

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ

§ 2.1 Ορισμοί

Ας θεωρήσουμε δύο σύνολα A, B . Μία απεικόνιση $f: A \rightarrow B$ καλείται **συνάρτηση** αν σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα στοιχείο $y \in B$. Το σύνολο A καλείται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f ενώ το σύνολο B καλείται **σύνολο άφιξης** της συνάρτησης f . Κάθε στοιχείο y του συνόλου B καλείται **εικόνα** του στοιχείου x μέσω της συνάρτησης f και συμβολίζεται ως $y = f(x)$.

Αν το σύνολο B είναι υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών τότε η f καλείται **πραγματική συνάρτηση**. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε η f καλείται συνάρτηση **πραγματικής μεταβλητής**. Στο εξής θα ασχοληθούμε μόνο με πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής.

Εστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε:

- Το σύνολο $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x)\}$ καλείται **πεδίο τιμών** της συνάρτησης f .
- Η f καλείται **αμφιμονότιμη** συνάρτηση εάν

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ή ισοδύναμα εάν

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- Η f καλείται **επί του $\mathbb{R}$** όταν το πεδίο τιμών της ταυτίζεται με το σύνολο άφιξης δηλαδή όταν $f(A) = \mathbb{R}$.

Σημείωση 1 Μία αμφιμονότιμη συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(A)$ καλείται και **συνάρτηση 1-1**.

- Η f καλείται **άνω φραγμένη** στο A εάν

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in A.$$

- Η f καλείται **κάτω φραγμένη** στο A εάν

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \geq M \quad \forall x \in A.$$

- Η f καλείται **φραγμένη** στο A εάν

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in A.$$

Επίσης η f καλείται **φραγμένη** στο A εάν

$$\exists M > 0: |f(x)| \leq M \quad \forall x \in A.$$

- Η f καλείται **γνησίως αύξουσα (αντ. αύξουσα)** στο A εάν

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \text{ (αντ. } x_1 \leq x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ (αντ. } f(x_1) \leq f(x_2)) .$$

- Η f καλείται **γνησίως φθίνουσα (αντ. φθίνουσα)** στο A εάν

$$\forall x_1, x_2 \in A: x_1 < x_2 \text{ (αντ. } x_1 \leq x_2) \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ (αντ. } f(x_1) \geq f(x_2)) .$$

Αν μία συνάρτηση f είναι (γνησίως) αύξουσα ή (γνησίως) φθίνουσα στο A τότε λέμε ότι η f είναι **(γνησίως) μονότονη** στο A .

- Η f καλείται **άρτια** συνάρτηση στο A εάν για κάθε $x \in A$, $-x \in A$ και

$$f(-x) = f(x) .$$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y .

- Η f καλείται **περιττή** συνάρτηση στο A εάν για κάθε $x \in A$, $-x \in A$ και

$$f(-x) = -f(x) .$$

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

- Η f καλείται **T -περιοδική** συνάρτηση αν για κάθε $x \in A$, $x+T \in A$ και

$$f(x+T) = f(x) ,$$

όπου ο T είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η παραπάνω ισότητα. Οι γραφικές παραστάσεις περιοδικών συναρτήσεων είναι επαναλαμβανόμενες “κόπιες” ανά διαστήματα μήκους T .

Δύο συναρτήσεις $f_1: A_1 \rightarrow f(A_1)$, $f_2: A_2 \rightarrow f(A_2)$ καλούνται **ίσες** όταν έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ίδιο τύπο, δηλαδή όταν $A_1 = A_2$ και $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in A_1$.

§ 2.2 Πράξεις με συναρτήσεις

Εστω $f_1: A_1 \rightarrow f(A_1)$, $f_2: A_2 \rightarrow f(A_2)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, τότε ορίζουμε τις κάτωθι πράξεις:

Πρόσθεση: $\forall x \in A_1 \cap A_2, (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x).$

Αφαίρεση: $\forall x \in A_1 \cap A_2, (f_1 - f_2)(x) = f_1(x) - f_2(x).$

Πολλ/σμός: $\forall x \in A_1 \cap A_2, (f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x).$

Διαίρεση: $\forall x \in A_1 \cap A_2, (f_1 / f_2)(x) = f_1(x) / f_2(x) \text{ με } f_2(x) \neq 0.$

Σύνθεση συναρτήσεων: Εστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(A) \subseteq \mathbb{R}, g: f(A) \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε τη σύνθεση $g \circ f: A \rightarrow B$ των συναρτήσεων f και g ως εξής

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Από τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι για να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ θα πρέπει πάντοτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης f να ταυτίζεται με το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Αντίστροφη συνάρτηση: Εστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(A)$, $y = f(x)$ είναι μία 1-1 συνάρτηση, τότε ορίζεται η συνάρτηση

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A: x = f^{-1}(y),$$

η οποία καλείται αντίστροφη συνάρτηση της $f(x)$ και ισχύει

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = x.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = f(x)$ και $z = f^{-1}(x)$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης

Θεωρούμε ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας και ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \alpha: I &\rightarrow \alpha(I): x = \alpha(t) \\ \beta: I &\rightarrow \beta(I): y = \beta(t) \end{aligned}$$

Για κάθε $t \in I$ τα σημεία με συντεταγμένες $(\alpha(t), \beta(t))$ ορίζουν μία καμπύλη του επιπέδου που δεν είναι κατ' ανάγκην γραφική παράσταση συνάρτησης.

Οι συναρτήσεις $x = \alpha(t), y = \beta(t), t \in I$ καλούνται παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης.

Εάν η συνάρτηση $\alpha(t)$ είναι 1-1, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $t = \alpha^{-1}(x)$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση

$$y: \alpha(I) \rightarrow \beta(I): y = \beta(t) = \beta(\alpha^{-1}(x)) = \beta \circ \alpha^{-1}(x).$$

§ 2.3 Οριο συναρτήσεων

Εστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(A)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση και έστω x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού A της f . Θα λέμε ότι η f έχει όριο στο σημείο x_0 τον αριθμό λ όταν μπορούμε να βρούμε πάντοτε μία “περιοχή” του σημείου x_0 τέτοια ώστε όλες οι τιμές $f(x)$ που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη περιοχή να βρίσκονται “εγκλωβισμένες οσοδήποτε κοντά θέλουμε” σε μία “περιοχή” του αριθμού λ .

Τι εννοούμε όμως όταν μιλάμε για περιοχή σημείου;

Υπενθυμίζουμε ότι στο Κεφάλαιο 1 (σελ. 7) ορίσαμε την περιοχή $\pi_\varepsilon(x_0)$ ενός σημείου x_0 κέντρου x_0 και ακτίνας ε να είναι το ανοικτό διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Θα επεκτείνουμε αυτό τον ορισμό στην περίπτωση $x_0 = \pm\infty$.

Ορισμός 2.3.1 Εστω $\varepsilon > 0$. Καλούμε περιοχή του σημείου $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ το ανοικτό διάστημα

$$\pi_\varepsilon(x_0) = \begin{cases} (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), & \text{όταν } x_0 \in \mathbb{R} \\ (\varepsilon, +\infty), & \text{όταν } x_0 = +\infty. \\ (-\infty, -\varepsilon), & \text{όταν } x_0 = -\infty \end{cases}$$

Εχοντας πλέον ορίσει την έννοια της περιοχής σημείου μπορούμε να περιγράψουμε με μαθηματικό τρόπο τον ορισμό του ορίου που δώσαμε διαισθητικά. Εχουμε λοιπόν

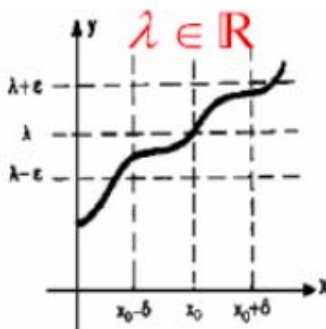
Ορισμός 2.3.2 Εστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f(A)$ και x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης του A . Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει όριο στο σημείο $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ τον αριθμό $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολικά $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$, αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0: \quad \forall x \in \pi_\delta(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \pi_\varepsilon(\lambda).$$

Ο παραπάνω ορισμός παριστάνεται γραφικά στα ακόλουθα ενδεικτικά σχήματα:

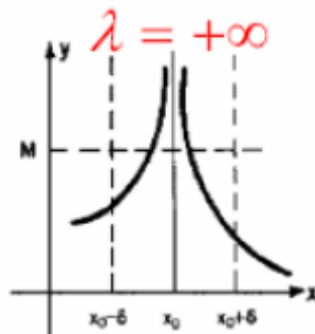
Σχήμα 1 Εστω $x_0 \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ και αν επιλέξουμε, υπάρχει πάντα ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, έτσι ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ η αντίστοιχη τιμή $f(x)$ εγκλωβίζεται εκατέρωθεν του πραγματικού αριθμού λ στο διάστημα $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$.



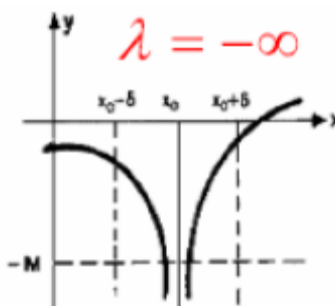
Σχήμα 2 Εστω $x_0 \in \mathbb{R}, \lambda = +\infty$

Οποιοδήποτε $M > 0$ και αν επιλέξουμε, υπάρχει πάντα ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, έτσι ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ η αντίστοιχη τιμή $f(x)$ είναι μεγαλύτερη του M .



Σχήμα 3 Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda = -\infty$.

Οποιοδήποτε $M > 0$ και αν επιλέξουμε, υπάρχει πάντα ένα διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, έτσι ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ η αντίστοιχη τιμή $f(x)$ είναι μικρότερη του $-M$.



Σημείωση 2

- Το σημείο συσσώρευσης x_0 ΔΕΝ ανήκει κατ'ανάγκην στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Η f δεν έχει όριο στο σημείο x_0 αν ισχύει η άρνηση του ορισμού, δηλαδή:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in \pi_\delta(x_0) - \{x_0\} : f(x) \notin \pi_\varepsilon(\lambda).$$

- Για να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ΔΕΝ είναι αναγκαίο να ορίζεται η τιμή $f(x_0)$.

Σημείωση 3 Μία συνάρτηση $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών καλείται ακολουθία. Αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \forall (x_n) : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lambda. \quad (3.1)$$

Η σχέση (3.1) είναι πολύ χρήσιμη σε περιπτώσεις όπου θέλουμε να δείξουμε ότι ΔΕΝ υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες x_n και y_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = x_0 \text{ και } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n).$$

Πρόταση 2.3.1 Το όριο μιας συνάρτησης (εάν υπάρχει) σ' ένα σημείο συσσώρευσης x_0 είναι μοναδικό.

Πρόταση 2.3.2 Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή του σημείου x_0 όπου η $f(x)$ διατηρεί το πρόσημο του ορίου λ .

Πρόταση 2.3.3 Αν $f(x) > 0$ (αντίστ. $f(x) < 0$) σε μία περιοχή ενός σημείου x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$ (αντίστ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$) υπό την προϋπόθεση ότι το όριο υπάρχει.

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ

Υποθέτουμε ότι ένα σημείο x κινείται πάνω στην πραγματική ευθεία προς την κατεύθυνση ενός σημείου x_0 κινούμενο εξ αριστερών του σημείου x_0 , δηλαδή $x < x_0$ και $x \rightarrow x_0$. Αν ισχύει $f(x) \rightarrow \lambda_1$ όταν $x \rightarrow x_0$ κατά την κίνηση που περιγράψαμε λέμε ότι **η συνάρτηση f έχει εξ αριστερών όριο στο σημείο x_0 τον αριθμό λ_1** και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda_1.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ένα σημείο x κινείται πάνω στην πραγματική ευθεία προς την κατεύθυνση ενός σημείου x_0 κινούμενο εκ δεξιών του σημείου x_0 , δηλαδή $x > x_0$ και $x \rightarrow x_0$. Αν ισχύει $f(x) \rightarrow \lambda_2$ όταν $x \rightarrow x_0$ κατά την κίνηση που περιγράψαμε λέμε ότι **η συνάρτηση f έχει εκ δεξιών όριο στο σημείο x_0 τον αριθμό λ_2** και γράφουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda_2.$$

Προφανώς

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda.$$

Σημείωση 4 Ενδείκνυται η χρήση πλευρικών ορίων στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) όταν $x \rightarrow x_0$, το x_0 είναι ρίζα του αριθμητή ή του παρονομαστή μιας ρητής συνάρτησης $f(x)$ και το πρόσημο της f εναλλάσσεται εκατέρωθεν του x_0 ,

(β) όταν υπάρχει ακέραιο μέρος στον τύπο της f , ο x_0 είναι ακέραιος αριθμός και $x \rightarrow x_0$ εντός του ακεραίου μέρους,

(γ) όταν υπάρχει απόλυτη τιμή στον τύπο της f , $x \rightarrow x_0$ και το x_0 είναι ρίζα της ποσότητας μέσα στο απόλυτο.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΟΡΙΑ

Εστω $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda_2$, $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$. Τότε

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) &= \lambda_1 \pm \lambda_2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) g(x)) &= \lambda_1 \lambda_2 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) / g(x)) &= \lambda_1 / \lambda_2, \lambda_2 \neq 0 \\ f(x) \leq g(x) &\Rightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2\end{aligned}$$

Πρόταση 2.3.4 (Παρεμβολή)

Εάν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lambda$. Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$.

Πρόταση 2.3.5 Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}: y = f(x)$, $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}: z = g(y)$. Εάν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ και το $\lim_{y \rightarrow \lambda} g(y) = m \in \mathbb{R}$ και αν υπάρχει περιοχή $\pi_\varepsilon(x_0)$ του σημείου x_0 τέτοια ώστε $f(x) \neq \lambda \quad \forall x \in \pi_\varepsilon(x_0) - \{x_0\}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = m \in \mathbb{R}.$$

ΓΝΩΣΤΑ ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΓΝΩΣΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$|\eta\mu x| \leq |x| \leq |\varepsilon\phi x|$$

Για να υπολογίσουμε όρια συναρτήσεων εφαρμόζουμε τις ιδιότητες ορίων, εφόσον όμως δεν προκύπτουν απροσδιόριστες μορφές. Στην περίπτωση που έχουμε απροσδιόριστες μορφές θα πρέπει να "άρουμε" την απροσδιοριστία ώστε στη συνέχεια να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις συνήθεις ιδιότητες των ορίων. Οσον αφορά τις απροσδιόριστες μορφές της μορφής ∞/∞ , $0/0$, $\infty \cdot \infty$, συνήθως χρησιμοποιούμε τεχνικές όπως π.χ. ο πολ/σμός και διαίρεση με συζυγή παράσταση και τον κανόνα L' Hospital που θα αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο (βλέπε επίσης άσκ. 5 (δ), (η)). Οσον αφορά τις απροσδιόριστες μορφές 0^0 , 1^∞ , 0^∞ , ∞^0 , εργαζόμαστε ως εξής:

Εστω $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} f(\lambda)^{g(\lambda)}, & \text{εάν } \lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) \in \mathbb{R}^+, \lim_{x \rightarrow \lambda} g(x) \in \mathbb{R} \\ 0 \text{ ή } +\infty, & \text{εάν } \lim_{x \rightarrow \lambda} f(x) \in \mathbb{R}^+ - \{0, 1\}, \lim_{x \rightarrow \lambda} g(x) = \pm\infty \end{cases}$$

Αν συμβεί κάποια από τις απροσδιόριστες μορφές $0^0, 1^{\pm\infty}, 0^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$ εργαζόμαστε ως εξής:

Εστω $h(x) = f(x)^{g(x)}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} \ln(h(x)) = \lim_{x \rightarrow \lambda} \ln(f(x)^{g(x)}) \Leftrightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow \lambda} h(x)) = \lim_{x \rightarrow \lambda} (g(x) \ln(f(x))).$$

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow \lambda} (g(x) \ln(f(x)))$ χρησιμοποιούμε τον κανόνα L' Hospital (απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$ την οποία μετασχηματίζουμε σε απροσδιοριστία $0/0$ ή ∞/∞) και παίρνουμε τελικά

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \lambda} (g(x) \ln(f(x)))}.$$

§ 2.4 Συνέχεια-Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Ορισμός 2.4.1 Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in A$ (όταν το σημείο x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A) εάν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0: \quad \forall x \in \pi_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in \pi_\varepsilon(f(x_0)).$$

Επειδή στην περίπτωση αυτή το σημείο x_0 και η τιμή $f(x_0)$ είναι πραγματικοί αριθμοί, οι περιοχές $\pi_\delta(x_0)$, $\pi_\varepsilon(f(x_0))$ είναι ανοικτά διαστήματα (βλέπε σελ. 18) ο παραπάνω ορισμός μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0: \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Σημειώνουμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της. Τελικά έχουμε:

Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Η f είναι συνεχής στο σημείο x_0 αν

- (α) το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της,
- (β) το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της, υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Στο εξής θα θεωρούμε ότι το $x_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του A . Τότε

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Επίσης ισχύει

$$f \text{ συνεχής στο } x_0 \Leftrightarrow |f(x_0 + h) - f(x_0)| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , και αν υποθέσουμε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης, τότε ισχύει η σχέση (3.1) σελ. 19 για $\lambda = f(x_0)$, οπότε:

$$\forall (x_n): x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0),$$

άρα:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n).$$

Ετσι προκύπτει και η ακόλουθη:

Πρόταση 2.4.1 Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και η $g: \mathbb{R} \rightarrow B$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε και η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(f(x_0)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)).$$

Η πρόταση αυτή μας επιτρέπει να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στον υπολογισμό ορίων. Για παράδειγμα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \stackrel{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(y)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \eta\mu(y) = 0,$$

αφού οι συναρτήσεις $y = 1/x$, $y = \eta\mu x$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Σημεία ασυνέχειας-Συνεχής επέκταση

Όταν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 λέμε ότι το x_0 είναι σημείο ασυνέχειας της f . Υπάρχουν δύο ειδών σημεία ασυνέχειας:

Σημεία ασυνέχειας 1^{ov} είδους: υπάρχουν τα πλευρικά όρια και είναι διαφορετικά.

Σημεία ασυνέχειας 2^{ov} είδους: ένα ή και τα δύο πλευρικά όρια είτε δεν υπάρχουν, είτε δεν είναι πεπερασμένα.

Αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίδια, τότε λέμε ότι η ασυνέχεια είναι *απαλείψιμη* και μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς τη συνάρτησή μας.

Ορισμός 2.4.2 Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A , $x_0 \notin A$. Αν υπάρχει συνάρτηση $g: A \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$ και $g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θα λέμε ότι η $g(x)$ είναι **συνεχής επέκταση** της $f(x)$.

Παράδειγμα 1 Εστω $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|}$. Εστω $x > 0$.

Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|} = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\sqrt{|x|}}{2} \right)}{|x|} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2},$$

άρα υπάρχει η συνεχής επέκταση της f :

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 1/2, & x = 0 \end{cases} \quad \square$$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

Πρόταση 2.4.3 Αν $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$ τότε και οι

$$\begin{aligned} &f(x) \pm g(x) \\ &f(x) g(x) \\ &f(x) / g(x), \text{ με } g(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

είναι επίσης συνεχείς στο $x_0 \in A$.

Πρόταση 2.4.3 Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ τότε $\exists \delta > 0$ έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο ανοικτό διάστημα $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Βασικά θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα 2.4.1 (Bolzano) Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $f(a) f(b) < 0$ τότε υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, b) .

Θεώρημα 2.4.2 (ενδιαμέσων τιμών) Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ με $f(a) \neq f(b)$, τότε η $f(x)$ παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των τιμών $f(a)$ και $f(b)$, είναι φραγμένη στο $[a, b]$ και το πεδίο τιμών της είναι κλειστό διάστημα.

Θεώρημα 2.4.3 Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής η οποία έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Θεώρημα 2.4.4 Αν $f : I \rightarrow f(I)$ είναι συνεχής και 1-1 σε διάστημα I τότε είναι γνησίως μονότονη στο I .

§ 2.5 Μερικές γνωστές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

1. Η εκθετική συνάρτηση.

Ορίζουμε ως εκθετική συνάρτηση με βάση ένα θετικό πραγματικό αριθμό a τη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : f(x) = a^x.$$

Ιδιότητες:

- Το πεδίο τιμών της εκθετικής συνάρτησης είναι το ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$.
- Για κάθε τιμή του $a > 0$ ισχύει

$$\begin{cases} \text{εαν } a > 1 & f \text{ γνησίως αύξουσα} \\ \text{εαν } 0 < a < 1 & f \text{ γνησίως φθίνουσα} \end{cases}.$$

Εάν $a = 1$ προφανώς έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

- Η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής και 1-1 συνάρτηση.
- Ο άξονας x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της εκθετικής συνάρτησης.

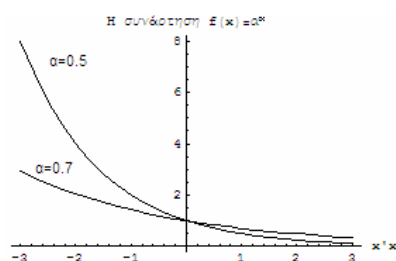
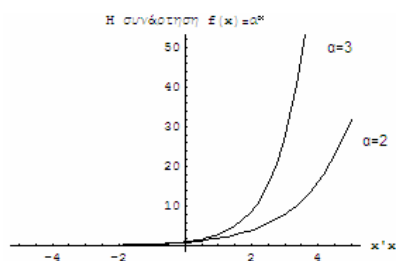
$$(a_1 a_2)^x = a_1^x a_2^x, \quad x \in \mathbb{R}, a_1, a_2 > 0$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

- $(a^x)^y = a^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad x \in \mathbb{R}, a, b > 0$$



2. Η συνάρτηση $\text{Log}_a x$.

Εφόσον η εκθετική συνάρτηση είναι συνάρτηση 1-1 για κάθε $a > 0$ ($a \neq 1$) ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής που καλείται λογαριθμική συνάρτηση με βάση το θετικό αριθμό a :

$$\log_a x: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1.$$

Ιδιότητες:

- Το πεδίο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης είναι το ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$.
- Για κάθε τιμή του $a > 0$ ισχύει:

$$\begin{cases} a > 1, & f \text{ γνησίως αύξουσα} \\ 0 < a < 1, & f \text{ γνησίως φθίνουσα} \end{cases}.$$

- Η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχής και 1-1 συνάρτηση.
- Ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της λογαριθμικής συνάρτησης.

$$\log_a (a^x) = x = a^{\log_a x}, x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, x, y \in \mathbb{R}^+,$$

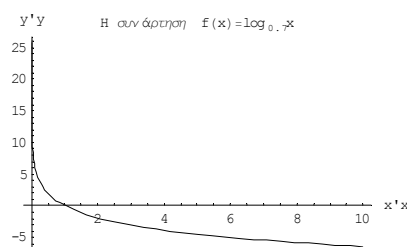
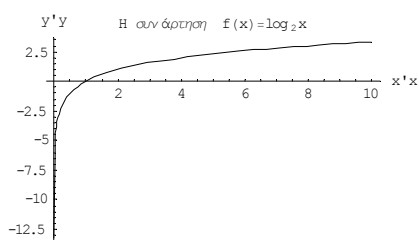
$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y, x, y \in \mathbb{R}^+,$$

$$\log_a (x^b) = b \log_a x, x \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R},$$

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, x \in \mathbb{R}^+, a, b > 0, a, b \neq 1$$

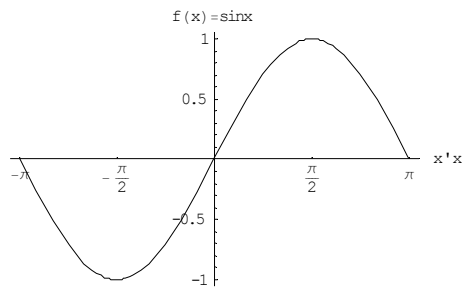
$$\log_a x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, & \text{όταν } a > 1 \\ 0 < x < 1, & \text{όταν } 0 < a < 1 \end{cases}$$



Εάν $a = e$, παίρνουμε τον *νεπέριο* λογάριθμο που συνήθως συμβολίζουμε με $\ln x$. Όταν γράφουμε $\log x$ συνήθως εννοούμε το λογάριθμο με βάση το 10.

3. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

(α) Η συνάρτηση ημίτονο, $\eta\mu x: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ είναι **2π-περιοδική** συνάρτηση με πεδίο τιμών το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.

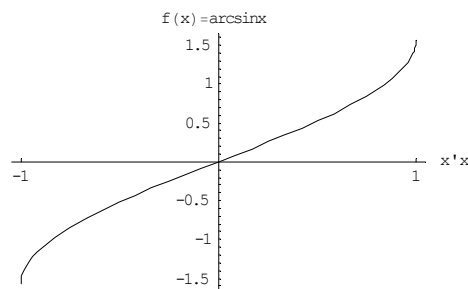


Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι 1-1 συνάρτηση και μάλιστα γνησίως μονότονη στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ (και γενικότερα στα διαστήματα $[k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2]$, $k \in \mathbb{Z}$), οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία καλούμε *τόξο ημιτόνου* και συμβολίζουμε ως *τοξημx* ή $\arcsin x$ ή $\sin^{-1}x$ ως εξής:

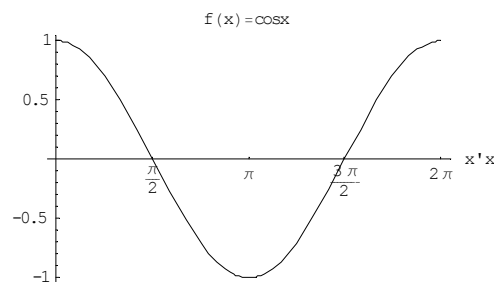
$$\text{τοξημ}x : [-1, 1] \rightarrow \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2} \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε το λεγόμενο πρωτεύον τόξο ημιτόνου ($k = 0$):

$$\text{τοξημ}x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$



(β) Η συνάρτηση συνημίτονο, $\sigma\upsilon\eta x: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ είναι **2π-περιοδική** συνάρτηση με πεδίο τιμών το κλειστό διάστημα $[-1, 1]$.

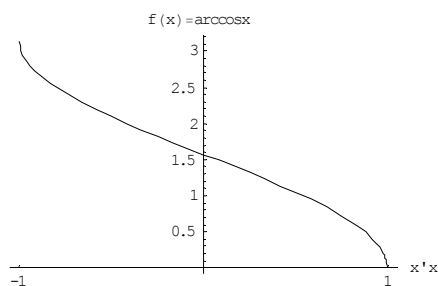


Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\sigma\upsilon\eta x$ είναι 1-1 συνάρτηση και μάλιστα γνησίως μονότονη στο διάστημα $[0, \pi]$ (και γενικότερα στα διαστήματα $[k\pi, k\pi + \pi]$, $k \in \mathbb{Z}$), οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία καλούμε *τόξο συνημιτόνου* και συμβολίζουμε ως *τοξσυνx* ή $\arccos x$ ή $\cos^{-1}x$:

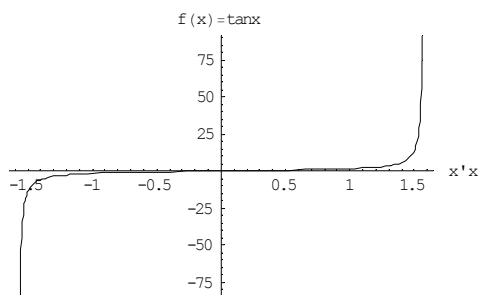
$$\text{τοξσυν}x : [-1, 1] \rightarrow [k\pi, k\pi + \pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε το λεγόμενο πρωτεύον τόξο συνημιτόνου ($k = 0$):

$$\text{τοξσυν}x: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



(γ) Η συνάρτηση εφαπτομένη, $\epsilon\phi x: \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2: k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **π -περιοδική** συνάρτηση με πεδίο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Οι ευθείες $x = k\pi \pm \pi/2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $\epsilon\phi x$.

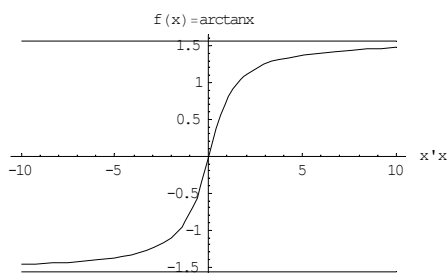


Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\epsilon\phi x$ είναι 1-1 συνάρτηση και μάλιστα γνησίως αύξουσα στο ανοικτό διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$, (και γενικότερα στα διαστήματα $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$ $k \in \mathbb{Z}$), οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία καλούμε **τόξο εφαπτομένης** και συμβολίζουμε ως $\text{τοξ}\epsilon\phi x$ ή $\arctan x$ ή $\tan^{-1}x$:

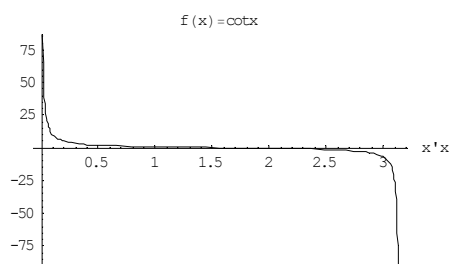
$$\text{τοξ}\epsilon\phi x: \mathbb{R} \rightarrow \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε το λεγόμενο πρωτεύον τόξο εφαπτομένης ($k = 0$):

$$\text{τοξ}\epsilon\phi x: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



(δ) Η συνάρτηση συνεφαπτομένη, $\sigma\phi x: \mathbb{R} - \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι π -περιοδική με πεδίο τιμών όλο το $\mathbb{R}$. Οι ευθείες $x = k\pi \pm \pi$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $\sigma\phi x$.



Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\sigma\phi x$ είναι 1-1 συνάρτηση και μάλιστα γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $(0, \pi)$, (και γενικότερα στα διαστήματα $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$), οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία καλούμε *τόξο συνεφαπτομένης* και συμβολίζουμε ως *τοξσφ* ή *arccot* ή $\cot^{-1}x$:

$$\text{τοξσφ}x: \mathbb{R} \rightarrow (k\pi, k\pi + \pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε το λεγόμενο πρωτεύον τόξο συνεφαπτομένης ($k = 0$):

$$\text{τοξσφ}x: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$$

Χρήσιμες τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\eta\mu(x \pm y) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu y \pm \sigma\upsilon\nu x \eta\mu y$$

$$\sigma\upsilon\nu(x \pm y) = \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y \mp \eta\mu x \eta\mu y$$

$$\epsilon\phi(x \pm y) = \frac{\epsilon\phi x \pm \epsilon\phi y}{1 \mp \epsilon\phi x \epsilon\phi y}$$

$$\eta\mu(2x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(2x) = 1 - 2\eta\mu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1$$

$$\eta\mu(x + y) + \eta\mu(x - y) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu y$$

$$\sigma\upsilon\nu(x + y) + \sigma\upsilon\nu(x - y) = 2\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y$$

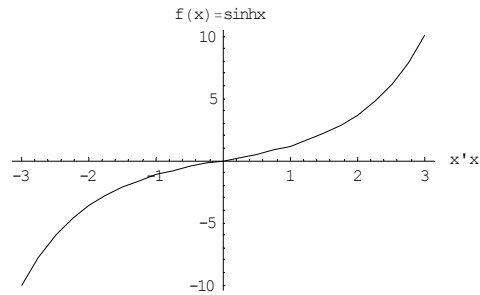
$$\sigma\upsilon\nu(x + y) - \sigma\upsilon\nu(x - y) = -2\eta\mu x \eta\mu y$$

4. Υπερβολικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους

(α) Η συνάρτηση

$$\sinh x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

καλείται *υπερβολικό ημίτονο*. Είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

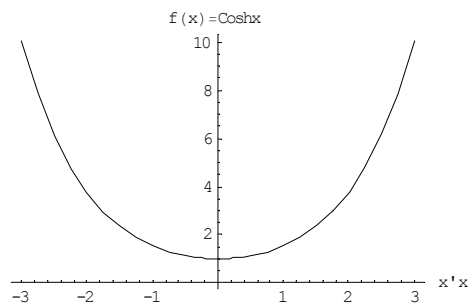


Αφού η $\sinh x$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία συμβολίζουμε με $\sinh^{-1}x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(β) Η συνάρτηση

$$\cosh x: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty), \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

καλείται *υπερβολικό συνημίτονο*. Είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση με πεδίο τιμών το διάστημα $[1, +\infty)$.



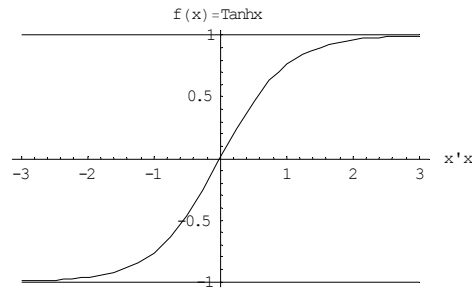
Παρατηρούμε ότι η $\cosh x$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[0, +\infty)$, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία συμβολίζουμε με $\cosh^{-1}x$:

$$\cosh^{-1}x: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty).$$

(γ) Η συνάρτηση

$$\tanh x: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

καλείται *υπερβολική εφαπτομένη*. Είναι συνεχής και περιττή συνάρτηση με πεδίο τιμών το ανοικτό διάστημα $(-1, 1)$.



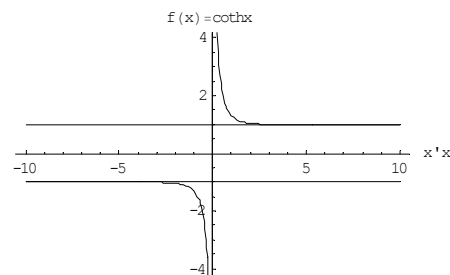
Παρατηρούμε ότι η $\tanh x$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία συμβολίζουμε με $\tanh^{-1}x$:

$$\tanh^{-1}x : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}.$$

(δ) Η συνάρτηση

$$\coth x : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

καλείται *υπερβολική συνεφαπτομένη*. Είναι συνεχής και περιττή συνάρτηση με πεδίο τιμών την ένωση διαστημάτων $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ενώ οι ευθείες $y = \pm 1$ είναι οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της $\coth x$.



Παρατηρούμε ότι η $\coth x$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση αυτής την οποία συμβολίζουμε με $\coth^{-1}x$:

$$\coth^{-1}x : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}.$$

Χρήσιμες ιδιότητες των υπερβολικών συναρτήσεων

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y.$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x.$$

$$\cosh(2x) = 1 + 2 \sinh^2 x = 2 \cosh^2 x - 1$$

5. Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

καλείται πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού n .

Για $n = 1$ παίρνουμε τις γραμμικές συναρτήσεις

$$f(x) = a_0 + a_1x,$$

οι οποίες καλούνται έτσι διότι η γραφική τους παράσταση είναι μία ευθεία γραμμή.

Για $n = 2$ παίρνουμε τα τριώνυμα

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad a_2 \neq 0,$$

οι γραφικές παραστάσεις των οποίων είναι παραβολές. Εάν $a_2 > 0$, οι παραβολές στρέφουν τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ εάν $a_2 < 0$ οι παραβολές στρέφουν τα κοίλα προς τα κάτω. Οι ρίζες του τριωνύμου υπολογίζονται από τη σχέση

$$\rho_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2},$$

όπου Δ είναι η διακρίνουσα: $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$. Υπενθυμίζουμε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 , αν και μόνον αν η διακρίνουσά του είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Ακόμη:

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{-a_1}{a_2}, \quad \rho_1\rho_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Τέλος όσον αφορά το πρόσημο του τριωνύμου αυτό είναι ετερόσημο του συντελεστή της μεγιστοβάθμιας δύναμης του x (δηλαδή του a_2) στο διάστημα εντός των ριζών, δηλαδή στο (ρ_1, ρ_2) , όπου $\rho_1 < \rho_2$. Αν $\rho_1 = \rho_2$, τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του a_2 . Αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική τότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του a_2 .

Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους:

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">1. οι πολυωνυμικές2. οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφές τους3. οι εκθετικές4. οι λογαριθμικές5. οι υπερβολικές και οι αντίστροφές τους |
|---|

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αμφιμονότιμη.

Λύση. Αρκεί να δειχθεί ότι $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Εχουμε λοιπόν:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{y^3}{y^2+1} \Rightarrow x^3(y^2+1) = y^3(x^2+1) \Rightarrow (x^3 - y^3) + (x^3y^2 - x^2y^3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) + (xy)^2(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+(xy)^2) = 0,$$

άρα $x = y$, διότι $x^2+xy+y^2+(xy)^2 \geq 0$. $\square$

2. Εστω $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $(g \circ f)(x) = x$ και $(h \circ g)(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $f = h$.

Λύση. Ισχύει: $(g \circ f)(x) = x \Rightarrow h((g \circ f)(x)) = h(x) \Rightarrow (h \circ (g \circ f))(x) = h(x)$

$$\Rightarrow ((h \circ g) \circ f)(x) = h(x) \Rightarrow (h \circ g)(f(x)) = h(x) \Rightarrow f(x) = h(x) \quad \square$$

Παρατήρηση: Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

3. Να δείξετε ότι:

$$\begin{cases} \text{τοξημ}(\text{συν}x) = \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x \leq \pi \\ \eta\mu(\text{τοξεφ}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Απόδ. $\text{τοξημ}(\text{συν}x) = \text{τοξημ}\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$.

$$x = \varepsilon\phi(\text{τοξεφ}x) = \frac{\eta\mu(\text{τοξεφ}x)}{\text{συν}(\text{τοξεφ}x)} = \frac{\eta\mu(\text{τοξεφ}x)}{\sqrt{1-\eta\mu^2(\text{τοξεφ}x)}} = \frac{\alpha(x)}{\sqrt{1-\alpha(x)^2}},$$

όπου το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τη ρίζα απορρίπτεται διότι η συνάρτηση $\text{συν}(\text{τοξεφ}x)$ είναι θετική συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της. Λύνουμε ως προς α και παίρνουμε:

$$\alpha(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

όπου το αρνητικό πρόσημο απορρίπτεται λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση $a(x) = \eta\mu(\text{το}\xi\epsilon\phi x)$ είναι θετική στο ημιανοικτό διάστημα $[0, \pi/2)$. $\square$

4. Με χρήση του ορισμού ναδειχθεί ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Λύση. Ισχύει ο ορισμός που δώσαμε στη σελ. 18:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0: \forall x \in \pi_\delta(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in \pi_\varepsilon(\lambda).$$

Ο παραπάνω ορισμός συγκεκριμενοποιείται ως εξής (βλέπε επίσης σελ. 18):

(α) $f(x) = 1/(x-1)^2$, $x_0 = 1$, $\lambda = +\infty$, $\pi_\delta(x_0) = (1-\delta, 1+\delta)$, $\pi_\varepsilon(\lambda) = (\varepsilon, +\infty)$, άρα ο ορισμός του ορίου γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (1-\delta, 1+\delta) - \{1\} \Rightarrow f(x) \in (\varepsilon, +\infty).$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $f(x) \in (\varepsilon, +\infty)$ ή ισοδύναμα ότι $f(x) > \varepsilon$. Έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{\delta^2},$$

διότι

$$x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow 1-\delta < x < 1+\delta \Rightarrow -\delta < x-1 < \delta \Rightarrow |x-1| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x-1|^2} > \frac{1}{\delta^2}.$$

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{\delta^2} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$, οπότε ισχύει:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}: \forall x \in (1-\delta, 1+\delta) \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\delta^2} = \varepsilon,$$

άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

(β) $f(x) = \ln(1/x)$, $x_0 = +\infty$, $\lambda = -\infty$, $\pi_\delta(x_0) = (\delta, +\infty)$, $\pi_\varepsilon(\lambda) = (-\infty, -\varepsilon)$, άρα ο ορισμός του ορίου γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x \in (\delta, +\infty) \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -\varepsilon).$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $f(x) \in (-\infty, -\varepsilon)$ ή ισοδύναμα ότι $f(x) < -\varepsilon$. Έχουμε:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln x = -\ln x < -\ln \delta,$$

διότι η συνάρτηση $\ln(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και

$$x \in (\delta, +\infty) \Rightarrow x > \delta \Rightarrow \ln x > \ln \delta \Rightarrow -\ln x < -\ln \delta$$

με την προϋπόθεση ότι $\delta > 1$. Θέτουμε $\varepsilon = \ln \delta \Rightarrow \delta = e^\varepsilon$ και παίρνουμε:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = e^\varepsilon > 0: \forall x \in (\delta, +\infty) \Rightarrow f(x) < -\ln \delta = -\varepsilon,$$

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$. $\square$

5 Με χρήση ιδιοτήτων ορίων να υπολογίσετε τα κάτωθι όρια:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-3}, \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right), \quad (\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sigma\upsilon\nu(e^{x^2+1})$$

$$(\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^2 - 3x + 3}, \quad (\varepsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}, \quad (\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{x^2}$$

$$(\zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}, \quad (\eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$$

Λύση. (α) Παρατηρούμε ότι το σημείο συσσώρευσης $x_0 = 3$ είναι ρίζα του παρονομαστή, οπότε χρησιμοποιούμε πλευρικά όρια (βλέπε σελ. 20) και έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x-3} = -\infty,$$

άρα δεν υπάρχει το όριο.

(β) Εστω $f(x) = \eta\mu(1/x)$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει το όριο χρησιμοποιώντας την παρατήρηση στη σελίδα 19. Ορίζουμε λοιπόν δύο ακολουθίες (x_n) , (y_n) που τείνουν στο ίδιο σημείο συσσώρευσης που στην προκειμένη περίπτωση είναι το $x_0 = 0$, αλλά οι αντίστοιχες ακολουθίες $f(x_n)$, $f(y_n)$ δεν τείνουν στο ίδιο όριο. Πράγματι έστω

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad y_n = \frac{1}{2\pi n + (\pi/2)}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

τότε $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$, $(n \rightarrow +\infty)$, αλλά:

$$f(x_n) = \eta\mu(2\pi n), \quad y_n = \eta\mu\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

άρα: $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = 1$, οπότε δεν υπάρχει το όριο.

(γ) Έχουμε: $\left| x^2 \sigma \nu \nu(e^{x^2+1}) \right| = x^2 \left| \sigma \nu \nu(e^{x^2+1}) \right| \leq x^2 \rightarrow 0, x \rightarrow 0$, άρα από το κριτήριο της παρεμβολής το ζητούμενο όριο είναι το μηδέν.

(δ) Έχουμε **απροσδιόριστη μορφή** ∞/∞ . Βγάζουμε κοινό παράγοντα από αριθμητή και παρονομαστή ξεχωριστά την μεγιστοβάθμια δύναμη του x και στη συνέχεια εφαρμόζουμε ιδιότητες των ορίων (Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε L' Hospital).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{4x^2 - 3x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{4 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} = (-\infty) \frac{1 - 0 + 0}{4 - 0 + 0} = -\infty. \end{aligned}$$

(ε) Παρατηρούμε ότι το όριο της βάσης είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$ (βλέπε (δ)), ενώ το όριο του εκθέτη είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1} \right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0.$$

(στ) Παρατηρούμε ότι το όριο της βάσης είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{2x+5} = 1$ (βλέπε (δ)), ενώ το όριο του εκθέτη είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, άρα **έχουμε απροσδιόριστη μορφή** 1^∞ . Εργαζόμαστε ως εξής (βλέπε σελ. 22):

$$\begin{aligned} y(x) &= \left(\frac{2x-1}{2x+5} \right)^{x^2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(y(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\left(\frac{2x-1}{2x+5} \right)^{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(\frac{2x-1}{2x+5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2x-1}{2x+5} \right)^{0/0}}{\frac{1}{x^2}} = -\infty \quad (L' \text{ Hospital}) \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \right) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = e^{-\infty} = 0.$$

(ζ) Έχουμε **απροσδιόριστη μορφή** ∞^0 . Εργαζόμαστε ως εξής (βλέπε σελ. 22):

$$y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln x},$$

άρα:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

(η) Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\infty$. Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}},$$

άρα:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = -(0)(1) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

6. Εστω $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ a, & x > 0 \end{cases}$. Να βρεθεί η τιμή του a ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής.

Λύση. Προφανώς η $f(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Για το σημείο $x_0 = 0$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad f(0) = 0,$$

άρα για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0,$$

άρα $a = 0$. $\square$

7. Εστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2 + f(x)(x^5 - 1) = \sqrt[3]{2x^2 + 6}.$$

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

Λύση. Εστω $x \neq 1$, τότε: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{2x^2 + 6} - 2}{x^5 - 1}$. Για $x = 1$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή

$0/0$. Επειδή όμως η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ το όριο αυτό πρέπει να υπάρχει και να ισούται με την τιμή $f(1)$. Πράγματι πολλαπλασιάζω και διαιρώ με συζυγή παράσταση ($\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, για $\alpha = \sqrt[3]{2x^2 + 6}$ και $\beta = 2$):

$$\begin{aligned}
f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2+6}-2}{x^5-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\sqrt[3]{2x^2+6}-2\right)\left(\sqrt[3]{(2x^2+6)^2}+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\left(\sqrt[3]{(2x^2+6)^2}+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\left(\sqrt[3]{(2x^2+6)^2}+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)}{(x^4+x^3+x^2+x+1)\left(\sqrt[3]{(2x^2+6)^2}+2\sqrt[3]{2x^2+6}+4\right)} = \frac{1}{15}. \quad \square
\end{aligned}$$

8. Εστω f συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 2a]$ με $f(0) = f(2a)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, a)$ έτσι ώστε: $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

Λύση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x+a)$. Η g είναι συνεχής στο $[0, 2a]$ και

$$\begin{aligned}
g(0) &= f(0) - f(a) \\
g(a) &= f(a) - f(2a) = f(a) - f(0)
\end{aligned}$$

άρα $g(0)g(a) = -(f(0) - f(a))^2 \leq 0$, συνεπώς το ζητούμενο προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano. $\square$

9. Εστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ναδειχθεί ότι η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

Λύση. Εστω $y = 0$, τότε $f(x+0) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Για να δείξω τη συνέχεια σε όλο το $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξω ότι $|f(x+h) - f(x)| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι:

$$|f(x+h) - f(x)| = |f(x) + f(h) - f(x)| = |f(h)| = |f(h) - 0| = |f(h) - f(0)| \rightarrow 0$$

όταν $h \rightarrow 0$, αφού υποθέσαμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. $\square$

10. Εστω $f(x) = \begin{cases} 1-x\left[\frac{1}{x}\right], & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Ναδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Λύση. Εστω $x > 1$, τότε $(1/x) < 1$. Άρα $[1/x] = 0$, συνεπώς $f(x) = 1$. Εστω $0 < x < 1$. Αν $1/(n+1) < x \leq 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε: $n \leq 1/x < n+1$, συνεπώς $f(x) = 1-nx$, άρα:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 1 - nx, & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Εχουμε λοιπόν για $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = 1 - nx < 1 - n \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. $\square$