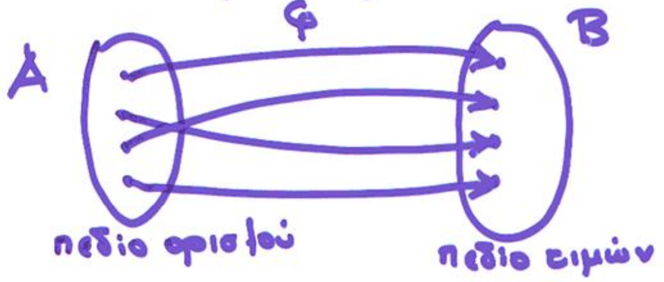
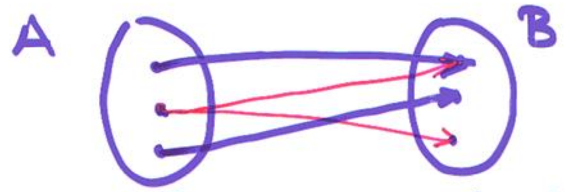
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

• Τι είναι μια συνάρτηση:

Μια απεικόνιση των στοιχείων ενός συνόλου Α(πεδίο ορισμού) στα στοιχεία ενός συνόλου Β(πεδίο τιμών) έτσι ώστε κάθε στοιχείο του Α να έχει μόνο μια εικόνα:



ΔΕΝ είναι συνάρτηση μια απεικόνιση της μορφής:

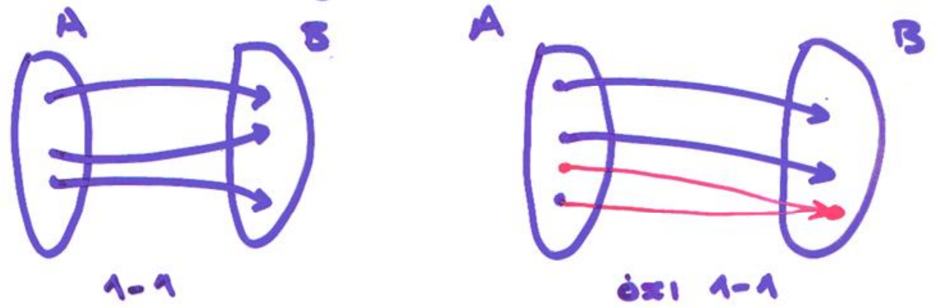


γιατί το δεύτερο στοιχείο του Α έχει 2 εικόνες.

Έτσι,

η φ είναι συνάρτηση $\Leftrightarrow \left[x_1 = x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)\right]$

Μια συνάρτηση φ ονομάζεται <u>1-1</u> (ένα προς ένα) ή αμφιμονοσήμαντη αν διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού της έχουν διαφορετικές εικόνες:



φ 1-1 $\Leftrightarrow [x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)] \Leftrightarrow$

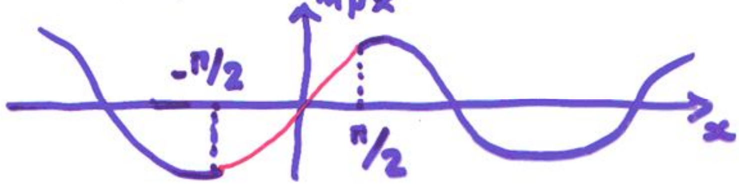
$\Leftrightarrow [\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

Παραδείγματα: • η $\varphi(x) = x^3$ είναι 1-1

• Η $g(x) = x^2$ δεν είναι 1-1 $(\varphi(-1) = \varphi(1))$

• Η $g(x) = x^2$ περιορισμένη στους θετικούς αριθμούς είναι 1-1

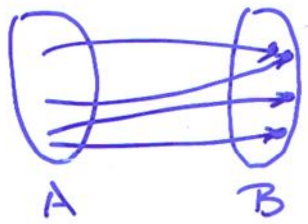
• Η $f(x) = ημx$ δεν είναι 1-1. Γίνεται 1-1 αν περιορίσουμε στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$



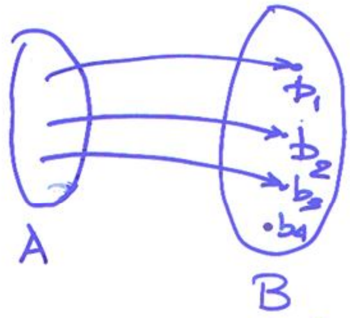
Μια συνάρτηση

$$\varphi : A \to B$$

ονομάζεται **επί** αν οι τιμές της καλύπτουν όλο το σύνολο B:



Συνάρτηση Επί.



Συνάρτηση όχι Επί.
(το b_4 δεν είναι εικόνα κανενός στοιχείου του A)

$$\varphi \text{ επί } \iff \forall\, b \in B \;\; \exists\, \alpha \in A : \varphi(\alpha) = b.$$

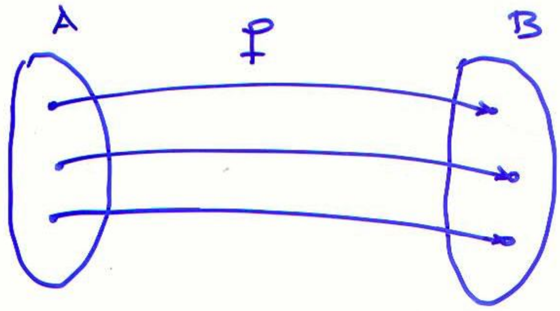
$\iff$ Η εξίσωση $\varphi(x) = y$ έχει πάντα λύση ως προς x, για κάθε $y \in B$.

Παραδείγματα: 1. Η $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με $\varphi(x) = x^2$ είναι επί.

2. Η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$ είναι επί.

3. Η $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = x^2$ δεν είναι επί (δεν καλύπτονται οι αρνητικοί αριθμοί του πεδίου τιμών).

Μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1 και επί. αντιστρέφεται:



Υπάρχει δηλαδή συνάρτηση

$$\varphi : B \longrightarrow A$$

η οποία είναι τέτοια ώστε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow \varphi(y) = x.$$

Η φ ονομάζεται αντίστροφη της f και συμβολίζεται

$$f^{-1} : B \longrightarrow A.$$

Ο τύπος της f^{-1} προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ ως προς x:

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y).$$

π.χ: η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3+1$ είναι 1-1 και επί άρα αντιστρέφεται. Η f^{-1} υπολογίζεται ως εξής:

$y = x^3+1 \Leftrightarrow x^3 = y-1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$. Άρα

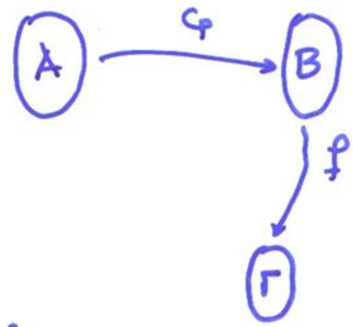
$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}.$$

Σύνθεση Συναρτήσεων

Αν για τις συναρτήσεις:

$$\varphi : A \longrightarrow B, \quad f : B \longrightarrow \Gamma$$

ισχύει ότι το πεδίο τιμών της πρώτης συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της δεύτερης



Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση η σύνθεση των f, φ:

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε είναι:

$$f \circ \varphi : A \longrightarrow \Gamma$$

Ο τύπος της νέας συνάρτησης υπολογίζεται από την σχέση:

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)).$$

Παράδειγμα : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ με $f(x) = x^2+1$, $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = 2x$

Τότε

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = 2(x^2+1) = 2x^2+2.$$