Χρήσιμα ολοκληρώματα

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

Παράδειγμα.

$$\int x^3 = ?$$

$$\int x^{-1} = ?$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = ?$$

$$\int \left(x^2 - 5x + 6\right) dx = ?$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left|f(x)\right|}$$

$$\int \frac{dx}{ax} = ?$$

$$\int \tan(x) dx = ?$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = ?$$

$$\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+1} dx = ?$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int x^3 dx + c_1 = \frac{x^4}{4} + c_1 \Rightarrow y = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) dx = \frac{x^5}{4 \times 5} + c_1 x + c_2$$

Βάσει Τυπολόγιου

Προσπαθούμε να φέρουμε την συνάρτηση σε συγκεκριμένη μορφή.

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9}\sqrt{\frac{4}{9} - x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$$

Παράδειγμα

$\int \frac{adx}{x^2 + a^2} = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ $\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = ?$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 16}} = ?$

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Με την βοήθεια τριγωνομετρικών τύπων που ανάγουν δυνάμεις ή γινόμενα τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε απλούστερες εκφράσεις με όρους όπως sin(ax), cos(ax) των οποίων τα ολοκληρώματα γνωρίζουμε.

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))}$$

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

$$\boxed{\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))}$$

$$\int \sin(2x)\cos(3x)dx = ?$$

- Να κάνετε χρήση του φυλλαδίου με τους τριγωνομετρικούς τύπους.

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

$$\int \frac{dx}{ax+b} = ?$$

Θέτουμε $y = ax + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a} \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dy$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{y}\frac{1}{a}dy = \frac{1}{a}\ln|y| = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = ? \qquad x = a\sin(\theta) \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \\ dx = a\cos(\theta)d\theta \end{cases}$$

$$\int \sqrt{a^2 - (a\sin(\theta))^2}\,a\cos(\theta)d\theta = \int \sqrt{a^2\left(1 - \sin^2(\theta)\right)}\,a\cos(\theta)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int \sqrt{a^2\cos^2(\theta)}\,a\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = \int a^2\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int a^2\frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2}\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} \qquad \cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{2}\sin(\theta)\cos(\theta) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ? \qquad x = a\sin(\theta)$$

$$\int \sqrt{16 - 9x^2}\,dx = ? \qquad 3x = 4\sin(\theta)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = ? \qquad x = \tan(\theta), \tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = ? \qquad x = a\cosh z \qquad (\cosh z)' = \sinh z$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = ? \qquad x = a\sinh z \qquad (\sinh z)' = \cosh z$$

Αλγεβρικοί μετασχηματισμοί

$\int \sqrt{2x+1}\,dx = ?$ Θέτουμε $u^2 = 2x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{u^2 - 1}{2} \Rightarrow dx = udu$

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u^2}\,udu = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = ? \qquad u^2 = x - 3$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ? \qquad u = e^x$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du}$$

$$\int x\cos x dx = ?$$

Θέτουμε $u = x$ και $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x$

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x$$

Ας δοκιμάσουμε $u = \cos x$ και $dv = x dx \Rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2}$

$$\int x\cos x dx = \int \cos x d\frac{x^2}{2} = \cos x\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} d\cos x = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\sin x dx \ ?$$

$\int \ln x dx = ?$ $\qquad u = \ln x, dv = dx$

$\int x e^{ax} dx = ?$ $\qquad u = x, dv = e^{ax} dx$

$\int x^2 \cos x dx = ?$ $\qquad u = x^2, dv = \cos x dx$

$\int e^x \cos x dx = ?$ $\qquad u = e^x, dv = \cos x dx$ και πρόσθεση

$\qquad u = \cos x, dv = e^x dx$

Ολοκλήρωση αλγεβρικών κλασμάτων

A. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{(ax+b)'}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$$

B. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του παρονομαστή τότε διαιρώ τον αριθμητή με τον παρονομαστή.

$$\int \frac{x^3}{x-1}dx = ?$$

$$x^3 = q(x)(x-1) + r(x), \deg r(x) < \deg(x-1) = 1 \Rightarrow$$

$$x^3 = q(x)(x-1) + r \Rightarrow 1^3 = q(1)\times 0 + r \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$$

$$q(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$$

$$\int \frac{x^3}{x-1}dx = \int \frac{(x^2+x+1)(x-1)+1}{x-1}dx = \int (x^2+x+1)dx + \int \frac{1}{x-1}dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1|$$

$$\int \frac{x}{x+2}dx = ?$$

$$\int \frac{x^2}{x+2}dx = ?$$

Γ. Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή.

$$S(x)=\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

όπου $A_i=\lim_{x\to a_i}(x-a_i)S(x)$.

$$\left.\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2-1}=\dfrac{A_1}{x-1}+\dfrac{A_2}{x+1}\\[2ex] A_1=\lim_{x\to 1}(x-1)\dfrac{2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}\\[2ex] A_2=\lim_{x\to -1}(x+1)\dfrac{2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\right\}\Rightarrow\frac{2x+1}{x^2-1}=\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$$

$$\int\frac{2x+1}{x^2-1}dx=\int\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}dx=\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=?$$

Δ. Ο παρονομαστής έχει ρίζα με πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας.

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$

όπου

$$A_2 = \lim_{x\to 1}(x-1)^2 \frac{2x+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}(2x+1) = 3$$

$$A_1 = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1!}\frac{d}{dx}\left[(x-1)^2 \frac{2x+1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to 1} 2 = 2$$

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx = 2\ln|x-1| - 3\frac{1}{x-1}$$

Συνδυασμός των παραπάνω :

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = ?$$

Ε. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = ?$

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Αναγωγή δηλαδή σε μορφές όπως $z^2 \pm a^2$ και συνεπώς σε γνωστά ολοκληρώματα.

$$\int \frac{dx}{3x^2+6x+1} = \int \frac{dx}{3\left(x^2+\frac{6}{3}x+\frac{1}{3}\right)} = \int \frac{dx}{3\left(x^2+2x+1-1+\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{3\left((x+1)^2-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{1}{3}\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+1+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right|$$

ΣT. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = ?$

$$\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b \qquad Ax+B=\frac{A}{2a}(2ax+b)-\frac{Ab}{2a}+B$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{\left(ax^2+bx+c\right)'}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

$$\int \frac{4x-3}{x^2+1}dx = \int \frac{2\times 2x-3}{x^2+1}dx = 2\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{3}{x^2+1}dx =$$

$$= 2\ln\left|x^2+1\right| - 3\tan^{-1}x$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx = ?$$

Z. Ο παρονομαστής δεν μπορεί να μετατραπεί σε γινόμενο γραμμικών παραγόντων.

$$\frac{(x-2)}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+(2C+A)}{(x+2)(x^2+1)}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} A+B=0 \\ 2B+C=1 \\ 2C+A=-2 \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} B=-A \\ C=1-2B=1+2A \\ 2(1+2A)+A=-2 \end{Bmatrix}\Rightarrow\left\{A=-\frac{4}{5},B=\frac{4}{5},C=-\frac{3}{5}\right\}$$

$$\frac{(x-2)}{(x+2)(x^2+1)}=-\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{1}{5}\frac{4x-3}{x^2+1}=-\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{1}{5}\frac{2(2x)-3}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}+\frac{2}{5}\frac{2x}{x^2+1}-\frac{3}{5}\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int\frac{(x-2)}{(x+2)(x^2+1)}dx=\int-\frac{4}{5}\frac{1}{x+2}dx+\int\frac{2}{5}\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{3}{5}\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=-\frac{4}{5}\ln|x+2|+\frac{2}{5}\ln|x^2+1|-\frac{3}{5}\tan^{-1}x$$

Η. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = ?$

$$\int \frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \sqrt{ax^2+bx+c}$$ (συνεπώς ίδια τεχνική με πριν)

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = ? \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2+4x+5\right) = \frac{1}{2}\left(2x+4\right) = x+2$$

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = \int \frac{3(x+2)-4}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx = 3\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx - 4\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+1}}dx =$$

$$= 3\sqrt{x^2+4x+5} - 4\sinh^{-1}\left(x+2\right)$$

Θ. Χρήσιμα τεχνάσματα.

Μετατροπή του αριθμητή σε ρητό π.χ. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\sqrt{\frac{x-1}{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

Αντικατάσταση π.χ. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ θέτουμε $x = \frac{1}{u}, u = \frac{1}{x}, dx = -\frac{1}{u^2}du$

ΠΡΩΤΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ και F είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της f, τότε

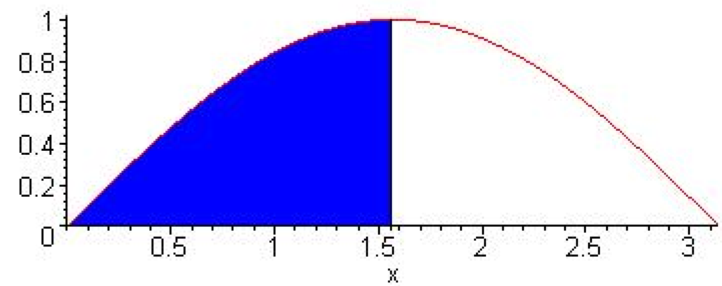
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

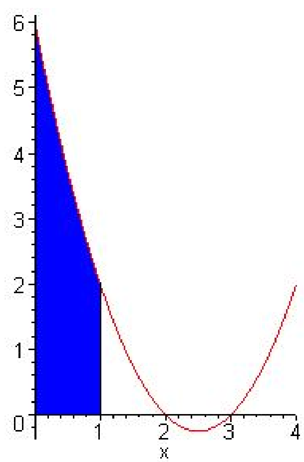
Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (-\cos(0)) = 0 + 1 = 1$$



$$\int_0^1 \left(x^2 - 5x + 6\right)dx = ?$$



Ιδιότητες των ορίων

Α. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Β. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Γ. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(y)dy$

Πρδ. $y = a - x \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = a \rightarrow y = 0 \\ x = b \rightarrow y = a - b \\ dy = -dx \end{array}\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_0^{a-b} f(y)dy$

Ο κανόνας του Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x))\frac{dv}{dx} - F(u(x))\frac{du}{dx}$$

$$y = \int_{\sin x}^{x^2}(t+1)dt \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + (\sin x + 1)\frac{d}{dx}(\sin(x)) = 2x\left(x^2+1\right) + \cos x(\sin x + 1)$$

Διαχωρισμός θετικών και αρνητικών εμβαδών

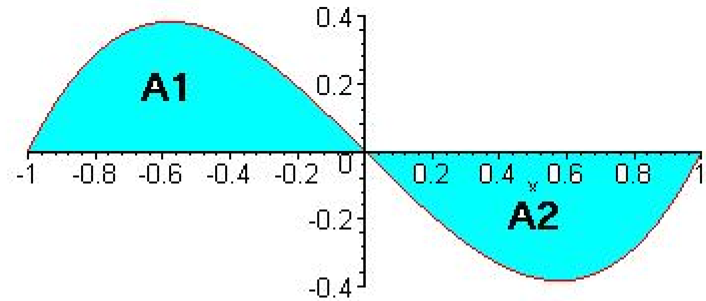
Παράδειγμα. Υπολογίστε την συνολική επιφάνεια που ορίζεται από την καμπύλη $y = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ και τον άξονα των x.

$$E = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - x\right) dx = |A1| + |A2| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{0} \left(x^3 - x\right) dx \right| + \left| \int_{0}^{1} \left(x^3 - x\right) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{1} \right| =$$

$$= \left| -\left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right] \right| + \left| \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2} \right] \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

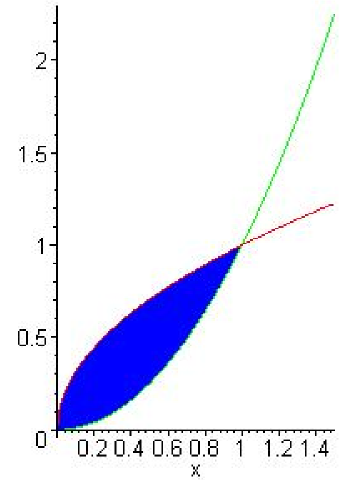


Εμβαδόν μεταξύ δύο καμπύλων $f_1(x) \geq f_2(x)$ **για** $a \leq x \leq b$

$$E = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right) dx$$

Αν $f_2(x)$ παίρνει αρνητικές τιμές στο $[a,b]$ τότε παίρνουμε $E = \int_a^b \left| f_1(x) - f_2(x) \right| dx$

Παράδειγμα. Να υπολογιστεί το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν μεταξύ των $f_1(x) = \sqrt{x}$ και $f_2(x) = x^2$



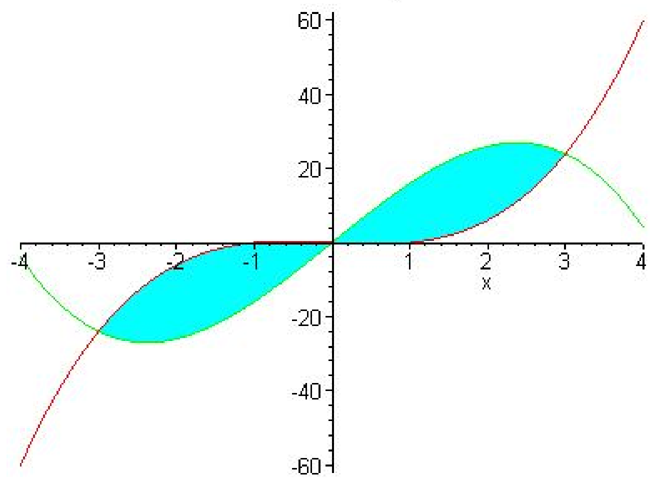
$$\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

$$\int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{2}{3} 1^{\frac{3}{2}} - \frac{1^3}{3}\right] - \left[\frac{2}{3} 0^{\frac{3}{2}} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{1}{3}$$

Άσκηση. Ποιο το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν αν

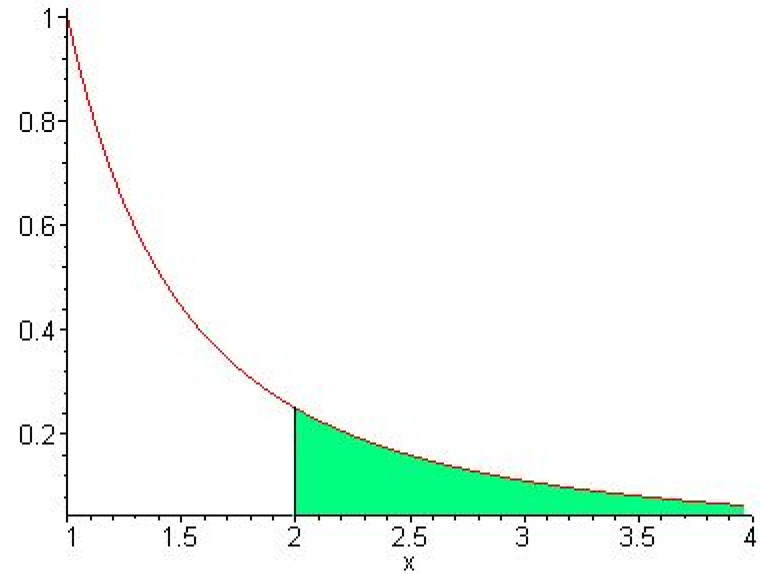
$$f_1(x) = x^3 - x, f_2(x) = -x^3 + 17x$$



Γενικευμένη ολοκλήρωση

Γενικευμένο ολοκλήρωμα α' είδους

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ ή } \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$



Παράδειγμα.

$$\int_2^b \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_2^b = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^b = -\frac{1}{b} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

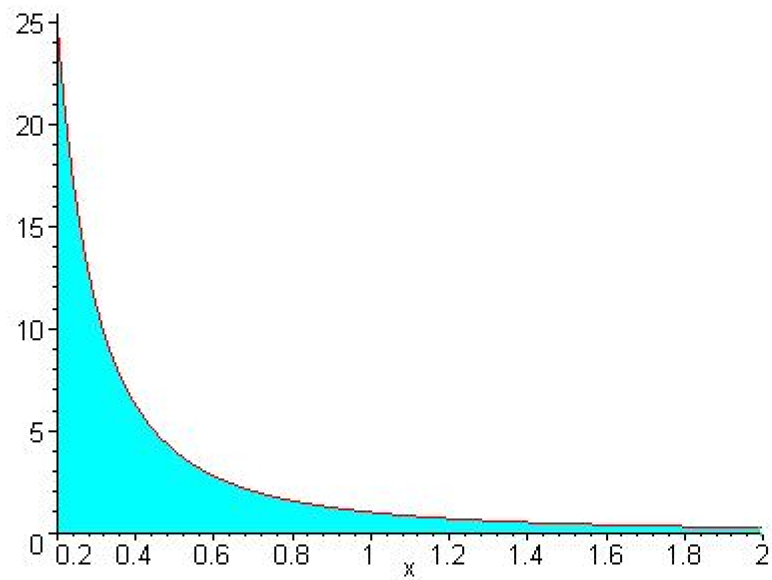
$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

Γενικευμένο ολοκλήρωμα β' είδους

$$\int_{a+}^{b} f(x)dx \text{ ή } \int_{a}^{b-} f(x)dx$$

$$\int_a^2 \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_a^2 = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{a} \Rightarrow$$

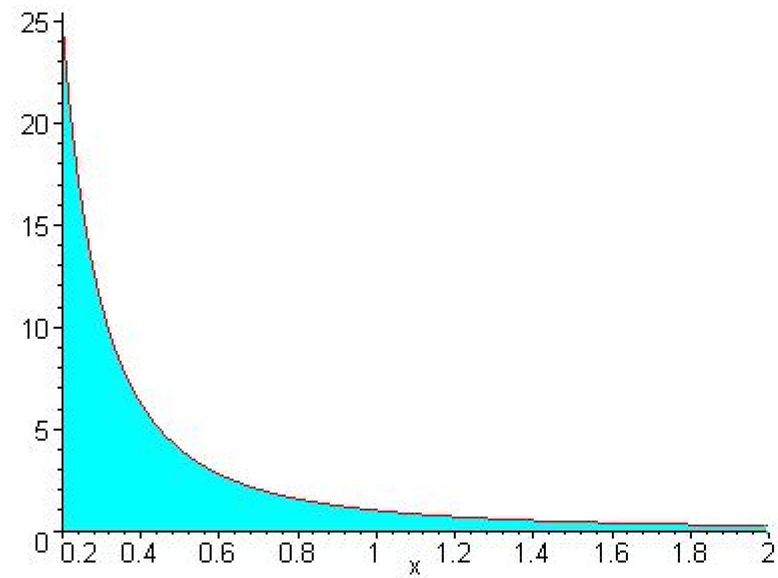
$$\int_{0+}^{2} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{a}\right] = +\infty$$



Γενικευμένο ολοκλήρωμα γ' είδους

π.χ. $\int_{a+}^{\infty} f(x)dx$ ή $\int_{a-}^{\infty} f(x)dx$

συγχρόνως α' και β' είδους



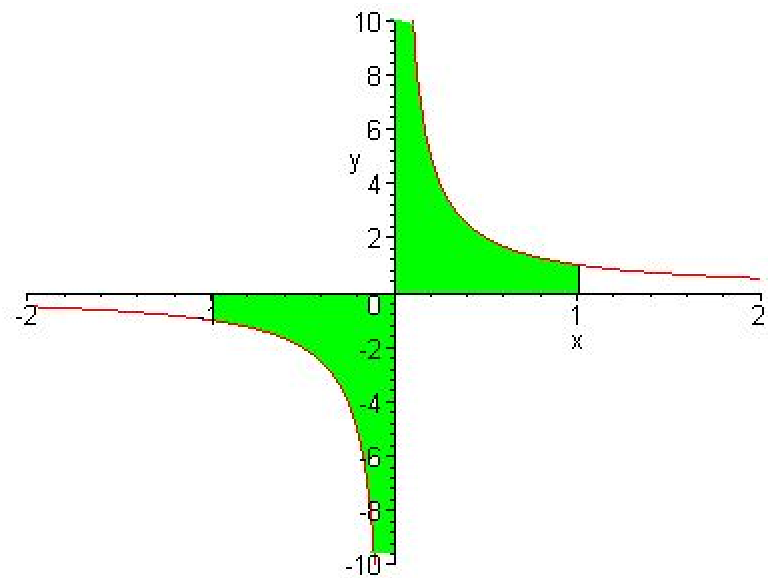
$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{0+}^{b} \frac{dx}{x^2} + \int_{b}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b + \lim_{a\to +\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_b^a =$$

$$= \lim_{a\to 0+}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right] + \lim_{a\to +\infty}\left[-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right] =$$

$$= +\infty + \frac{1}{b} = +\infty$$

Προσοχή στα σημεία ασυνέχειας (κλάσματα).



$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-1}^{1} = \ln 1 - \ln|-1| = 0 \text{ } \mathbf{ΛΑΘΟΣ}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{a\to 0-} \int_{-1}^{a} \frac{1}{x} dx + \lim_{a\to 0+} \int_{a}^{1} \frac{1}{x} dx =$$

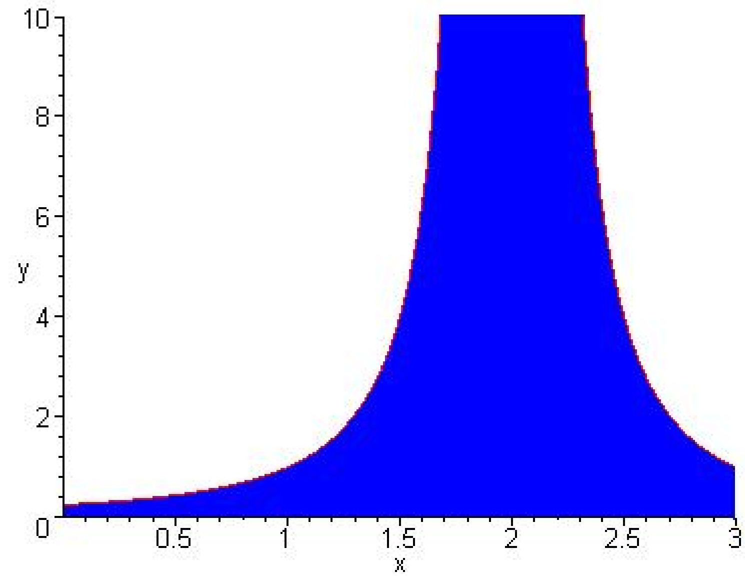
$$= \lim_{a\to 0-} [\ln|a|]_{-1}^{a} + \lim_{a\to 0-} [\ln|a|]_{a}^{1} = -\infty + \infty$$

Παράδειγμα.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \lim_{a\to 2-}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \lim_{a\to 2+}\int_a^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} =$$

$$= \lim_{a\to 2-}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right]_0^a + \lim_{a\to 2+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-2)^2}\right]_a^3 =$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(-2)^2} + \frac{3}{2}$$



Άσκηση. Να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$$