Σύνολα Αριθμών

- **Φυσικοί Αριθμοί:**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

- **Ακέραιοι Αριθμοί:**

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

- **Ρητοί Αριθμοί:**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

(δηλ. όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν ως κλάσματα π.χ. $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $5 = \frac{5}{1}$ κλπ.)

- **Άρρητοι Αριθμοί:**

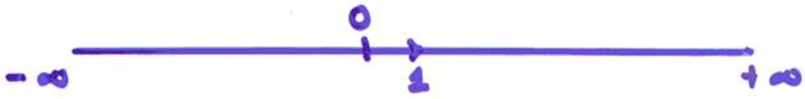
$\mathbb{Q}^c$ = οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή κλάσματος δύο ακεραίων. Αν γραφούν σε δεκαδική μορφή έχουν άπειρα μη περιοδικά στοιχεία.

π.χ: $\sqrt{2} = 1{,}414213\dots$, $\pi = 3{,}14159\dots$

• Πραγματικοί Αριθμοί:

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$: όλοι οι αριθμοί.

Γεωμετρική παράσταση: Ευθεία



• Μιγαδικοί Αριθμοί:

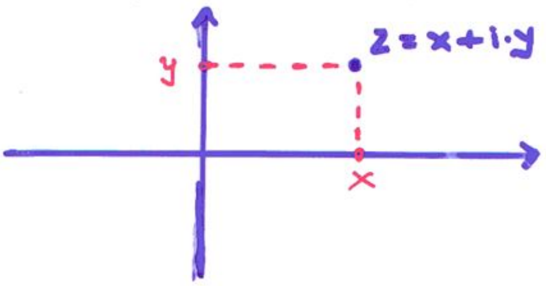
$$\mathbb{C} = \{z = x + i \cdot y,\ x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$$

$x = \mathrm{Re}\,z$ = πραγματικό μέρος του z

$y = \mathrm{Im}\,z$ = φανταστικό μέρος του z

Γεωμετρική παράσταση: Επίπεδο



Πότε δύο μιγαδικοί είναι ίσοι:

$x_1 + i \cdot y_1 = x_2 + i \cdot y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$

Πράξεις με μιγαδικούς:

Πρόσθεση: $(x_1+i\cdot y_1)+(x_2+i\cdot y_2)=(x_1+x_2)+i\cdot(y_1+y_2)$

π.χ. $(2+3i)+(4-2i)=(2+4)+(3-2)i=6+1\cdot i$

Αφαίρεση: $(x_1+i\cdot y_1)-(x_2+i\cdot y_2)=(x_1-x_2)+i\cdot(y_1-y_2)$

π.χ. $(2+3i)-(4-2i)=(2-4)+(3+2)i=-2+5i$

Πολλαπλασιασμός:

$$(x_1+i\cdot y_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i\cdot(x_1y_2+x_2y_1)$$

[Προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό επιμεριστικά των παρενθέσεων]

π.χ: $(2+3i)\cdot(4-2i)=2\cdot4+2\cdot(-2i)+3i\cdot4-3\cdot2\cdot i^2=$

$=8-4i+12i-6\cdot(-1)=14+8i.$

Διαίρεση:

$$\frac{x_1+i\cdot y_1}{x_2+i\cdot y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

π.χ. $\dfrac{2+3i}{4-2i}=\dfrac{2\cdot4+3(-2)}{4^2+(-2)^2}+i\cdot\dfrac{4\cdot3-2(-2)}{4^2+(-2)^2}=\dfrac{2}{20}+i\cdot\dfrac{16}{20}=$

$=\dfrac{1}{10}+i\cdot\dfrac{4}{5}$

Συζυγής ενός μιγαδικού:

$$\bar{z} = \overline{x + i \cdot y} = x - i \cdot y$$

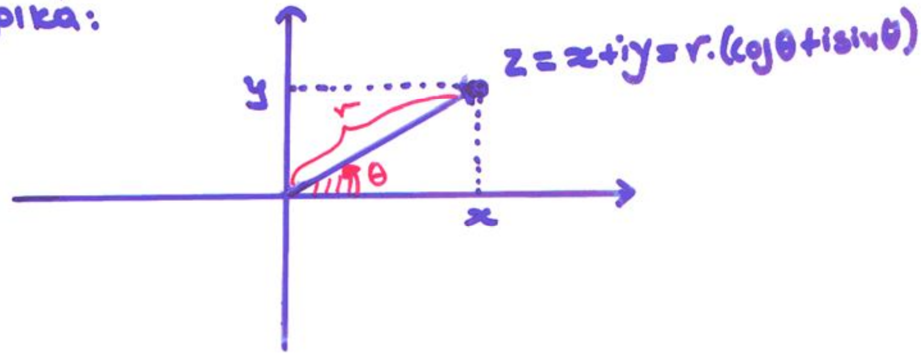
Πολική μορφή μιγαδικών:

$$z = r \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$$

όπου $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ = το μέτρο του z

θ = το κύριο όρισμα του z.

Γεωμετρικά:



Για την γωνία θ ισχύει ότι

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Η σύνδεση των δύο τρόπων εμφάνισης του μιγαδικού z επιτυγχάνεται μέσω των τύπων:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{array} \right\}$$

Υπολογισμός ριζών μιγαδικών με τη βοήθεια του τύπου του De Moivre

$$(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\cdot\sin(n\theta)$$

Αν θέλουμε να βρούμε τη n-οστή ρίζα του a, δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση $z^n = a$, στο σύνολο των μιγαδικών εργαζόμαστε ως εξής:

Γράφουμε τον z στην πολική του μορφή

$$z = r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta),$$

οπότε έχουμε, αν $a = |a|\cdot(\cos\theta_0 + i\cdot\sin\theta_0)$

$$z^n = a \iff \left(r\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta)\right)^n = |a|\cdot(\cos\theta_0 + i\cdot\sin\theta_0)$$

$$\iff r^n\cdot(\cos(n\theta) + i\cdot\sin(n\theta)) = |a|\cdot(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

$$\iff \begin{cases} r^n = |a| \\ \cos(n\theta) = \cos\theta_0 \\ \sin(n\theta) = \sin\theta_0 \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ n\theta = 2k\pi + \theta_0 \ (k = 0, 1, \ldots, n-1) \end{cases}$$

Άρα $$z = \sqrt[n]{|a|}\cdot\left(\cos\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Άλλες ιδιότητες / παρατηρήσεις:

• Για το μέτρο ενός μιγαδικού:

$$|z| = |x + i\cdot y| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

• Για τον συζυγή:

$$\overline{x + iy} = x - iy$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}.$$