

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1. Απόλυτη τιμή αριθμού

Απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν - πάντα θετικός αριθμός

$$|x| = x \quad \text{αν } x \geq 0$$

$$|x| = -x \quad \text{αν } x < 0$$

Κανόνες:

$$|-x| = |x|$$

$$|xy| = |x| |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{για } y \neq 0$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$|x-y| \leq |x| + |y|$$

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$

2. Δυνάμεις (εκθέτες)

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b} \right)^n$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

3. Ρίζες

$$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$a^{1/2} = \sqrt{a}$$

$$a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$$

$$\left(\sqrt[n]{a} \right)^n = a$$

$$a^n \sqrt{x} + b^n \sqrt{x} = (a+b)^n \sqrt{x}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{a}{b} \right)^{1/n}$$

4. Πολυώνυμα

$$(a + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

5. Επίλυση Δευτεροβάθμιας Εξίσωσης

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Έχουμε τη διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac$

Λύσεις:

- $\Delta > 0$ Δύο άνισες πραγματικές ρίζες $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, οπότε

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- $\Delta = 0$ Μία πραγματική ρίζα διπλή $x_{1,2} = -b / 2a$, οπότε

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

- $\Delta < 0$ Δεν έχει ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Άθροισμα ριζών $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

Γινόμενο ριζών $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

6. Εξίσωση ευθείας η οποία έχει κλίση a και διέρχεται από το σημείο (x_1, y_1) :

$$y = y_1 + a(x - x_1).$$

7. Εξίσωση ευθείας που διέρχεται από δυο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2)

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

8. Κανόνες παραγώγισης

$$8.1 \quad [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$8.2 \quad [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$8.3 \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$8.4 \quad \text{Εάν } y = f(u) \text{ και } u = g(x) \text{ τότε } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}, \text{ (αλυσωτός κανόνας).}$$

$$8.5 \quad \text{Εάν η συνάρτηση } g \text{ είναι αντίστροφη της } f \text{ (δηλαδή } g[f(x)] = x \text{)}$$
$$\text{τότε } g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ όπου } y = f(x).$$

9. Παραγώγιση γνωστών συναρτήσεων

$$6.1 \quad [f(x)^n]' = nf'(x)f^{n-1}(x)$$

$$6.2 \quad [e^x]' = e^x$$

$$6.3 \quad [ae^{g(x)}]' = ag'(x)e^{g(x)}$$

$$6.4 \quad [\ln x]' = \frac{1}{x}$$

$$6.5 \quad [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

10. Ελαστικότητα συνάρτησης $y = f(x)$:

$$\varepsilon = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}} = \frac{dy}{dx} \frac{x}{y} \text{ η εναλλακτικά } \varepsilon = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}$$

11. Μέγιστα και ελάχιστα συνάρτησης μιας μεταβλητής $y = f(x)$

	Μέγιστο	Ελάχιστο
Συνθήκη Α' τάξεως	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = 0$
Συνθήκη Β' τάξεως	$\frac{d^2y}{d^2x} < 0$	$\frac{d^2y}{d^2x} > 0$

12. Ορισμένο ολοκλήρωμα της f από $x = a$ μέχρι $x = b$.

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$ όπου F είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f , δηλαδή $F'(x) = f(x)$.

13. Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

$$13.1 \quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$13.2 \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$13.3 \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$14.4 \quad \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

$$14.5 \quad \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

15. Παραγοντική ολοκλήρωση

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

16. Ολοκλήρωση γνωστών συναρτήσεων

$$16.1 \quad \int adx = ax + c$$

$$16.2 \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$16.3 \quad \int x^{-1} dx = \ln x + c$$

$$16.4 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$$

$$16.5 \quad \int f^n(x)dx = \frac{1}{n+1} \frac{1}{f'(x)} f^{n+1}(x) + c$$

$$16.6 \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$16.7 \quad \int f'(x)e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Ε. Καβουσανός, 'Μαθηματικός Λογισμός σε Επιχειρησιακά και Οικονομικά Προβλήματα με χρήση Excel', Εκδόσεις Μπένου, 2002.

[2] Ν. Μπλέσιος, 'Επιχειρησιακά Μαθηματικά', Τόμος Α, ΕΑΠ, 2002.