

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 5.1 Ορισμοί

Εστω a_n δοθείσα πραγματική ακολουθία. Ορίζουμε μία νέα ακολουθία s_n ως εξής:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \end{aligned}$$

Ορισμός 5.1.1 Εάν υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ τότε η ακολουθία s_n καλείται *αθροίσιμη* και το όριο

$$s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

καλείται *άθροισμα των όρων της ακολουθίας a_n* .

Σημείωση 1 Ένα άπειρο άθροισμα $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ καλείται *σειρά των*

όρων της ακολουθίας a_n . Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$ θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει

(έστω κι αν αυτό είναι ιδιόρρυθμο αφού το σύμβολο $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ως όριο μιας ακολουθίας συμβολίζει στην καλύτερη περίπτωση έναν αριθμό ή και τίποτα).

Ορισμός 5.1.2 Η ακολουθία $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ καλείται *ακολουθία των*

μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Συνεπώς:

Πρόταση 5.1.1 Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία s_n έχει μοναδικό οριακό αριθμό και είναι φραγμένη.

Παράδειγμα Μελετήστε τη σύγκλιση της σειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$.

Έχουμε $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}$, άρα $s_n = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$, οπότε η s_n είναι φραγμένη αλλά έχει δύο οριακούς αριθμούς το 0 και το 1, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ αποκλίνει.

Πρόταση 5.1.2 Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:
 $\forall n > m > n_0, \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$.

Απόδ. Η συνθήκη $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$ ($n > m > n_0$) υπονοεί ότι η ακολουθία s_n είναι Cauchy και άρα συγκλίνει. $\square$

Παράδειγμα Μελετήστε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (αρμονική σειρά).

Έχουμε $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, άρα

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0 : \forall n_0, \exists n = 2n_0, m = n_0 + 1 : \forall n > m > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{2n} a_k \right| > \frac{1}{2},$$

άρα από την άρνηση της Πρότασης 5.1.2 προκύπτει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Πρόταση 5.1.3 Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Απόδ. Από την Πρόταση 5.1.2 γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon, \forall n > m > n_0$. Αφού αυτή η συνθήκη ισχύει $\forall n > m > n_0$ θα ισχύει και για $n = m+1$. Τότε όμως $|a_n| < \varepsilon$, οπότε από τον ορισμό έχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. $\square$

Σημείωση 2 Το αντίστροφο της Πρότασης 5.1.3 ΔΕΝ ισχύει, π.χ. $1/n \rightarrow 0$ αλλά όπως είδαμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Ορισμός 5.1.3 Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Πρόταση 5.1.4 Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε η σειρά συγκλίνει.

Απόδ. $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon$. Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$. $\square$

Το αντίστροφο της Πρότασης 5.1.4 ΔΕΝ ισχύει. Όπως θα δούμε παρακάτω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} < +\infty$ αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

§ 5.2 Σειρές θετικών όρων-Κριτήρια σύγκλισης

Εστω $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ καλείται σειρά θετικών όρων. Στην περίπτωση αυτή η ακολουθία s_n των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι θετική και γνησίως αύξουσα.

Πρόταση 5.2.1 (Κριτήριο σύγκρισης) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι δύο σειρές θετικών όρων για τις οποίες ισχύει $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$, τότε:

$$(i) \text{ αν } \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \text{ τότε } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

$$(ii) \text{ αν } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{ τότε } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Απόδ. (i) Εστω s_n, s_n' είναι οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντίστοιχα. Προφανώς ισχύει $s_n \leq s_n' \quad \forall n \geq n_0$. Αν λοιπόν ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ τότε η ακολουθία s_n είναι φραγμένη άρα συγκλίνει.

(ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ προφανώς θα ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. $\square$

Παραδείγματα: (i) Να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} < +\infty$.

Εχουμε $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ και εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$ (ως άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου), με εφαρμογή του κριτηρίου σύγκρισης προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

(ii) Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ συγκλίνει όταν $s > 1$ ενώ αποκλίνει όταν $s \leq 1$.

Εστω $s \leq 1$. Τότε $n^s \leq n \Rightarrow \frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}$. Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (όπως είδαμε παραπάνω), από το κριτήριο σύγκρισης προκύπτει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = +\infty$.

Εστω $s > 1$. Θεωρούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων:

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2^s} + \underbrace{\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}}_{\text{ανά δύο}} + \underbrace{\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}}_{\text{ανά τέσσερα}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{(2^{n-1}+1)^s} + \dots + \frac{1}{(2^n)^s}}_{\text{ανά } 2^{n-1}}.$$

Αλλά: $\frac{1}{(2^{n-1}+1)^s} + \dots + \frac{1}{(2^n)^s} < \frac{1}{(2^{n-1})^s} + \dots + \frac{1}{(2^{n-1})^s} = \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^s} = \frac{1}{(2^{n-1})^{s-1}}$, άρα:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &< 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \frac{1}{8^{s-1}} + \dots + \frac{1}{(2^{n-1})^{s-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{(2^{s-1})^2} + \frac{1}{(2^{s-1})^3} + \dots + \frac{1}{(2^{s-1})^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^{s-1}}}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} < +\infty, \end{aligned}$$

άρα η σειρά συγκλίνει. $\square$

(iii) Να δείξετε ότι $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = +\infty$.

Εφόσον $\ln n < n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

ΣΕΙΡΕΣ ΠΟΥ ΣΤΟ ΕΞΗΣ ΘΑ ΘΕΩΡΟΥΝΤΑΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{συγκλίνει,} & s > 1 \\ \text{αποκλίνει,} & s \leq 1 \end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \begin{cases} \text{συγκλίνει,} & \lambda < 1 \\ \text{αποκλίνει,} & \lambda \geq 1 \end{cases} \text{ (γεωμετρική σειρά)}$

Πρόταση 5.2.2 (Κριτήριο ορίου) Εστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι δύο σειρές θετικών όρων .

Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, τότε:

(i) αν $0 < k < +\infty$ τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

(ii) αν $k = 0$ τότε $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \end{cases}$.

(iii) αν $k = +\infty$ τότε $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \end{cases}$.

Απόδ. (i) Εστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$. Τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon$,

οπότε με εφαρμογή του κριτηρίου σύγκρισης προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) Εστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. Τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$, οπότε με εφαρμογή

του κριτηρίου σύγκρισης προκύπτει το ζητούμενο.

(iii) Εστω $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} > \varepsilon$ οπότε με εφαρμογή

του κριτηρίου σύγκρισης προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Παραδείγματα (i) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = +\infty$.

Εστω $a_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, άρα από

το κριτήριο του ορίου οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ προκύπτει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = +\infty$. $\square$

(ii) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \phi\left(\frac{1}{n^2+1}\right) < +\infty$.

Εστω $a_n = \varepsilon \phi\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$, $b_n = \frac{1}{n^2+1}$. Τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon \phi\left(\frac{1}{n^2+1}\right)}{\frac{1}{n^2+1}}$. Ορίζουμε

τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\varepsilon \phi(x)}{x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Τότε

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ και από το κριτήριο του ορίου οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \phi\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < +\infty$, (διότι ο εκθέτης του

n είναι το $2 > 1$) προκύπτει $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon \phi\left(\frac{1}{n^2+1}\right) < +\infty$. $\square$

Πρόταση 5.2.3 (Κριτήριο λόγου ή D' Alembert) Θεωρούμε τη σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $\lambda = 1$ δεν υπάρχει συμπέρασμα σχετικά με τη σύγκλιση της σειράς.

Πρόταση 5.2.4 (Κριτήριο ρίζας ή Cauchy) Θεωρούμε τη σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(i) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(ii) Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $\lambda = 1$ δεν υπάρχει συμπέρασμα σχετικά με τη σύγκλιση της σειράς.

Παραδείγματα (i) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < +\infty$.

Εστω $a_n = \frac{n!}{n^n}$, τότε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

άρα από το κριτήριο του λόγου $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < +\infty$. $\square$

(ii) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n < +\infty$.

Εχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0 < 1$, οπότε από το κριτήριο ρίζας $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n < +\infty$. $\square$

Πρόταση 5.2.4 (Κριτήριο συμπίκνωσης Cauchy) Εστω a_n είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων. Τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Παράδειγμα Να μελετηθεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

- Αν $a = 0$ προφανώς έχουμε απόκλιση διότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.
- Αν $a < 0$ τότε $\frac{1}{n(\ln n)^a} = \frac{(\ln n)^{-a}}{n} > \frac{1}{n}$, άρα με εφαρμογή του κριτηρίου σύγκρισης έχουμε πάλι απόκλιση.
- Αν $a > 0$ τότε η ακολουθία $\frac{1}{n(\ln n)^a}$ είναι προφανώς θετική και γνησίως φθίνουσα οπότε εφαρμόζουμε το κριτήριο συμπίκνωσης:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n \ln 2)^a} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^a} \begin{cases} < +\infty, & a > 1 \\ = +\infty, & 0 \leq a \leq 1 \end{cases}.$$

Αρα η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^a}$, $a \in \mathbb{R}$ συγκλίνει όταν $a > 1$ και αποκλίνει όταν $a \leq 1$. $\square$

§ 5.3 Εναλλάσσουσες σειρές

Ορισμός 5.3.1 Μία σειρά καλείται εναλλάσσουσα όταν οι θετικοί και οι αρνητικοί όροι της εμφανίζονται διαδοχικά, δηλαδή όταν οι όροι της είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί.

Πρόταση 5.3.1 (Κριτήριο Leibnitz) Μία εναλλάσσουσα σειρά της οποίας οι όροι κατ' απόλυτη τιμή σχηματίζουν μία φθίνουσα και μηδενική ακολουθία συγκλίνει.

Παράδειγμα Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει.

Εστω $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Τότε η $|a_n| = \frac{1}{n}$ είναι μία γνησίως φθίνουσα και μηδενική ακολουθία οπότε από το κριτήριο του Leibnitz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει. $\square$

- Ισχύει ο ακόλουθος τύπος της άθροισης κατά μέρη του Abel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) \sum_{k=1}^n a_k + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \sum_{k=1}^n a_k$$

Πρόταση 5.3.2 (Κριτήριο Abel) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και αν η ακολουθία b_n είναι μονότονη και φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Απόδ. Αμεση εφαρμογή του τύπου άθροισης κατά μέρη του Abel.

Πρόταση 5.3.3 (Κριτήριο Dirichlet) Αν η ακολουθία s_n των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι φραγμένη και αν η ακολουθία b_n είναι μονότονη και μηδενική τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Απόδ. Αμεση εφαρμογή του τύπου άθροισης κατά μέρη του Abel.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $u_n, v_n > 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < +\infty$, να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{u_n}$.

Λύση. Επειδή $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ προκύπτει ότι $\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$, άρα από το κριτήριο σύγκρισης και την υπόθεση $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n} < +\infty$.

Εστω $v_n = \frac{1}{n^2}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ και $\sqrt{u_n v_n} = \frac{1}{n} \sqrt{u_n}$. Είδαμε όμως ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n v_n} < +\infty$, άρα και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sqrt{u_n} < +\infty$. $\square$

2. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ και αν $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \forall n \geq n_0$ να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Λύση. $\forall n \geq n_0$ ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} \\ \dots \\ \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \leq \frac{b_{n_0+k}}{b_{n_0+k-1}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{γινόμενο κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+k}}{b_{n_0}} \Rightarrow a_{n_0+k} \leq \left(\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \right) b_{n_0+k}.$$

Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης προκύπτει $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. $\square$

3. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ να δείξετε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

Λύση Αν ισχυε $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = k > 0$, τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = k > 0$, οπότε από το κριτήριο

του ορίου οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ θα συνέκλιναν ή θα απέκλιναν ταυτόχρονα. Εφόσον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \text{ (άτοπο)}. \quad \square$$

4. Να υπολογίσετε το άθροισμα των σειρών: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$

$$\begin{aligned} \text{Λύση. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

Ομοια:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

5. Να μελετηθεί η σύγκλιση των σειρών:

$$\begin{aligned} (i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta\mu(n\theta)}{n^2} \quad (\theta \in (0, 2\pi)), \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}, \quad (iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \\ (iv) \sum_{n=1}^{\infty} \eta\mu\left(\frac{1}{n}\right), \quad (v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad (vi) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}, \quad p > 0. \end{aligned}$$

Λύση. (i) Εστω $a_n = \frac{\eta\mu(n\theta)}{n^2}$. Τότε $|a_n| = \left| \frac{\eta\mu(n\theta)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, από το κριτήριο σύγκρισης έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

$$(ii) \quad \text{Εστω} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}. \quad \text{Τότε} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{n^{2/3}}.$$

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης. Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}} = +\infty$, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

(iii) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο Leibnitz για εναλλάσσουσες σειρές. Ορίζουμε

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία a_n είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του κριτηρίου Leibnitz και συνεπώς η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ συγκλίνει.

(iv) Εστω $a_n = \eta\mu\left(\frac{1}{n}\right)$. Ορίζουμε $b_n = \frac{1}{n}$ και χρησιμοποιούμε το κριτήριο του ορίου.

Εχουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$, (διότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x)}{x} = 1$), άρα οι σειρές

$\sum_{n=1}^{\infty} \eta\mu\left(\frac{1}{n}\right)$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ συγκλίνουν ή αποκλίνουν ταυτόχρονα. Εφόσον $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ προκύπτει $\sum_{n=1}^{\infty} \eta\mu\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$.

(v) Εστω $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου και έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1,$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} = +\infty$.

(vi) Εστω $a_n = \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p}$, $p > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της συμπίκνωσης. Η a_n είναι θετική και φθίνουσα ακολουθία. Επίσης

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n (\ln(\ln 2^n))^p} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2 (\ln(n \ln 2))^p} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n + \ln(\ln 2))^p}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2^p \ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n + \ln n)^p} < \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n + \ln(\ln 2))^p} < \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}.$$

Μελετούμε τώρα τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ χρησιμοποιώντας πάλι το κριτήριο συμπίκνωσης:

$$\sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n (\ln 2^n)^p} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln 2)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < +\infty, & p > 1 \\ = +\infty & 0 < p \leq 1 \end{cases}.$$

Τότε $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} < +\infty$ για $p > 1$, άρα $\sum_{n=3}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n (\ln(\ln 2^n))^p} < +\infty$ (εφαρμογή του κριτηρίου σύγκρισης), συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p} < +\infty$ (εφαρμογή του κριτηρίου συμπίκνωσης). Ομοια δείχνουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln(\ln n))^p} = +\infty$ για $0 \leq p < 1$.

□

6. Να ευρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$.

Λύση. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας και έχουμε

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{2^n x^n}{n!} \right|} = 2|x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0 < 1$, άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

7. Να μελετηθεί η σύγκλιση της σειράς: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Λύση. Εστω $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e$, άρα από την άρνηση

της Πρότασης 5.1.3 η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ αποκλίνει. □

8. Να μελετηθεί η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt[n]{2} - 1)$.

Λύση. Ισχύει $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$, $\forall n \geq n_0$. Άρα $\sqrt[n]{2} - 1 < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} (\sqrt[n]{2} - 1) < \frac{1}{n^2}$. Με

εφαρμογή του κριτηρίου σύγκρισης προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt[n]{2} - 1)$ συγκλίνει. □