l < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \quad (1) \quad \forall n \geq n_2$

Αφού $\lim c_n = l$ έπεται ότι υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}$ ώστε $|c_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_3 \Rightarrow$
 $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon \quad (2) \quad \forall n \geq n_3$

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$ τότε ~~για~~ $\forall n \geq n_0$ οι $(*)$, (1), (2) ισχύουν
 ταυτόχρονα και επομένως:

$$l - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < l + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Άρα $\lim a_n = l$.

9. ΛΗΜΜΑ:

~~9. Πρόταση: Οριο και διαμερισμός~~

Έστω $\lim a_n = l \neq 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{|l|}{2} < |a_n| < \frac{3|l|}{2} \quad \forall n \geq n_0$

Απόδειξη

Αφού $\lim a_n = l$ από τη "πρόταση 5", έπεται ότι $\lim |a_n| = |l|$.

Θέτω $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0$ (γιατί $l \neq 0$), τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$$||a_n| - |l|| < \frac{|l|}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow -\frac{|l|}{2} < |a_n| - |l| < \frac{|l|}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|l|}{2} < |a_n| < \frac{3|l|}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

10. ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\lim a_n = l$ τότε για $\epsilon > 0$ ^(αντίστοιχα $l < 0$) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : a_n > 0$
 $\forall n \geq n_0$ (αντίστοιχα $a_n < 0 \quad \forall n \geq n_0$).

Απόδειξη:

Αφού $\epsilon > 0$ θεωρώ $\epsilon = \frac{l}{2} > 0$. ~~Αφού~~ $\lim a_n = l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε
 $|a_n - l| < \frac{l}{2} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow -\frac{l}{2} < a_n - l < \frac{l}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{l}{2} < a_n < \frac{3l}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > \frac{l}{2} \quad \forall n \geq n_0 \xrightarrow{l > 0}$
 $\Rightarrow a_n > 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Αν $l < 0$ τότε θεωρώ $\epsilon = -\frac{l}{2} > 0$.

Αφού $\lim a_n = l \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < -\frac{l}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{l}{2} < a_n - l < -\frac{l}{2} \Rightarrow \frac{3l}{2} < a_n < \frac{l}{2} \Rightarrow a_n < \frac{l}{2} \quad \forall n \geq n_0 \xrightarrow{l < 0}$
 $\Rightarrow a_n < 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Πρόταση:

Αν $\lim a_n = l$ και $a_n > 0 \quad \forall n \geq n_1$ (εφδεχομένως $n_1 = 1$ οπότε έχω
 $\forall n \in \mathbb{N}$) τότε $\epsilon \geq 0$.

Αντίστοιχα αν $\lim a_n = l$ και $a_n < 0 \quad \forall n \geq n_1$ (εφδεχομένως...) τότε $l \leq 0$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $l < 0$ τότε από την "πρόταση 10" $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $a_n < 0 \quad \forall n \geq n_0$.
 Επιλέγω $n_2 = \max(n_2, n_1)$, τότε $\forall n \geq n_2$ ισχύουν ταυτόχρονα
 $a_n > 0$
 και $a_n < 0$ άρα. Επομένως $\epsilon \geq 0$

Όμοια το ίδιο.

7.
11. Παράδειγμα ακολουθίας (a_n) με $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim a_n = 0$.

Θεωρούμε $a_n = \frac{1}{n}$, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ έχω $a_n > 0$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ και από το αξίωμα Αρχιμήδη-Ευδόξου έπεται ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Για κάθε $n \geq n_0$ προφανώς έχω $n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$
 $\Rightarrow |\frac{1}{n}| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim a_n = 0$.

Σημείωση: το όριο $\lim \frac{1}{n} = 0$ παίζει κομβικό ρόλο στη θεωρία ακολουθιών.

ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

12. Πρόταση: Αν $\lim a_n = \ell_1$ και $\lim b_n = \ell_2$ τότε υπάρχει το $\lim (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon > 0$. Φανερά $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. $\lim a_n = \ell_1 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > n_1$
 $\lim b_n = \ell_2 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : |b_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > n_2$
Θεωρώ $n_0 = \max(n_1, n_2)$, τότε οι δύο προηγούμενες ισχύουν ταυτόχρονα για $n \geq n_0$ και άρα μπορεί να τις προσθέσω.
 $|a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2| < \varepsilon \forall n \geq n_0$

Παρατηρούμε ότι:

$|(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(a_n - \ell_1) + (b_n - \ell_2)| \leq |a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2| < 2\varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| < \varepsilon \forall n \geq n_0$
άρα $\lim (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$.

Παρατήρηση:

Η παραπάνω ιδιότητα γενικεύεται για πεπερασμένο πλήθος ακολουθιών.

13. ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν c σταθερά και $\lim a_n = l$ τότε

$$\lim (ca_n) = cl$$

Έστω $c \neq 0$, και $\varepsilon > 0$, τότε ~~δηλ~~ $\frac{\varepsilon}{|c|} > 0$ και επειδή $\lim a_n = l \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |c| \cdot |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |c(a_n - l)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |ca_n - cl| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim (ca_n) = cl$$

14. Παρατηρήσεις: (i) Αν $\lim b_n = l$ και $c = -1$ τότε

$$\lim (-b_n) = -l \quad \text{δηλ. το } (-) \text{ βγαίνει έξω από το } \lim$$

(ii)

Εάν $\lim a_n = l_1$ και $\lim b_n = l_2$ τότε:

~~$$\lim a_n = l_1 \quad \lim b_n = l_2$$~~
$$\lim a_n = l_1 \quad \text{και} \quad \lim (-b_n) = -l_2 \xrightarrow{\text{πρόταση 12}}$$

$$\lim (a_n + (-b_n)) = l_1 + (-l_2) \Rightarrow \boxed{\lim (a_n - b_n) = l_1 - l_2}$$

(iii) Έστω $\lim a_n = l_1$ και $\lim b_n = l_2$.

- Αν $l_1 > l_2$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > b_n \quad \forall n \geq n_0$
- Αν $l_1 < l_2$ $\neg$ ————— $a_n < b_n \quad \forall n \geq n_0$

Απόδειξη:

Από τα αρχικά δεδομένα έχω $\lim (a_n - b_n) = l_1 - l_2 > 0 \xrightarrow{\text{ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ}} \exists n_0 \in \mathbb{N} :$
 $a_n - b_n > 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > b_n \quad \forall n \geq n_0.$

(iv) Αν $\lim a_n = l_1$, $\lim b_n = l_2$ και $a_n > b_n \quad \forall n \geq n_1$ τότε $l_1 \geq l_2$

Απόδειξη: Έχω $\lim (a_n - b_n) = l_1 - l_2$ και $a_n - b_n > 0 \quad \forall n \geq n_1$ άρα από
 "πρόταση 2" του ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ $\Rightarrow l_1 - l_2 \geq 0 \Rightarrow l_1 \geq l_2.$

Πρόταση

15. Εστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες με $\lim a_n = l_1$ και $\lim b_n = l_2$.

$$\text{Τότε } \lim (a_n b_n) = l_1 l_2$$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η ακολουθία b_n είναι συγκλίνουσα έπεται ότι είναι και φραγμένη άρα $\exists M > 0: |b_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$. (*)

• Αφού $\lim a_n = l_1$ για $\frac{\varepsilon}{2M} > 0 \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}: |a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2M} \forall n \geq n_1$ ①

• Αφού $\lim b_n = l_2$ για $\frac{\varepsilon}{2(|l_1|+1)} > 0 \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}: |b_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2(|l_1|+1)} \forall n \geq n_2$ ②

Θέσω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, ώστε $\forall n \geq n_0$ οι ①, ② ισχύουν ταυτόχρονα.

$\forall n \geq n_0$ παρατηρούμε τα επόμενα:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - l_1 l_2| &= |a_n b_n - b_n l_1 + b_n l_1 - l_1 l_2| = |b_n (a_n - l_1) + l_1 (b_n - l_2)| \\ &\leq |b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1| \cdot |b_n - l_2| \stackrel{(*)}{\leq} M \cdot |a_n - l_1| + |l_1| \cdot |b_n - l_2| \stackrel{(1),(2)}{<} \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |l_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|l_1|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|l_1|}{|l_1|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a_n b_n - l_1 l_2| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\text{Άρα } \lim (a_n b_n) = l_1 l_2.$$

16. Πρόταση

Έστω b_n ακολουθία με $\lim b_n = l \neq 0$, τότε $\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{l}$.

Απόδειξη

Από το λήμμα α $\Rightarrow \exists n_1: \frac{|l|}{2} < |b_n| < \frac{3|l|}{2} \forall n \geq n_1$

Άρα $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|l|} \forall n \geq n_1$ ①

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim b_n = l \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}: |b_n - l| < \frac{\varepsilon l^2}{2} \forall n \geq n_2$ ②

Θέσω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, ώστε $\forall n \geq n_0$ οι ①, ② ισχύουν ταυτόχρονα

$\forall n \geq n_0$ παρατηρούμε ότι:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \left| \frac{\ell - b_n}{b_n \ell} \right| = \frac{|b_n - \ell|}{|\ell| \cdot |b_n|} = \frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{|b_n - \ell|}{|\ell|} \stackrel{①}{<} \frac{2}{|\ell|} \cdot \frac{|b_n - \ell|}{|\ell|} =$$

$$= \frac{2}{\ell^2} \cdot |b_n - \ell| \stackrel{②}{<} \frac{2}{\ell^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \ell^2}{2} = \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\ell} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\lim_n \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\ell}.$$

17. Πρόταση: Έστω a_n, b_n ακολουθίες με $\lim a_n = \ell_1$, $\lim b_n = \ell_2 \neq 0$
τότε $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Απόδειξη:

$$\text{Αφού } \lim b_n = \ell_2 \neq 0 \xrightarrow{\text{Πρόταση 16}} \lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\ell_2}.$$

$$\text{Αφού } \lim a_n = \ell_1 \text{ και } \lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\ell_2} \xrightarrow{\text{Πρόταση 15}} \lim \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = \ell_1 \cdot \frac{1}{\ell_2} \Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

Άσκηση:

Έστω a_n ακολουθία με $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ και $\lim a_n = \ell$. Αποδείξετε ότι

- $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{\ell}$

- $\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\ell}$

(από γνωστή πρόταση ορίο και διατήρηση)
 $\Rightarrow \ell \geq 0$

Λύση:

• Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1^η $\ell = 0$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε αφού $\lim a_n = 0$ για $\varepsilon^2 > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| < \varepsilon^2$
 $\Rightarrow \sqrt{|a_n|} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \xrightarrow{a_n \geq 0} \sqrt{a_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow |\sqrt{a_n}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow |\sqrt{a_n} - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim \sqrt{a_n} = 0.$$

2^η $\ell > 0$

Έστω $\varepsilon > 0$, αφού $\lim a_n = \ell \Rightarrow$ για $\varepsilon \cdot \sqrt{\ell} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_n - \ell| < \varepsilon \cdot \sqrt{\ell} \quad \forall n \geq n_0$ ①

Για $n \geq n_0$ παρατηρούμε ότι:

$$|\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\ell}| = \left| \frac{\alpha_n - \ell}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\ell}} \right| = \frac{|\alpha_n - \ell|}{\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\ell}} \leq \frac{|\alpha_n - \ell|}{\sqrt{\ell}} \stackrel{①}{<} \frac{\varepsilon \sqrt{\ell}}{\sqrt{\ell}} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\sqrt{\alpha_n} - \sqrt{\ell}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim_n \sqrt{\alpha_n} = \sqrt{\ell}.$$

• Έστω $\varepsilon > 0$.

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

1^η ~~$\ell = 0$~~ , αφού $\lim a_n = 0$ για $\varepsilon^k > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_n| < \varepsilon^k$
 $\Rightarrow \sqrt[k]{|\alpha_n|} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} \quad \forall n \geq n_0 \xrightarrow{\alpha_n \geq 0} \sqrt[k]{\alpha_n} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow |\sqrt[k]{\alpha_n} - 0| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim \sqrt[k]{\alpha_n} = 0.$$

2^η $\ell > 0$,

$$\left[\begin{array}{l} \text{Χρησιμοποιώ την ταυτότητα} \\ a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}) \\ \text{στη μορφή:} \\ a - b = \frac{a^k - b^k}{a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}} \end{array} \right]$$

$$\text{Αφού } \lim a_n = \ell \Rightarrow \text{για } \varepsilon(\sqrt[k]{\ell})^{k-1} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_n - \ell| < \varepsilon(\sqrt[k]{\ell})^{k-1} \quad \forall n \geq n_0. \text{ ①}$$

Για $n \geq n_0$ παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} |\sqrt[k]{\alpha_n} - \sqrt[k]{\ell}| &= \left| \frac{\alpha_n - \ell}{(\sqrt[k]{\alpha_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{\alpha_n})^{k-2}\sqrt[k]{\ell} + \dots + (\sqrt[k]{\ell})^{k-1}} \right| = \\ &= \frac{|\alpha_n - \ell|}{(\sqrt[k]{\alpha_n})^{k-1} + (\sqrt[k]{\alpha_n})^{k-2}\sqrt[k]{\ell} + \dots + \sqrt[k]{\alpha_n} \cdot (\sqrt[k]{\ell})^{k-2} + (\sqrt[k]{\ell})^{k-1}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{|a_n - e|}{(\sqrt[k]{e})^{k-1}} \stackrel{③}{<} \frac{\varepsilon (\sqrt[k]{e})^{k-1}}{(\sqrt[k]{e})^{k-1}} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{e}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{e}.$$

Ενα Κριτήριο σύγκλισης (το οποίο μου δείχνει κάποιες ακολουθίες που συγκαλίνουν).

18. ΠΡΟΤΑΣΗ: (i) Αν $(a_n) \uparrow$ και άνω φραγμένη τότε συγκαλίνει και $\lim a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) Αν $(a_n) \downarrow$ και κάτω φραγμένη τότε συγκαλίνει και $\lim a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Απόδειξη:

(i) Έστω $\varepsilon > 0$. Θέσω $S = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Είναι βεβαίως ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} + \varepsilon > S \Rightarrow a_{n_0} > S - \varepsilon$

και επειδή $(a_n) \uparrow$ για κάθε $n \geq n_0$ έχω $a_n \geq a_{n_0}$ οπότε:

$$a_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (1)$$

Από τον ορισμό του supremum έχουμε $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$a_n < S + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n < S + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (2).$$

Οι (1), (2) δίνουν:

$$S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$-\varepsilon < a_n - S < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$|a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\lim a_n = S$$

(ii) Έστω $\varepsilon > 0$. Θέσω $t = \inf \{ \alpha_n : n \in \mathbb{N} \}$

(13)

Είναι βέβαιος ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \alpha_{n_0} < t + \varepsilon$

Αφού $(\alpha_n) \downarrow$ για κάθε $n \geq n_0$ έχω $\alpha_n \leq \alpha_{n_0}$, άρα:

$$\alpha_n < t + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (1).$$

Από τον ορισμό του infimum έχω $\alpha_n \geq t \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\alpha_n > t - \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha_n \geq t - \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad (2).$$

Οι (1), (2) δίνουν:

$$t - \varepsilon < \alpha_n < t + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$-\varepsilon < \alpha_n - t < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$|\alpha_n - t| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$$\lim \alpha_n = t.$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ:

Κάθε μονότονη και φραγμένη συγκλίνει.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΟΡΙΑ

[1] $\lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$ για οποιοδήποτε $\alpha > 0$.

Απόδειξη:

• Αν $\alpha = 1$ τότε δεν χρειάζεται απόδειξη.

• Αν $\alpha > 1$ τότε $\sqrt[n]{\alpha} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ υπάρχει $\theta_n > 0$

ώστε $\sqrt[n]{\alpha} = 1 + \theta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha = (1 + \theta_n)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Από Bernoulli: $(1 + \theta_n)^n \geq 1 + n \cdot \theta_n > n \cdot \theta_n \Rightarrow$

$\alpha > n \cdot \theta_n \Rightarrow 0 < \theta_n < \alpha \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim 0 = 0$

$\lim \alpha \cdot \frac{1}{n} = \alpha \cdot \lim \frac{1}{n} = \alpha \cdot 0 = 0.$

Άρα από Θ.Σ.

$\lim \theta_n = 0$

Από την $\circledast$ τώρα προκύπτει

$\lim \sqrt[n]{\alpha} = \lim (1 + \theta_n) = \lim 1 + \lim \theta_n = 1 + 0 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{\alpha} = 1$

• Αν $\alpha < 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} = 1 \Rightarrow \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} = 1$

$\Rightarrow \frac{\lim 1}{\lim \sqrt[n]{\alpha}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\alpha}} = 1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\alpha} = 1.$

[2] $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

(15)

Απόδειξη:

(Σχόλιο: ισχύει το επόμενο, γνωστό και ως διωνυμικό ανάπτυγμα Newton

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a \cdot b^{n-1} + b^n$$

όπου $\binom{n}{k} \stackrel{\text{ορισ.}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$ και λέγεται διωνυμικός συντελεστής.

Φανερό $n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα υπάρχει $\theta_n > 0$ ώστε $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$.

Επομένως $n = (1 + \theta_n)^n = 1 + \binom{n}{1} \theta_n + \binom{n}{2} \theta_n^2 + \dots + \theta_n^n >$

$$> \binom{n}{2} \theta_n^2 \Rightarrow n > \binom{n}{2} \theta_n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{n!}{2!(n-2)!} \theta_n^2 \Rightarrow n > \frac{(n-2)(n-1)n}{2 \cdot (n-2)!} \theta_n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{n-1}{2} \theta_n^2 \Rightarrow \theta_n^2 = \frac{2}{n-1} \xrightarrow{\theta_n > 0} \theta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq \theta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \quad \forall n \geq 2$$

Από Θ.Σ. $\Rightarrow \lim \theta_n = 0$ και από την $(*)$ προκύπτει αμέσως ότι

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim (1 + \theta_n) \Rightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

[3] Έστω (a_n) ακολουθία μη αρνητικών αριθμών με
 $\lim a_n = \alpha > 0$.

Τότε $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} > 0$. Αφού $\lim a_n = \alpha \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$|a_n - \alpha| < \frac{\alpha}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\alpha}{2} < a_n - \alpha < \frac{\alpha}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{2} < a_n < \frac{3\alpha}{2} \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}} \quad \forall n \geq n_0.$$

Από το [1] έχουμε $\lim \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} = 1$, $\lim \sqrt[n]{\frac{3\alpha}{2}} = 1$,

άρα από θ.Σ.: $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

[4] Έστω $k > 0$ ακέραιος σταθερός
 $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ σταθεροί πραγματικοί
 με $a_k > 0$.

Τότε:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0} = 1.$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} & \lim \sqrt[n]{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0} = \\ &= \lim \sqrt[n]{n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right)} = \\ &= \lim \left(\sqrt[n]{n^k} \cdot \sqrt[n]{a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k}} \right) = \\ &= \left(\lim \sqrt[n]{n} \right)^k \cdot \lim \sqrt[n]{a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k}} \quad \underline{\underline{[2]}} \\ &= 1^k \cdot \lim \sqrt[n]{a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k}} = \\ &= \lim \sqrt[n]{a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k}} \quad (*) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $b_n = a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k}$ τότε

$$\begin{aligned} \lim b_n = a_k > 0 & \xrightarrow{[3]} \lim \sqrt[n]{b_n} = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^k}} &= 1 \end{aligned}$$

και από την $(*)$ έπεται το ζητούμενο.

(18)

[5] Έστω $\omega \in \mathbb{R}$ τέτ $|\omega| < 1$, τότε για $a_n = \omega^n$ έχουμε
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Απόδειξη.

• αν $\omega = 0$ τότε $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

• αν $\omega \neq 0$ τότε από την $0 < |\omega| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|\omega|} > 1$ άρα
 $\exists \theta > 0$ τέτ $\frac{1}{|\omega|} = 1 + \theta \Rightarrow \left(\frac{1}{|\omega|}\right)^n = (1 + \theta)^n \geq$ (Bernoulli)
 $\geq 1 + n\theta > n\theta \Rightarrow \frac{1}{|\omega|^n} > n\theta \Rightarrow \frac{1}{|\omega^n|} > n\theta \Rightarrow$
 $\frac{1}{|a_n|} > n\theta \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{n\theta} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$-\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{n} < a_n < \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Ομως} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\theta} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\theta} \cdot 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{\theta} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = -\frac{1}{\theta} \cdot 0 = 0.$$

Άρα από θ-Σ. έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

[6] ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ e

(19)

Θεωρούμε τις ακολουθίες $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

α) Θα δείξουμε ότι $(a_n) \uparrow$ και $(b_n) \downarrow$.

• $(a_n) \uparrow$

$$\begin{aligned} \text{Παρατηρούμε ότι } \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \stackrel{[\text{Bernoulli}]}{>} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Άρα η (a_n) είναι $\uparrow$

* Η ανισότητα Bernoulli ισχύει για όλα τα x που έχουμε $(1+x)^k \geq 1+kx \quad \forall k \geq 1$ και $\forall x > -1$, και το ισχύει αν το $k=1$ ή $x=0$. Εφόσον εφαρμόσαμε την $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{(n+1)^2} (n+1)$.

Εδώ το $\alpha = -\frac{1}{n+1} \neq 0$ και $k = n+1 \neq 1$, άρα η προηγούμενη (20) ανισότητα ισχύει χωρίς $\omega =$.

• $(b_n) \downarrow$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \cdot \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n+1)}{n \cdot (n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} = \left(\frac{n(n+2) + 1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \stackrel{[\text{Bernoulli}]}{>} \left(1 + \frac{1}{n(n+2) \cdot (n+2)}\right) \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \Rightarrow b_n > b_{n+1} \text{ και άρα η } (b_n) \downarrow$$

β) $\ominus$ α δείξουμε ότι οι $(a_n), (b_n)$ είναι φραγμένες και ότι έχουν το ίδιο όριο.

- Η (a_n) ως $\uparrow$ είναι κάτω φραγμένη από τον πρώτο όρο a_1 ,
 $a_1 = 2$ δηλαδή $2 \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Η (b_n) ως $\downarrow$ είναι πάνω φραγμένη από τον πρώτο όρο
 $b_2 = 4$ δηλαδή $4 \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Φανερά $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $2 \leq a_n < b_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ δηλ. } n(a_n) \text{ είναι άνω φραγμένη} \\ b_n > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ δηλ. } n(b_n) \text{ είναι κάτω φραγμένη} \end{cases}$$

Αφού η a_n είναι $\uparrow$ και άνω φραγμένη έπεται ότι συγκλίνει, έστω $\lim a_n = l_1$

Αφού η b_n είναι $\downarrow$ και κάτω φραγμένη έπεται ότι συγκλίνει, έστω $\lim b_n = l_2$

$$\bullet \text{ Φανερά } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \Rightarrow l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow l_2 = l_1 \cdot (1 + 0) \Rightarrow l_1 = l_2.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το κοινό όριο των δύο παραπάνω ακολουθιών ονομάζεται e , και επειδή $2 \leq a_n < 4 \Rightarrow 2 \leq e < 4$

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\delta_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1) \cdot n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

γ) Η ακολουθία (δ_n) είναι $\uparrow$ και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει

$$\begin{aligned} \bullet \quad \delta_{n+1} - \delta_n &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow \delta_{n+1} - \delta_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta_n < \delta_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\delta_n) \uparrow.$$

Αυτή ως $\uparrow$ είναι άνω φραγμένη από τον όρο $\alpha_1 = 2$

$$\bullet \quad \delta_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\mu\epsilon \quad \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = \frac{1}{2 \cdot 3 \dots n} < \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{Άρα} \quad \delta_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \quad \begin{array}{l} \text{γεωμετρική πρόοδος} \\ \text{με πρώτο όρο 1} \\ \text{και λόγο } \frac{1}{2} \end{array}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) =$$

$$= 3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < 3 \Rightarrow \delta_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- αφού η (δ_n) είναι $\uparrow$ και άνω φραγμένη, συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = e$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το δυνάμιο του Newton

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

$$\text{όπου } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{για } k \leq n$$

Θεωρώ την ακολουθία (α_n) . Αναπτύσσω με Newton

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{n! \cdot 0!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{\cancel{(n-1)!} \cdot n}{1! \cdot \cancel{(n-1)!}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{\cancel{(n-2)!} \cdot (n-1) \cdot n}{2! \cdot \cancel{(n-2)!}} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n}{n!} \cdot \frac{1}{n^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \dots \frac{n-1}{n} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \dots \frac{n-1}{n} \right) <$$

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \delta_n \Rightarrow \alpha_n < \delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Πάλι θεωρώ την ακολουθία (α_n) και αναπτύσσω με Newton:

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

(24)

Επειδή $(\alpha_n) \uparrow$ και άνω φραγμένη με $\lim \alpha_n = e \Rightarrow \alpha_n \leq e \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα :

$$e \geq \alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} \geq$$

$$\geq 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \Rightarrow$$

$$e \geq 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \quad \forall k \leq n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow e \geq 1 + \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \frac{\cancel{(n-1)!} \cdot \cancel{n}}{1! \cdot \cancel{(n-1)!}} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} + \frac{\cancel{(n-2)!} \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{n}}{2! \cdot \cancel{(n-2)!}} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots +$$

$$+ \frac{\cancel{(n-k)!} \cdot \cancel{(n-k+1)} \cdot \cancel{(n-k+2)} \dots \cancel{(n-k+(k-1))} \cdot \cancel{n}}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{1}{n^{k-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)}{n^{k-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \dots \frac{n-1}{n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$e \geq 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1!} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] + \dots + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$\Rightarrow e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \Rightarrow$$

Άρα $\forall n$ οσοδήποτε μεγάλο και για $k \leq n$ έχουμε

(25)

$$\delta_n \leq e \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

Άρα η τελευταία ανισότητα ισχύει $\forall k$ και με άλλα λόγια τελικά έχουμε $e > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \Rightarrow e > \delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Από τα προηγούμενα έχουμε

$$\alpha_n < \delta_n \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = e \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e = e \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Θ.Σ.}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = e$$

δ) Η ακολουθία (δ_n) είναι $\downarrow$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = e$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \delta_{n+1} - \delta_n &= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{1!}} + \cancel{\frac{1}{2!}} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)(n+1)!} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{1!}} - \cancel{\frac{1}{2!}} - \dots - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)(n+1)!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)n!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)n!} + \frac{1}{(n+2)(n+1)!} - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)n!} = \frac{1 - n^2 - 3n - 2}{(n^2 + 3n + 2)n!} \\ &= -\frac{n^2 + 3n + 1}{(n^2 + 3n + 2)n!} < 0 \Rightarrow \delta_{n+1} - \delta_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_{n+1} < \delta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\delta_n) \downarrow. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \text{Παρατηρούμε ότι} \quad \delta_n = \delta_n + \frac{1}{(n+1) \cdot n!}$$

$$\text{άρα} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot n!} = e + 0 = e.$$

Ε) Ο αριθμός e είναι άρρητος.

Έχουμε ήδη $\delta_n = \gamma_n + \frac{1}{(n+1) \cdot n!}$

Αφού η (δ_n) είναι $\downarrow$ και έχει όριο ω e έπεται $\delta_n > e$
Η (γ_n) είναι $\uparrow$ και έχει όριο ω e έπεται $\gamma_n \leq e$

$$\Rightarrow \gamma_n \leq e \leq \delta_n = \gamma_n + \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \Rightarrow$$

$$\gamma_n \leq e \leq \gamma_n + \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \Rightarrow$$

$$0 \leq e - \gamma_n \leq \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \Rightarrow$$

$$0 \leq e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \quad (*) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός, άρα έχει τη μορφή $e = \frac{k}{\lambda}$
όπου k, λ θετικοί ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους. Άρα η $(*)$
παίρνει τη μορφή

$$0 \leq \frac{k}{\lambda} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \leq \frac{1}{(n+1) \cdot n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη με $n!$ τότε:

$$0 \leq \frac{k}{\lambda} \cdot n! - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) n! \leq \frac{1}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

Αφού η τελευταία ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε ένα $n \geq \lambda$, άρα το
 $n!$ καθώς αναπτύσσεται περιέχει ως παράγοντα το λ . Άρα ο αριθμός
 $\frac{k}{\lambda} \cdot n!$ είναι ακέραιος

Από την άλλη ο $\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \cdot n!$ είναι επίσης
ακέραιος. Άρα ο $\frac{k}{\lambda} \cdot n! - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) n!$ είναι ακέραιος

και επειδή $0 \leq \frac{k}{\lambda} \cdot n! - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) n! < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{k}{\lambda} \cdot n! - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) n! = 0 \text{ άρα, για}$$

$$\frac{k}{2} \cdot n! = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) n! \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow \quad (27)$$

$$\frac{k}{2} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 2$$

Αφού $\frac{k}{2} = \text{σταθερό} \Rightarrow 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \text{σταθερό}$
 $\forall n \geq 2.$

Αρα για $n \geq 2$ ε' ενεργεί $n+1 > 2$ θα έχω:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} = 0.$$

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΕΙΕΣ

①

Προβλήματα:

Έστω (α_n) μια ακολουθία. Θεωρούμε μια $\uparrow$ ακολουθία θετικών ακέραιων την οποία συμβολίζω με (k_n) . Επειδή $k_n \in \mathbb{N}$ ^{κάθε} α_{k_n} είναι προφανώς ένας όρος της ακολουθίας α_n .

Το α_{k_n} ορίζεται ως κάποιος όρος της α_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα το α_{k_n} είναι μια καμάρια ακολουθία που οι όροι της είναι κάποιοι από τους όρους της ακολουθίας (α_n) . Η νέα ακολουθία (α_{k_n}) ονομάζεται υπακολουθία της (α_n) .

Παράδειγμα: Αν (α_n) είναι μια οποιαδήποτε ακολουθία τότε δύο συνιδιοσφένες και χρήσιμες υπακολουθίες είναι:

- Η υπακολουθία των άρτιων δεικτών $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots$ που γενικά γράφεται (α_{2n})
- Και η υπακολουθία των περιών δεικτών που είναι $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$ που γενικά γράφεται (α_{2n-1})

~~Πρόταση~~

[2] ΛΗΜΜΑ:

Αν (k_n) είναι $\uparrow$ ακολουθία θετικών ακεραίων τότε $k_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή

Για $n=1$ πρέπει να αποδείξω ότι $k_1 \geq 1$, το οποίο ισχύει γιατί το k_1 ~~είναι~~ θετικός ακέραιος.

Υποθέτω ότι η πρόταση ισχύει για κάποιο n , δηλαδή $k_n \geq n$ ①

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει και για $n+1$, δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε ότι $k_{n+1} \geq n+1$

Αφού η (k_n) $\uparrow$ έπεται ότι $k_{n+1} > k_n$ και από την ① $\Rightarrow k_n \geq n$

Άρα $k_{n+1} > n \Rightarrow k_{n+1} \geq n+1$

Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής έπεται ότι το λήμμα ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

[3] Πρόταση

Αν (α_n) είναι ακολουθία με $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = a$ τότε $\forall$ υπακολουθία (α_{k_n}) ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{k_n} = a$.

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim \alpha_n = a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\alpha_n - a| < \varepsilon \forall n > n_0$
 $\Rightarrow |\alpha_{k_n} - a| < \varepsilon \forall k_n > k_{n_0} \geq n_0$ (από το ΛΗΜΜΑ)

Άρα από τον ορισμό του ορίου $\lim \alpha_{k_n} = a$

[4]. Πρόταση

Αν (α_n) ακολουθία ώστε $\lim \alpha_{2n} = a$ και $\lim \alpha_{2n-1} = a$ τότε η ακολουθία α_n συγκλίνει και ισχύει $\lim \alpha_n = a$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim \alpha_{2n} = a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : |\alpha_{2n} - a| < \varepsilon \forall n > n_1$,
αφού $\lim \alpha_{2n-1} = a \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : |\alpha_{2n-1} - a| < \varepsilon \forall n > n_2$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε

$$|\alpha_{2n} - a| < \varepsilon \forall n > n_0$$

$$|\alpha_{2n-1} - a| < \varepsilon \forall n > n_0$$

Θα δείξουμε ότι $|\alpha_n - a| < \varepsilon \forall n > n_0$.

Αν το n = άρτιος τότε ισχύει από την πρώτη ανισότητα

Αν το n = περιζωός τότε ισχύει από την δεύτερη ανισότητα

Αφού $|\alpha_n - a| < \varepsilon \forall n > n_0 \Rightarrow \lim \alpha_n = a$.

[5]. Παρατήρηση: Αν για μια ακολουθία μπορώ να βρω δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια τότε από την πρόταση

[3] $\Rightarrow$ η ακολουθία δεν συγκλίνει.

π.χ. $\alpha_n = (-1)^n$ (έχουμε δείξει με τον ορισμό ότι αυτή η ακολουθία δεν συγκλίνει)

Απλούστερος τρόπος είναι να θεωρήσω τις υπακολουθίες

$(\alpha_{2n}), (\alpha_{2n-1})$

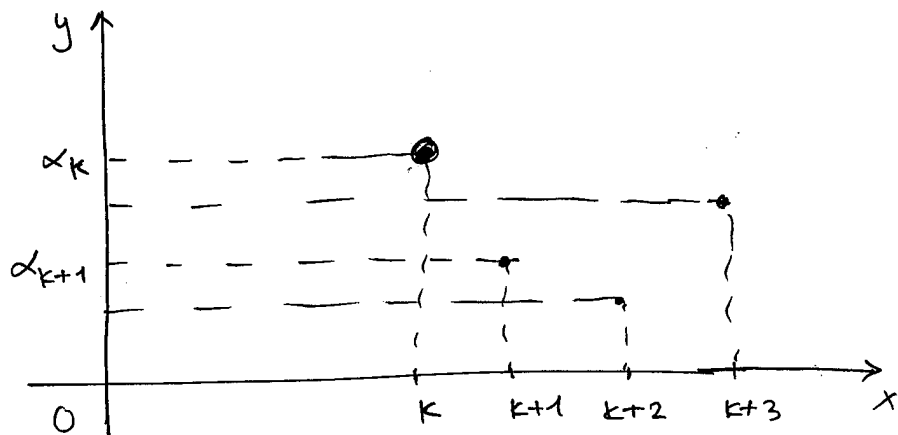
$$\text{Είναι } \alpha_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow \lim \alpha_{2n} = 1$$

$$\alpha_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \Rightarrow \lim \alpha_{2n-1} = -1$$

Άρα η ακολουθία α_n δεν συγκλίνει.

[6]. Ορισμός (καθαρά τεχνικός και απαραίτητος για το λήμμα που θα δώ) (3)
 ακολουθία

Έστω (α_n) ακολουθία. Θα λέμε ότι ο $k \in \mathbb{N}$ είναι δύο σημείων κορυφής για την ακολουθία (α_n) εάν $\alpha_k \geq \alpha_n \forall n \geq k$. Το ζεύγος (k, α_k) λέγεται σημείο κορυφής.



[7]. ΛΗΜΜΑ

Κάθε ακολουθία περιέχει μια τουλάχιστον μονότονη υποακολουθία

Απόδειξη

Έστω (α_n) μια ακολουθία. Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

- Η (α_n) να έχει άπειρες δύο σημείων κορυφής
 Αφού αυτά είναι φυσικοί αριθμοί μπορούμε να τα διατάξουμε σε μια $\uparrow$ σειρά, δηλαδή να τα πούμε $k_1, k_2, \dots$ και να είναι τέτοια ώστε

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$$

Αφού το k_1 είναι σημείο κορυφής $\Rightarrow \alpha_{k_1} \geq \alpha_n \forall n \geq k_1$,
 ένα απ'αυτά τα n είναι το k_2 . Άρα η προηγούμενη δίνει

$$\alpha_{k_1} \geq \alpha_{k_2}$$

Αφού το k_2 είναι σημείο κορυφής $\Rightarrow \alpha_{k_2} \geq \alpha_n \forall n \geq k_2$,
 ένα απ'αυτά τα n είναι το k_3 . Άρα ~~το~~ $\alpha_{k_2} \geq \alpha_{k_3}$

Συνεχίζοντας επαγωγικά θα έχουμε $\alpha_{k_1} \geq \alpha_{k_2} \geq \alpha_{k_3} \geq \dots$

Άρα έχουμε φτιάξει την υποακολουθία α_{k_n} που είναι φθίνουσα

- Η (α_n) έχει πεπερασμένες δύο σημείων κορυφής. (Στην περίπτωση αυτή εντάσσεται και η περίπτωση να μην έχει ακολουθία σημείων κορυφής)

Έστω m η μεγαλύτερη δύο σημείων κορυφής.

Το $m+1$ δεν είναι σημείο κορυφής. Άρα υπάρχει

$$\text{ένος } k_1 > m+1 : \alpha_{m+1} < \alpha_{k_1}$$

Ο k_1 επειδή $k_1 > m+1$ δεν είναι σημείο κορυφής, άρα θα υπάρχει ένα $k_2 > k_1$ ώστε $\alpha_{k_1} < \alpha_{k_2}$

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζεται μια ακολουθία δεστικών ακεραίων $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$

η οποία γεννάει την υποακολουθία $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \alpha_{k_3}, \dots$ για την οποία φανερά ισχύει $\alpha_{k_1} < \alpha_{k_2} < \alpha_{k_3} < \dots$

Άρα πάλι έχω κατασκευάσει μια $\uparrow$ υποακολουθία της (α_n)

Συμπέρασμα: σε κάθε περίπτωση υπάρχει μονότονη υποακολουθία της (α_n) .

[8]. Θεώρημα Bolzano-Weierstrass.

Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συσχλινόμενη υποακολουθία.

Απόδειξη

Έστω (α_n) μια φραγμένη ακολουθία. Από το ΛΗΜΜΑ [7] αυτή έχει μια τουλάχιστον μονότονη υποακολουθία. Τη συμβολίζουμε με (α_{k_n}) .

Αφού η (α_{k_n}) είναι υποακολουθία φραγμένης είναι επίσης φραγμένη.

Άρα έχω ότι υπάρχει υποακολουθία (α_{k_n}) μονότονη και φραγμένη από γνωστό κριτήριο σύγκλισης.

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ Cauchy ή ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

[9]. Παρατήρηση

Έστω (α_n) ακολουθία με $\lim \alpha_n = a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για το $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists$ ένα $n_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_0$.

Φανερά για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq n_0$ ισχύει $|\alpha_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Για κάθε $n, m \geq n_0$ παρατηρούμε ότι

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |(\alpha_n - a) - (\alpha_m - a)| \leq |\alpha_n - a| + |\alpha_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0.$$