

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

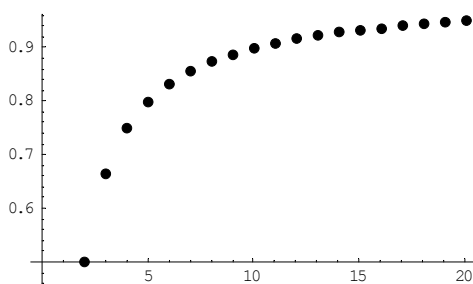
§ 4.1 Ορισμοί

Ορισμός 4.1.1 Μία συνάρτηση $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και τιμές στην πραγματική ευθεία καλείται **ακολουθία πραγματικών αριθμών**. Αντί να συμβολίζουμε τις τιμές της με $a(1), a(2), \dots, a(n)$, γράφουμε $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ και λέμε ότι ο a_n είναι ο νιοστός όρος της ακολουθίας. Συνήθως μία ακολουθία συμβολίζεται με $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ή a_n ή (a_n) .

Διάγραμμα ή **γραφική παράσταση** μιας ακολουθίας $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται το σύνολο των σημείων του επιπέδου

$$\Gamma = \{(n, a_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα το διάγραμμα μιας ακολουθίας είναι ένα σύνολο διακεκριμένων σημείων του επιπέδου.



Μία ακολουθία μπορεί να ορισθεί ως εξής:

(α) με τη βοήθεια ενός γενικού τύπου όποτε αυτός έχει νόημα, π.χ. $a_n = n^2 + 1$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 + 1 = 2, \\ a_2 &= 2^2 + 1 = 5, \\ &\dots \\ a_{10} &= 10^2 + 1 = 101, \\ &\dots \end{aligned}$$

(β) με τη βοήθεια ενός **αναδρομικού ή αναγωγικού τύπου** ο οποίος συνδέει με μία ισότητα διαδοχικούς όρους της ακολουθίας, π.χ. $a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Τότε:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 = 3 + 1 = 4, \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 4 + 3 = 7, \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 7 + 4 = 11, \\ &\dots \end{aligned}$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η a_n είναι μία **αναδρομική ακολουθία**.

Μία ακολουθία a_n καλείται **άνω φραγμένη** εάν

$$\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Η a_n καλείται **κάτω φραγμένη** εάν

$$\exists M \in \mathbb{R} : a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Η a_n καλείται **φραγμένη** εάν

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ισοδύναμα η a_n είναι **φραγμένη** εάν

$$\exists M > 0 : |a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Η a_n καλείται **γνησίως αύξουσα (αντ. αύξουσα)** εάν

$$a_n < a_{n+1} \quad (\text{αντ. } a_n \leq a_{n+1}) .$$

Η a_n καλείται **γνησίως φθίνουσα (αντ. φθίνουσα)** εάν

$$a_n > a_{n+1} \quad (\text{αντ. } a_n \geq a_{n+1}) .$$

Αν μία ακολουθία a_n είναι (γνησίως) αύξουσα ή (γνησίως) φθίνουσα τότε λέμε ότι η a_n είναι **(γνησίως) μονότονη**.

§ 4.2 Συγκλίνουσες ακολουθίες

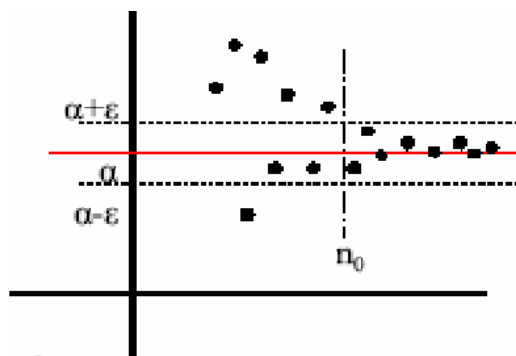
Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι η μελέτη του ορίου σε ένα σημείο x_0 έχει νόημα μόνον όταν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης. Είδαμε επίσης παραπάνω ότι όλα τα σημεία μιας ακολουθίας είναι απομονωμένα. Εφόσον κάθε απομονωμένο σημείο ΔΕΝ είναι σημείο συσσώρευσης, άρα όσον αφορά τις ακολουθίες το μόνο σημείο συσσώρευσης αυτών είναι το $+\infty$. Όσον αφορά τη συνέχεια είδαμε στο Κεφάλαιο 2 ότι κάθε απομονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης ΕΙΝΑΙ σημείο συνέχειας της συνάρτησης, άρα ΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ. Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι μόνον η περίπτωση $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ μένει να μελετηθεί.

Ορισμός 4.2.1 Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n έχει όριο τον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$, συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ο παραπάνω ορισμός παριστάνεται γραφικά στο ακόλουθο σχήμα:

Οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και αν επιλέξουμε υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του n_0 όλες οι τιμές της ακολουθίας εγκλωβίζονται εκατέρωθεν του πραγματικού αριθμού a στο διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

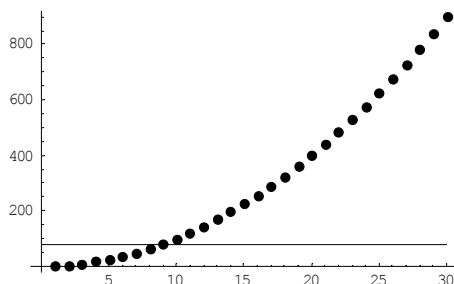


Ορισμός 4.2.2 Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n έχει όριο το $+\infty$, συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > n_0 \Rightarrow a_n > \varepsilon.$$

Ο παραπάνω ορισμός παριστάνεται γραφικά στα ακόλουθο σχήμα:

Οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και αν επιλέξουμε υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του n_0 όλες οι τιμές της ακολουθίας a_n είναι μεγαλύτερες του ε .

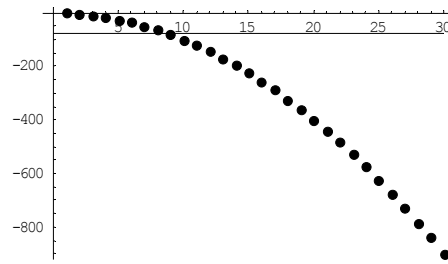


Ορισμός 4.2.3 Θα λέμε ότι η ακολουθία a_n έχει όριο το $-\infty$, συμβολικά $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > n_0 \Rightarrow a_n < -\varepsilon.$$

Ο παραπάνω ορισμός παριστάνεται γραφικά στα ακόλουθο σχήμα:

Οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και αν επιλέξουμε υπάρχει πάντα ένας φυσικός αριθμός n_0 έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο του n_0 όλες οι τιμές της ακολουθίας a_n είναι μικρότερες του $-\varepsilon$.

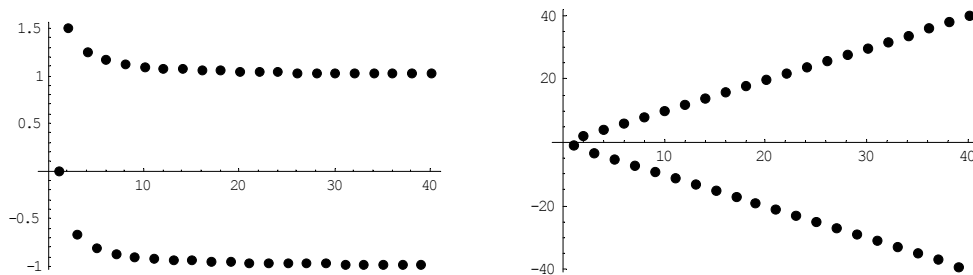


Σημείωση 1

- Συμφωνούμε να λέμε ότι μία ακολουθία a_n συγκλίνει όταν συγκλίνει σε κάποιο *πραγματικό αριθμό* a . Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα λέμε ότι η ακολουθία αποκλίνει στο $\pm\infty$ ή δε συγκλίνει (εάν το όριο δεν υπάρχει).
- Μία ακολουθία a_n δεν έχει όριο όταν $n \rightarrow +\infty$ όταν ισχύει η άρνηση του ορισμού δηλαδή:

$$\exists \varepsilon > 0: \forall n_0, \exists n > n_0: |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

Αποκλίνουσες ακολουθίες



§ 4.3 Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών

Πρόταση 4.3.1 Το όριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας είναι μοναδικό.

Απόδ. Εστω $a_n \rightarrow a$, $a_n \rightarrow b$. Τότε αν θεωρήσουμε $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ έχουμε:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N}: \forall n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N}: \forall n > n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon.$$

Αν λοιπόν $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, τότε:

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = 2 \frac{|a-b|}{2} = |a-b|,$$

(άτοπο). Αρα $a = b$. $\square$

Πρόταση 4.3.2 Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδ. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Αν λοιπόν $M = \max\{a + \varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$, τότε $|a_n| < M, \forall n \in \mathbb{N}$, άρα η a_n είναι φραγμένη. $\square$

Πρόταση 4.3.3 Αν $a_n \rightarrow a, a_n \rightarrow b$ ($a, b \in \mathbb{R}$), τότε:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) &= a \pm b \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) &= a b \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n / b_n) &= a / b, b \neq 0\end{aligned}$$

Απόδ. Θα δείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = a b$. Εχουμε:

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| < \varepsilon M + |a| \varepsilon.\end{aligned}$$

Ομοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες. $\square$

Πρόταση 4.3.4 (i) Αν $a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$.
(ii) Αν $a_n \rightarrow a$ ($a \neq 0$), τότε όλοι οι όροι της ακολουθίας εκτός πεπερασμένου πλήθους έχουν το πρόσημο του ορίου a .
(iii) Αν $a_n \rightarrow 0$ και b_n φραγμένη τότε $a_n b_n \rightarrow 0$.
(iv) Αν $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ και $a_n < b_n \Rightarrow a \leq b$.
(v) Αν $a_n \rightarrow a, c_n \rightarrow a$ και $a_n < b_n < c_n \Rightarrow b_n \rightarrow a$ (Παρεμβολή).

Απόδ. (i) $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$.

(ii) $|a_n - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow a - \frac{|a|}{2} < a_n < a + \frac{|a|}{2}, \forall n > n_0$.

(iii) $|a_n b_n| < M \varepsilon$.

(iv) $a < a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} < b + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = b + \varepsilon \Rightarrow a \leq b$.

(v) $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon \Rightarrow |b_n - a| < \varepsilon \Rightarrow b_n \rightarrow a$. $\square$

Πρόταση 4.3.4 Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Απόδ. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η ακολουθία a_n είναι αύξουσα. Αφού το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο θα έχει ένα ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $a = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $a_n \rightarrow a$. Εστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $a - \varepsilon < a$, ο $a - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A άρα από γνωστή Πρόταση (βλέπε Κεφ. 1) υπάρχει

$n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$. Εφόσον η a_n είναι αύξουσα έχουμε $a_n \geq a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$ και εφόσον ο a είναι άνω φράγμα έχουμε $a_n \leq a$. Δηλαδή:

$$a - \varepsilon < a_{n_0} < a_n \leq a < a + \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n \rightarrow a.$$

Αν τώρα η ακολουθία a_n είναι αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $\forall M > 0 \exists n_0 : a_{n_0} > M$, οπότε $\forall n > n_0$ ισχύει $a_n > M$, άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$. $\square$

Σημείωση 2 Για την εύρεση ορίων ακολουθιών χρησιμοποιούμε τις παραπάνω ιδιότητες εφόσον δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές. Όταν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή (βλέπε Κεφ. 1) προσπαθούμε να “άρουμε” την απροσδιοριστία.

Πολλές φορές, (όταν ο ορισμός της ακολουθίας γίνεται με γενικό τύπο π.χ. $a_n = n^2$), για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, ορίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση $f(x)$ θέτοντας στον τύπο της ακολουθίας όπου $n=x$ και υπολογίζουμε το όριο της συνάρτησης $f(x)$ όταν $x \rightarrow +\infty$

Πρόταση 4.3.5 (i) Αν $a_n \geq b_n$ για κάθε $n > n_0$ και αν $b_n \rightarrow +\infty$ τότε $a_n \rightarrow +\infty$.
(ii) Αν $|a_n| \leq |b_n|$ για κάθε $n > n_0$ και αν $b_n \rightarrow 0$ τότε $a_n \rightarrow 0$.

Απόδ. (i) Από τον ορισμό, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_1 \Rightarrow b_n > \varepsilon$, άρα αφού $a_n \geq b_n$ για κάθε $n > n_0$, έχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n' = \max \{n_0, n_1\} \in \mathbb{N} : \forall n > n' \Rightarrow a_n \geq b_n > \varepsilon \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty.$$

(ii) Ομοια. $\square$

Πρόταση 4.3.6 (D' Alembert) (i) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda > 1$ τότε $|a_n| \rightarrow +\infty$.
(ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda < 1$ τότε $a_n \rightarrow 0$.

Πρόταση 4.3.7 (Cauchy) (i) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda < 1$ τότε $a_n \rightarrow 0$.
(ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda > 1$ τότε $a_n \rightarrow +\infty$.

Πρόταση 4.3.8 (Stolz) Εστω μία ακολουθία a_n και μία ακολουθία b_n η οποία είναι γνησίως αύξουσα με $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

ΟΡΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΠΟΥ ΘΑ ΘΕΩΡΟΥΝΤΑΙ ΓΝΩΣΤΑ:

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}.$$

Πράγματι αν ορίσουμε τη συνάρτηση $f(x) = a^x$ ($a > 0$) τότε είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $0 < a < 1$, ενώ $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $a > 1$.

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k a^n = 0, \text{ όταν } 0 < a < 1.$$

Ορίζουμε $f(x) = x^k a^x$ ($0 < a < 1$) ($x > 0$), οπότε έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) \cdot 0$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital k -φορές:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{b^x}, \quad b = \frac{1}{a} > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx^{k-1}}{b^x \ln b} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\dots 1}{b^x (\ln b)^k} = 0.$$

$$\bullet \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0.$$

$$\bullet \quad \text{Η ακολουθία } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη. Επιπλέον:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = e.$$

$$\text{Γενικότερα ισχύει: } \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^a, \quad n \rightarrow +\infty.$$

§ 4.4 Υπακολουθίες-Ανώτερο και κατώτερο όριο-Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός 4.4.1 Εστω $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε η ακολουθία $a_{\phi(n)}$ καλείται υπακολουθία της a_n .

Για παράδειγμα οι ακολουθίες a_{2n} , a_{2n+1} , a_{3n} , $n = 1, 2, \dots$ είναι υπακολουθίες της a_n .

Ορισμός 4.4.2 Ο αριθμός $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ καλείται **οριακός αριθμός** μιας ακολουθίας a_n όταν σε κάθε περιοχή του σημείου ξ (δηλαδή σε κάθε ανοικτό διάστημα της μορφής $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$) υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας a_n .

Δηλαδή οι οριακοί αριθμοί μιας ακολουθίας είναι:

- (α) τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου τιμών των όρων της, ή
- (β) κάθε τιμή των όρων της που επαναλαμβάνεται άπειρες φορές.

Ορισμός 4.4.3 *Ο μεγαλύτερος (αντ. μικρότερος) από τους οριακούς αριθμούς μιας ακολουθίας a_n καλείται ανώτερο όριο της a_n και συμβολίζεται με $\overline{\lim} a_n$ ή $\limsup a_n$ (αντ. $\underline{\lim} a_n$ ή $\liminf a_n$).*

Προφανώς μία ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνον αν έχει ΜΟΝΑΔΙΚΟ οριακό αριθμό, δηλαδή:

$$\lim a_n = \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n.$$

Σημείωση 3 Αν μία ακολουθία έχει περισσότερους του ενός οριακούς αριθμούς καλείται *μη συγκλίνουσα ακολουθία*.

Παράδειγμα: Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι μη συγκλίνουσα ακολουθία. Πράγματι:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= 1, \quad n \rightarrow +\infty \\ a_{2n+1} &= -1, \quad n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ έχει δύο οριακούς αριθμούς το ± 1 . Προφανώς:

$$\overline{\lim} a_n = 1 \neq \underline{\lim} a_n = -1.$$

Ορισμός 4.4.4 (ακολουθίες Cauchy) *Μία ακολουθία a_n καλείται ακολουθία Cauchy αν*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Ισχύει δε η ακόλουθη:

Πρόταση 4.4.1 (κριτήριο Cauchy)

Μία ακολουθία a_n είναι συγκλίνουσα $\Leftrightarrow$ η a_n είναι ακολουθία του Cauchy.

Σημείωση 4 Η Πρόταση 4.4.1 είναι σημαντική διότι μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε ότι μία ακολουθία είναι συγκλίνουσα χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το όριό της όπως απαιτεί ο ορισμός της συγκλίνουσας ακολουθίας.

Θεώρημα 4.4.1 (Bolzano-Weierstrass) *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδ. Αν το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι πεπερασμένο τότε ένας τουλάχιστον όρος της ακολουθίας παρουσιάζεται άπειρες φορές οπότε έχουμε ένα

τουλάχιστον οριακό σημείο. Αν το σύνολο των όρων της είναι άπειρο τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης, άρα έχουμε πάλι ένα τουλάχιστον οριακό σημείο. Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα οριακά σημεία μιας ακολουθίας είναι όρια συγκλινουσών υπακολουθιών της έχουμε το ζητούμενο. $\square$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με χρήση του ορισμού ναδειχθεί ότι:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty.$$

Λύση. (α) Αρκεί ναδειχθεί ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| < \varepsilon$. Έχουμε:

$$\forall n > n_0, \quad \left| \frac{1}{n^k} \right| = \frac{1}{n^k} < \frac{1}{n_0^k}.$$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{n_0^k}$ και λύνουμε ως προς ε , άρα:

$$\varepsilon = \frac{1}{n_0^k} \Rightarrow n_0^k = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}},$$

και επειδή ο n_0 είναι φυσικός αριθμός θεωρούμε $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rceil + 1$, όπου $\lceil \cdot \rceil$ είναι το ακέραιο μέρος ενός αριθμού (βλέπε Κεφ. 1), οπότε:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rceil + 1: \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| < \frac{1}{n_0^k} = \frac{1}{\left(\left\lceil \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rceil + 1 \right)^k} < \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right)^k} = \varepsilon$$

(Υπενθύμιση: $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$), συνεπώς από τον ορισμό του ορίου έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

(β) Αρκεί ναδειχθεί ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): \forall n > n_0 \Rightarrow n^k > \varepsilon$. Έχουμε $\forall n > n_0, n^k > n_0^k$.

Θέτουμε $\varepsilon = n_0^k$ και λύνουμε ως προς ε , άρα:

$$\varepsilon = n_0^k \Rightarrow n_0 = \sqrt[k]{\varepsilon},$$

και επειδή ο n_0 είναι φυσικός αριθμός, θεωρούμε $n_0 = \left\lceil \sqrt[k]{\varepsilon} \right\rceil + 1$, οπότε:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = \left[\sqrt[k]{\varepsilon} \right] + 1 : \forall n > n_0 \Rightarrow n^k > n_0^k = \left(\left[\sqrt[k]{\varepsilon} \right] + 1 \right)^k > \left(\sqrt[k]{\varepsilon} \right)^k = \varepsilon ,$$

συνεπώς από τον ορισμό του ορίου έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$. $\square$

2. Με χρήση ιδιοτήτων ορίων να υπολογίσετε τα κάτωθι όρια:

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n-3}, \quad (\beta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu(e^{n^2+1})}{n^2} \quad (\gamma) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3} \right]$$

$$(\delta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 1}{4n^2 - 3n + 3}, \quad (\epsilon) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} \right)^{n^2}, \quad (\sigma\tau) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+5} \right)^{n^2}$$

$$(\zeta) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n}, \quad (\eta) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$$

Λύση (α) Θέτουμε $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ορίων συναρτήσεων.

$$(\beta) \left| \frac{\sigma\upsilon\nu(e^{n^2+1})}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (\text{παρεμβολή}), \quad \text{άρα} \quad \frac{\sigma\upsilon\nu(e^{n^2+1})}{n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

(γ) Κάθε φυσικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως $n = 3k + \nu$, $\nu = 0, 1, 2$. Τότε:

$$\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3} \right] = \frac{3k+\nu}{3} - \left[\frac{3k+\nu}{3} \right] = k + \frac{\nu}{3} - \left[k + \frac{\nu}{3} \right] = k + \frac{\nu}{3} - k - \left[\frac{\nu}{3} \right] = \frac{\nu}{3}$$

άρα η ακολουθία έχει 3 οριακά σημεία τα 0, 1/3, 2/3 άρα δεν συγκλίνει.

(δ) Ορίζουμε $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^2 - 3x + 3}$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(ε) Ορίζουμε $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2}$. Παρατηρούμε ότι το όριο της βάσης είναι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$, ενώ το όριο του εκθέτη είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, άρα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0.$$

(στ) Ορίζουμε $f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{x^2}$. Παρατηρούμε ότι το όριο της βάσης είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{2x+5} = 1$, ενώ το όριο του εκθέτη είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή 1^∞ . Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)} \stackrel{L'Hosp.}{=} \dots = e^{-\infty} = 0.$$

(ζ) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή ∞/∞ . Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Stolz: Εστω $a_n = 1 + 2 + \dots + n$, $b_n = n$. Προφανώς η b_n είναι γνησίως αύξουσα και $b_n \rightarrow +\infty$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος και εφόσον:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \dots + n}{n} = +\infty$$

(η) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $+\infty - \infty$. Εργαζόμαστε όπως στις (α), (δ), (ε), (στ). $\square$

3.

Δίνεται η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}$, με την ιδιότητα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 1}{a_n + 1} = 0.$$

Υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; Αν ναι, να υπολογιστεί.

Υπόδειξη Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες των ορίων των ακολουθιών.

Λύση Παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = 1 - \frac{2}{a_n + 1}.$$

Από τις ιδιότητες των ορίων των ακολουθιών και την υπόθεση έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{a_n + 1} = 1$$

και άρα, πάλι από τις ιδιότητες, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{2} = 1$. Από δω έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

4.

Έστω ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}$, με $a_n > 0$, $a_n \neq 1$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Να βρεθεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{a_n}}{1 - \sqrt[4]{a_n}}$.

Λύση Λόγω της υπόθεσης $a_n > 0$, $a_n \neq 1$, το πηλίκο είναι καλά ορισμένο. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{a_n}}{1 - \sqrt[4]{a_n}} &= \frac{(1 - \sqrt{a_n})(1 + \sqrt[4]{a_n} + \sqrt[4]{a_n}^2 + \sqrt[4]{a_n}^3)(1 + \sqrt{a_n})}{(1 - \sqrt[4]{a_n})(1 + \sqrt[4]{a_n} + \sqrt[4]{a_n}^2 + \sqrt[4]{a_n}^3)(1 + \sqrt{a_n})} \\ &= \frac{(1 - a_n)(1 + \sqrt[4]{a_n} + \sqrt[4]{a_n}^2 + \sqrt[4]{a_n}^3)}{(1 - a_n)(1 + \sqrt{a_n})} \\ &\stackrel{(a_n \neq 1)}{=} \frac{1 + \sqrt[4]{a_n} + \sqrt[4]{a_n}^2 + \sqrt[4]{a_n}^3}{1 + \sqrt{a_n}} \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{a_n}}{1 - \sqrt[4]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt[4]{a_n} + \sqrt[4]{a_n}^2 + \sqrt[4]{a_n}^3}{1 + \sqrt{a_n}} = 2.$$

5.

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$c_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Λύση Παρατηρούμε ότι:

$$0 < c_n = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right)^n = \left(\frac{5}{6} \right)^n, \quad n \geq 2.$$

Επειδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} \right)^n = 0,$$

από τις ιδιότητες των ορίων των ακολουθιών έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

6.

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας a_n , $n \in \mathbb{N}$ με

$$a_n = \sqrt[n]{n^2 + 2n + 2}.$$

Λύση Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 \leq a_n &= \sqrt[n]{n^2 + 2n + 2} \leq \sqrt[n]{(n+1)^2 + 1} \\ &\leq \sqrt[n]{(n+n)^2 + n^2} = \sqrt[n]{5n^2} = \sqrt[n]{5} \sqrt[n]{n^2}. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$$

έχουμε και ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Οπότε από τις ιδιότητες των ορίων των ακολουθιών έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

7.

Έστω ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}$, με $|a_{n+1} - a_n| < c^n$, $0 < c < 1$. Αποδείξτε ότι η a_n συγκλίνει.

Υπόδειξη Δείξτε ότι η ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.

Λύση Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, με $m < n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - \dots + a_{m+1} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n-1}| + \dots + |a_{m+1} - a_m| \\ &\leq c^{n-1} + \dots + c^m \leq c^m + \dots = \frac{c^m}{1-c}. \end{aligned}$$

Επειδή $0 < c < 1$ έχουμε ότι η ακολουθία $\frac{c^m}{1-c}$ είναι μηδενική. Έστω $\varepsilon > 0$.

Υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m \geq m_0$ να έχουμε $\frac{c^m}{1-c} < \varepsilon$ και άρα $|a_n - a_m| < \varepsilon$ για $m, n \geq m_0$. Άρα η ακολουθία είναι Cauchy και σύμφωνα με γνωστό θεώρημα συγκλίνει.

8. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

Λύση. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$

από το κριτήριο D' Alembert.