Ακολουθίες

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών:

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ονομάζεται ακολουθία.

Οι τιμές της f "ακολουθούν" η μία την άλλη σύμφωνα με τη διαδοχή που επιβάλλουν οι φυσικοί αριθμοί:

$$\alpha_1 = f(1),\ \alpha_2 = f(2),\ \ldots,\ \alpha_\nu = f(\nu),\ \alpha_{\nu+1} = f(\nu+1),\ \ldots$$

γι αυτό και έχει επικρατήσει για τις ακολουθίες ο συμβολισμός α_ν αντί του $f(\nu)$.

Γράφουμε δηλαδή

$$\alpha_\nu = 2\nu + 1 \quad \text{αντί του} \quad f(\nu) = 2\nu + 1.$$

Όριο ακολουθίας

Αν για πολύ μεγάλες τιμές του δείκτη ν η ακολουθία α_ν σταθεροποιείται γύρω από έναν αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η α_ν συγκλίνει ή έχει όριο το α και συμβολίζουμε: $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \alpha$.

Τυπικά ο ορισμός της σύγκλισης έχει ως εξής:

$$\lim_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \alpha \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \ \forall\, \nu \geq \nu_0.$$

π.χ: η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ συγκλίνει στο 0:

Τιμές της α_ν: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{1000} = 0.001, \ldots \frac{1}{10000} = 0.0001, \ldots$

Βασικές ιδιότητες ορίων ακολουθιών.

$$\lim_{\nu\to+\infty}(\alpha_\nu+\beta_\nu)=\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu+\lim_{\nu\to+\infty}\beta_\nu$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}(\alpha_\nu-\beta_\nu)=\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu-\lim_{\nu\to+\infty}\beta_\nu$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu)=\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu\cdot\lim_{\nu\to+\infty}\beta_\nu$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu\Big/\lim_{\nu\to+\infty}\beta_\nu$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\alpha_0+\alpha_1\cdot\nu+\alpha_2\cdot\nu^2+\dots+\alpha_m\nu^m}{\beta_0+\beta_1\cdot\nu+\beta_2\cdot\nu^2+\dots+\beta_k\nu^k}=\begin{cases}\frac{\alpha_m}{\beta_k}, & \text{αν } m=k\\ 0, & \text{αν } k>m\\ +\infty, & \text{αν } m>k,\ \frac{\alpha_m}{\beta_k}>0\\ -\infty, & \text{αν } m>k,\ \frac{\alpha_m}{\beta_k}<0\end{cases}$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\nu}=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{\beta_0+\beta_1\nu+\dots+\beta_k\nu^k}=0.$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\nu=\lim_{\nu\to+\infty}\nu^k=+\infty$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{\nu}=1.$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\theta^\nu=\begin{cases}0, & \text{αν } |\theta|<1\\ 1, & \text{αν } \theta=1\\ +\infty, & \text{αν } \theta>1\\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } \theta\le-1.\end{cases}$$

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu=e.$$

Φραγμένες ακολουθίες

Μια ακολουθία α_ν ονομάζεται άνω φραγμένη αν υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$\alpha_\nu \leq M \quad , \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

π.χ.: Η $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ είναι άνω φραγμένη αφού $\frac{1}{\nu} \leq 1 , \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Η α_ν ονομάζεται κάτω φραγμένη αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_\nu \geq m \quad , \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Τέλος η α_ν ονομάζεται φραγμένη αν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω φραγμένη:

$$m \leq \alpha_\nu \leq M \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Το άνω φράγμα (M) όπως και το κάτω φράγμα (m) μιας ακολουθίας δεν είναι μοναδικά.

Μονοσήμαντα ορίζονται τα:

- ελάχιστο άνω φράγμα = Supremum,
- μέγιστο κάτω φράγμα = Infimum.

- Αν $\alpha_\nu \leq \beta_\nu \ \forall \nu \in \mathbb{N}$, τότε $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu \leq \lim\limits_{\nu \to +\infty} \beta_\nu$.

Μονοτονία Ακολουθιών.

Η ακολουθία α_ν ονομάζεται αύξουσα αν ισχύει ότι:

$$\alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1} \quad , \nu \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή οι όροι της ακολουθίας μεγαλώνουν όσο αυξάνεται ο δείκτης ν.

Η α_ν ονομάζεται φθίνουσα αν:

$$\alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1} \quad , \nu \in \mathbb{N}$$

Δηλαδή οι όροι της συνεχώς μικραίνουν:

Παραδείγματα:

- Αύξουσα ακολουθία: $\alpha_\nu = 2\nu$

$$\alpha_1 = 2 < \alpha_2 = 4 < \alpha_3 = 6 < \alpha_4 = 8 < \dots$$

- Φθίνουσα ακολουθία: $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}$

$$\beta_1 = 1 > \beta_2 = \frac{1}{2} > \beta_3 = \frac{1}{3} > \dots$$

- Αν μια ακολουθία είναι αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει και $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \text{supremum}(\alpha_\nu)$

- Αν η α_ν είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνει και $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \text{infimum}(\alpha_\nu)$

Ακολουθίες Cauchy

Μια ακολουθία α_ν ονομάζεται ακολουθία Cauchy αν οι όροι της βρίσκονται πολύ κοντά από κάποιον δείκτη ν_0 και μετά:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N} : \quad |\alpha_\nu - \alpha_\mu| < \varepsilon \quad \forall\, \nu, \mu \geq \nu_0.$$

Ισχύει ότι:

Η α_ν είναι ακολουθία Cauchy <=>

<=> Η α_ν είναι συγκλίνουσα.