

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 3.1 Ορισμοί

Ορισμός 3.1.1 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A, f(A) \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A . Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda.$$

Ισοδύναμα:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lambda, \quad x_0 + h \in A.$$

Το μοναδικό αυτό όριο (αν υπάρχει), καλείται παράγωγος της f στο σημείο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.

Εφόσον η παράγωγος συνάρτησης είναι ένα όριο μπορούμε να ορίσουμε τα πλευρικά όρια και έχουμε:

Ορισμός 3.1.2 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A, f(A) \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A . Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη από δεξιά (αντ. από αριστερά) του σημείου x_0 εάν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lambda, \quad \left(\text{αντ. } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lambda \right).$$

Τα παραπάνω όρια (αν υπάρχουν), καλούνται παράγωγος της f εκ δεξιών (αντ. εξ αριστερών) του σημείου x_0 και συμβολίζονται με $f'_+(x_0)$ (αντ. $f'_-(x_0)$). Προφανώς:

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Σημείωση 1 Αν οι παράγωγοι εκ δεξιών και εξ αριστερών της f στο x_0 υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικές μεταξύ τους, ή αν κάποια από αυτές (ή και οι δύο) δεν υπάρχει (δεν υπάρχουν) τότε θα λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Είναι δυνατόν μία συνάρτηση να μην είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Πρόταση 3.1.1 Αν η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A, f(A) \subseteq \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in A$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

Απόδ. $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0,$

άρα $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$. $\square$

Σημείωση 2 Το αντίστροφο της Πρότασης 3.1.1 δεν ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$. Πράγματι:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1,$$

ενώ

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Εφόσον τα πλευρικά όρια στο σημείο $x_0 = 0$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Ορισμός 3.1.3 Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A, f(A) \subseteq \mathbb{R}$ και έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A . Τότε ορίζεται η συνάρτηση

$$g = f' : A \rightarrow \mathbb{R} : g(x) = f'(x),$$

η οποία καλείται **παράγωγος συνάρτηση** της f . Εάν υπάρχει η g' , τότε λέμε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A και γράφουμε $g'(x) = f''(x)$. Γενικά χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

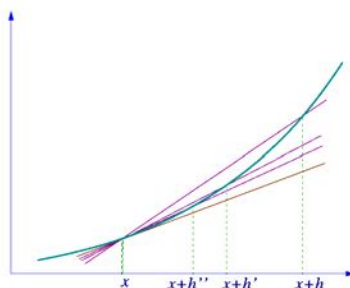
$$f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}$$

για να δηλώσουμε την k -παράγωγο μιας συνάρτησης f . Αν η f έχει άπειρες παραγώγους, τότε λέμε ότι είναι απειροδιαφορίσιμη (ή λεία) συνάρτηση.

§ 3.2 Γεωμετρική και φυσική ερμηνεία της παραγώγου

Εστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A, f(A) \subseteq \mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x . Εστω $x+h \in A$ και $P(x, f(x))$, $Q(x+h, f(x+h))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f (βλέπε σχήμα 3.1).

Σχήμα 3.1



Το ευθύγραμμο τμήμα PQ έχει κλίση ίση με:

$$\varepsilon\phi(\theta(h)) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το ευθύγραμμο τμήμα PQ με τον άξονα $x\acute{x}$. Η εξίσωση της ευθείας γραμμής που ορίζουν τα σημεία P, Q είναι η ακόλουθη:

$$y - f(x_0) = \varepsilon\phi(\theta(h)) (x - x_0).$$

Η οριακή θέση του ευθυγράμμου τμήματος PQ όταν $Q \rightarrow P$ κατά μήκος της καμπύλης που ορίζει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ καλείται **εφαπτόμενη** της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο x . Όταν όμως $Q \rightarrow P$ κατά μήκος αυτής της καμπύλης τότε $h \rightarrow 0$, συνεπώς αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο σημείο x με τον άξονα $x\acute{x}$, έχουμε:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon\phi(\theta(h)) = \varepsilon\phi(\lim_{h \rightarrow 0} \theta(h)) = \varepsilon\phi\omega,$$

δηλαδή:

$$f'(x_0) = \varepsilon\phi\omega.$$

Κατ' επέκταση, η εξίσωση της **εφαπτόμενης** ευθείας στη γραφική παράσταση της $f(x)$ στο σημείο x_0 γίνεται:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0). \quad (3.1)$$

Διαφορικό συνάρτησης

Από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + \varepsilon(h)h, \text{ όπου } \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ όταν } h \rightarrow 0.$$

Αν θέσουμε $y = f(x)$, $\Delta x = h = (x+h) - x$ και $\Delta y = f(x+h) - f(x)$, τότε η παραπάνω γίνεται:

$$\Delta y = \Delta x f'(x) + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \text{ όπου } \varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ όταν } \Delta x \rightarrow 0.$$

Ο όρος $\Delta x f'(x)$ καλείται διαφορικό της y ως προς x και συμβολίζεται με dy . Δηλαδή:

$$dy = df(x) = f'(x) \Delta x.$$

Αν μάλιστα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$, άρα $dy = dx = \Delta x$, οπότε:

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x) dx},$$

από όπου δικαιολογείται και ο συμβολισμός της παραγώγου $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Τελικά λοιπόν έχουμε:

$$\Delta y = dy + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \text{ όπου } \varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0 \text{ όταν } \Delta x \rightarrow 0,$$

δηλαδή το διαφορικό dy είναι μία προσέγγιση της μεταβολής Δy με την έννοια ότι η διαφορά τους γίνεται όσο μικρή θέλουμε για Δx αρκετά μικρό.

Μία συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ορίζεται το διαφορικό της σ' ένα σημείο x λέμε ότι είναι **διαφορίσιμη** στο x και αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι η f παραγωγίσιμη στο x με πεπερασμένη παράγωγο.

Αν υπάρχει η $f''(x)$ (και θεωρήσουμε ότι η ποσότητα dx είναι σταθερή συνεπώς ανεξάρτητη του x), τότε

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)dx \cdot dx = f''(x)(dx)^2.$$

Η ποσότητα $d^2 f(x)$ καλείται διαφορικό 2^{ης} τάξης της συνάρτησης f . Εάν ορίσουμε

$$dx^2 = (dx)^2,$$

τότε από η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2 \Leftrightarrow f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

Γενικεύοντας παίρνουμε

$$\boxed{f^{(k)}(x) = \frac{d^k f(x)}{dx^k}}.$$

§ 3.3 Ιδιότητες της παραγώγου

Πρόταση 3.3.1 Εστω $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A, f(A) \subseteq \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in A$, και $a \in \mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις $af, f+g, fg, f/g$ ($g(x_0) \neq 0$) είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x_0 \in A$ και

$$\begin{aligned} (af)'(x_0) &= af'(x_0) \\ (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \end{aligned}$$

Απόδ. Εφαρμογή του ορισμού. Ενδεικτικά θα αποδείξουμε την ισότητα για την παράγωγο γινομένου.

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))g(x_0 + h) + f(x_0)(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0))}{h} g(x_0 + h) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x_0 + h) - g(x_0))}{h} f(x_0) \\
&= f'(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} g(x_0 + h) + g'(x_0) f(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + g'(x_0) f(x_0),
\end{aligned}$$

λόγω συνεχειάς της συνάρτησης $g(x)$. Ομοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες. $\square$

Σημείωση 3. Η Πρόταση 3.3.1 ισχύει και για το διαφορικό συναρτήσεων.

Πόρισμα 3.3.1 (Leibnitz) Έστω $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A, f(A) \subseteq \mathbb{R}$ είναι n -φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $x_0 \in A$, τότε:

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0), \text{ όπου } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Απόδ. Επαγωγικά. $\square$

Πρόταση 3.3.2 (Κανόνας αλυσίδας) Έστω $f : I \rightarrow J$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in I$ και $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο $f(x_0) \in J$, όπου $I, J \subseteq \mathbb{R}$. Τότε και η σύνθετη συνάρτηση $(g \circ f)(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in I$ και ισχύει:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Πρόταση 3.3.3 (Παραγωγή αντίστροφης συνάρτησης) Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση σε διάστημα I , $x_0 \in I$, υπάρχει η $f'(x_0)$ και ισχύει $f'(x_0) \neq 0$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $y_0 = f(x_0)$ και ισχύει:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Παράδειγμα 1 Ναδειχθεί ότι για το πρωτεύων τόξο ημιτόνου ισχύει

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Έχουμε: $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, y \in (-\pi/2, \pi/2)$, άρα:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

εφόσον $\sin y > 0$ όταν $y \in (-\pi/2, \pi/2)$. $\square$

Πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c, c = \text{σταθερά}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^a, a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a x^{a-1}, a \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x, x > 0$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = a^x, a > 0$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \eta \mu x$	$f'(x) = \sigma \nu \nu x$
$f(x) = \sigma \nu \nu x$	$f'(x) = -\eta \mu x$
$f(x) = \varepsilon \varphi x$	$f'(x) = 1/\sigma \nu \nu^2 x$
$f(x) = \sigma \varphi x$	$f'(x) = -1/\eta \mu^2 x$
$f(x) = \sinh x$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \text{τοξ}\eta \mu x, x \in (-1, 1)$	$f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \text{τοξ}\sigma \nu \nu x, x \in (-1, 1)$	$f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$
$f(x) = \text{τοξ}\varepsilon \varphi x$	$f'(x) = 1/(1+x^2)$

Πρόταση 3.3.4 (Κανόνας L' Hospital) Εστω ότι οι συναρτήσεις $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο ανοικτό διάστημα I , ο πραγματικός αριθμός a είναι ένα άκρο του I και έστω

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Αν οι $f'(x), g'(x)$ υπάρχουν σε όλα τα σημεία του I , $g'(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο του I και αν το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός ή το $\pm\infty$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Σημείωση 4 Αν

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = 0,$$

ή

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \pm\infty,$$

και όλες οι υπόλοιπες προϋποθέσεις του κανόνα L' Hospital ικανοποιούνται, τότε αν υπάρχουν οι $f''(x), g''(x)$ και επιπλέον αν το $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ είναι πραγματικός αριθμός ή το $\pm\infty$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Σημείωση 5 Μπορεί να μην υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ αλλά να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

§ 3.4 Εφαρμογές της παραγώγου

Ορισμός 3.4.1 Εστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f έχει **τοπικό μέγιστο** (αντ. **τοπικό ελάχιστο**) στο σημείο $\xi \in A$, εάν υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ (αντ. $f(x) \geq f(\xi)$) για κάθε $x \in \pi_\varepsilon(\xi)$. Ο αριθμός ξ καλείται **τοπικό ακρότατο** της f .

Θεώρημα 3.4.1 (Fermat) Αν η $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\xi \in (a, b)$ και είναι παραγωγίσιμη στο ξ τότε $f'(\xi) = 0$.

Απόδ. Ισχύει $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το σημείο $\xi \in A$ είναι τοπικό μέγιστο της f . Τότε

$$f'_+(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0$$

σε μία περιοχή του σημείου ξ , ενώ

$$f'_-(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0$$

σε μία περιοχή του σημείου ξ , δηλαδή $f'_+(\xi) = f'_-(\xi) = f'(\xi) = 0$. $\square$

Το Θεώρημα Fermat υπονοεί ότι όταν αναζητούμε τοπικά ακρότατα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σε ανοικτό διάστημα τότε τα ΠΙΘΑΝΑ σημεία είναι εκείνα στα οποία μηδενίζεται η 1^η παράγωγος.

Σημείωση 6 Το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.4.1 ΔΕΝ ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ ικανοποιεί την $f'(0) = 0$, αλλά ΔΕΝ έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\xi = 0$.

Θεώρημα 3.4.2 (Rolle) Εστω $\alpha, b \in \mathbb{R}$, $\alpha < b$ και $f: [\alpha, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Αν

- (i) η f είναι συνεχής στο $[\alpha, b]$,
- (ii) η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, b) και
- (iii) $f(\alpha) = f(b)$,

τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απόδ. Αν η f είναι σταθερά τότε κάθε $\xi \in (a, b)$ ικανοποιεί την $f'(\xi) = 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f(x_0) > f(a)$ για κάποιο $x_0 \in [a, b]$. Λόγω συνεχειάς της f υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε $f(\xi) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$, όπου $\xi \in (a, b)$. Αφού η f έχει τοπικό ακρότατο στο (a, b) από το Θεώρημα του Fermat προκύπτει ότι $f'(\xi) = 0$. $\square$

Θεώρημα 3.4.3 (Γενικευμένο Θεώρημα μέσης Τιμής του Cauchy) Εστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Απόδ. Η συνάρτηση $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

ικανοποιεί το Θεώρημα του Rolle. $\square$

Πόρισμα 3.4.2 (Θεώρημα μέσης Τιμής) Εστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ έτσι ώστε

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Απόδ. Παίρνουμε $g(x) = x$ και εφαρμόζουμε το γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy. $\square$

Πόρισμα 3.4.3 (i) Αν $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ τότε $f(x) = c \ \forall x \in [a, b]$.

(ii) Αν $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$ τότε η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

(iii) Αν $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$ τότε η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$.

(iv) Αν $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a, b)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$.

(iii) Αν $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a, b)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$.

Απόδ. Εστω $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, τότε εφαρμόζουμε το Θεώρημα μέσης τιμής στον περιορισμό της f στο διάστημα $[x_1, x_2]$. $\square$

Θεώρημα 3.4.4 (Ενδιαμέσων τιμών) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, $a < b$ με $f'(a) \neq f'(b)$, τότε η $f'(x)$ παίρνει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των τιμών $f'(a)$, $f'(b)$.

Πόρισμα 3.4.4 Εστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Πρόταση 3.4.1 Εστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Αν $f'(\xi) = 0$ και αν υπάρχει η $f''(\xi)$ στο (a, b) , τότε

(i) αν $f''(\xi) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο ξ ,

(ii) αν $f''(\xi) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο ξ .

Απόδ. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f''(\xi) > 0$, τότε:

$$f''(\xi) > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(\xi+h) - f'(\xi)}{h} > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(\xi+h)}{h} > 0,$$

άρα υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε

$$\frac{f'(\xi+h)}{h} > 0, \quad \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

Εστω $|h| < \delta$, τότε $\forall x \in (\xi, \xi + \delta)$ θα ισχύει $f'(\xi+h) > 0$ για $h > 0$, ενώ για $\forall x \in (\xi - \delta, \xi)$ θα ισχύει $f'(\xi+h) < 0$ για $h < 0$, άρα το ξ είναι τοπικό ελάχιστο. Ομοίως αποδεικνύεται και η (ii). $\square$

Σημείωση 7 Για το αντίστροφο της Πρότασης 3.4.1 ισχύει:

- (i) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο ξ και έχει τοπικό ελάχιστο στο ξ τότε $f''(\xi) \geq 0$.
- (ii) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο ξ και έχει τοπικό μέγιστο στο ξ τότε $f''(\xi) \leq 0$.

Γενικότερα ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 3.4.2 Εστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι n -φορές παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in (a, b)$. Αν $f(\xi) = f'(\xi) = \dots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$, $f^{(n)}(\xi) \neq 0$, τότε

(i) αν $n = \text{άρτιος}$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο ξ αν $f^{(n)}(\xi) > 0$, ενώ η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο ξ αν $f^{(n)}(\xi) < 0$.

(ii) αν $n = \text{περιττός}$ τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο ξ .

Ορισμός 3.4.3 Εστω I είναι ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας. Μία συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται **κυρτή** στο I αν $\forall x_1, x_2 \in I$ και για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Αν ισχύει

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

τότε η f καλείται **κοίλη**.

Ο παραπάνω ορισμός υπονοεί ότι αν η συνάρτηση f είναι κυρτή (αντ. κοίλη), τότε η χορδή που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία $P(x_1, f(x_1))$, $Q(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f βρίσκεται ΠΑΝΩ (αντ. ΚΑΤΩ) από το γράφημα της f .

Πρόταση 3.4.3 Μία συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **κυρτή** στο διάστημα I αν και μόνον αν $\forall x_1, x_2, x_3 \in I$ με $x_1 < x_2 < x_3$ ισχύει

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Απόδ. Εφαρμογή του ορισμού κυρτότητας για $x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}x_3$. $\square$

Πρόταση 3.4.4 Εστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή στο ανοικτό διάστημα I , τότε:

- (i) υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $f'_+(x), f'_-(x)$ για κάθε $x \in I$,
- (ii) η f είναι συνεχής στο I .

Πρόταση 3.4.5 Εστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα I , τότε:

- (i) f κυρτή στο $I \Leftrightarrow f'(x)$ είναι αύξουσα στο I ,
- (ii) f κοίλη στο $I \Leftrightarrow f'(x)$ είναι φθίνουσα στο I .

Ορισμός 3.4.4 Εστω $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\xi \in (a, b)$. Θα λέμε ότι το ξ είναι **σημείο καμπής** της f εάν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε η f να είναι κυρτή (ή κοίλη) στο ανοικτό διάστημα $(\xi - \delta, \xi)$ και κοίλη (ή κυρτή) στο ανοικτό διάστημα $(\xi, \xi + \delta)$.

Πρόταση 3.4.6 Αν η f είναι ορισμένη σε διάστημα (a, b) , το σημείο $\xi \in (a, b)$ είναι σημείο καμπής της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο ξ τότε $f''(\xi) = 0$.

Απόδ. Όπως στο θεώρημα του Fermat. $\square$

Η Πρόταση 3.4.6 μας λέει ότι όταν αναζητούμε σημεία καμπής μιας 2 φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης σε ανοικτό διάστημα, τότε τα ΠΙΘΑΝΑ σημεία είναι εκείνα στα οποία μηδενίζεται η 2^η παράγωγος.

Σημείωση 8 Το αντίστροφο της Πρότασης 3.4.6 ΔΕΝ ισχύει. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^4$ ικανοποιεί την $f''(0) = 0$, αλλά το σημείο $\xi = 0$ ΔΕΝ είναι σημείο καμπής της f .

Γενικότερα ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 3.4.7 Εστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -φορές παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi \in (a, b)$. Αν $f''(\xi) = \dots = f^{(n-1)}(\xi) = 0, f^{(n)}(\xi) \neq 0$, τότε

(i) αν $n = \text{άρτιος}$, η f είναι κυρτή σε μια περιοχή του σημείου ξ αν $f^{(n)}(\xi) > 0$, ενώ η f είναι κοίλη σε μια περιοχή του σημείου ξ αν $f^{(n)}(\xi) < 0$,

(ii) αν $n = \text{περιττός}$, τότε το ξ είναι σημείο καμπής.

§ 3.5 Μελέτη και γραφική παράσταση συνάρτησης

Ορισμός 3.5.1 Εστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Μία ευθεία L με εξίσωση $y = ax + b$ καλείται **ασύμπτωτη** στη γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $z = f(x)$ στο σημείο x_0 , αν η απόσταση μεταξύ των σημείων της ευθείας και των αντιστοιχών σημείων της καμπύλης τείνει στο μηδέν όταν το $x \rightarrow x_0$, δηλαδή:

$$|f(x) - (ax + b)| \rightarrow 0, x \rightarrow x_0.$$

Εστω $x_0 = +\infty$. Τότε

$$|f(x) - (ax + b)| \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - a + \frac{b}{x} \right| \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty,$$

δηλαδή:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a,$$

συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Εχουμε λοιπόν:

Πρόταση 3.5.1 Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της καμπύλης με εξίσωση $z = f(x)$ στο $+\infty$ αν και μόνον αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Εάν $a \neq 0$, τότε η ασύμπτωτη καλείται **πλάγια ασύμπτωτη**.

Εάν $a = 0$, τότε η ασύμπτωτη καλείται **οριζόντια ασύμπτωτη**.

Η ευθεία $x = x_0$ καλείται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της καμπύλης Γ , αν υπάρχει μία τουλάχιστον από τις οριακές τιμές $f_+(x_0), f_-(x_0)$ και είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Οι κατακόρυφες ασύμπτωτες πρέπει να αναζητηθούν σε σημεία όπου η f δεν είναι συνεχής και σε σημεία συσσώρευσης που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

Ομοίως εργαζόμαστε για τις ασύμπτωτες όταν $x \rightarrow -\infty$.

Για τη μελέτη και τη γραφική παράσταση συνάρτησης τα βήματα που συνήθως ακολουθούμε είναι:

- (i) εύρεση πεδίου ορισμού της συνάρτησης f ,
- (ii) εύρεση συμμετριών της συνάρτησής μας (αν υπάρχουν), δηλαδή αν είναι άρτια, ή περιττή, ή περιοδική,
- (iii) καθορίζουμε τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησής μας και τα σημεία όπου η συνάρτησή μας ΔΕΝ είναι παραγωγίσιμη, διαχωρίζοντας εκείνα τα σημεία όπου η παράγωγος απειρίζεται, από εκείνα τα σημεία στα οποία υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι και είναι πεπερασμένες και διαφορετικές.
- (iv) Μελετούμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού.
- (v) Καθορίζουμε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν.
- (vi) Προσδιορίζουμε το πρόσημο της $1^{\text{ης}}$ παραγώγου για να εντοπίσουμε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης και τα πιθανά ακρότατα.
- (vii) Προσδιορίζουμε το πρόσημο της $2^{\text{ης}}$ παραγώγου για να εντοπίσουμε τα διαστήματα όπου η συνάρτησή μας είναι κυρτή ή κοίλη καθώς επίσης και τα πιθανά σημεία καμπής.
- (viii) Σχεδιάζουμε.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογισθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = e^{e^x}$.

Λύση. $f'(x) = \left(e^{e^x}\right)' = e^{e^x} \left(e^x\right)' = e^{e^x} e^x (e^x)' = e^{e^x} e^x e^x.$

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αλλά η $f'(x)$ δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Λύση Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f'(x) = 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Επίσης:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 0.$$

Αρα:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Τώρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \eta\mu\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = 0 \text{ (κριτήριο παρεμβολής)}$$

αλλά

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

δεν υπάρχει (βλέπε Κεφ. 2 όρια συναρτήσεων). Επομένως το $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ δεν υπάρχει, άρα η $f'(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x = 0$. Προφανώς για κάθε $x \neq 0$ η $f'(x)$ είναι συνεχής.

3. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x) = \tan^{-1}[\log(\sin x)].$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του πίνακα έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan^{-1}(\log(\sin x)))' \\ &= \frac{1}{1 + \log^2(\sin x)} \cdot (\log(\sin x))' \\ &= \frac{1}{1 + \log^2(\sin x)} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' \\ &= \frac{1}{1 + \log^2(\sin x)} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \\ &= \frac{1}{(1 + \log^2(\sin x)) \tan x}. \end{aligned}$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $h(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = g(x)^{h(x)}$.

Λύση. 1^{ος} τρόπος. Από τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε ότι

$$f(x) = e^{h(x) \log g(x)}.$$

Επειδή έχουμε σύνθεση συναρτήσεων, παραγωγίζοντας παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{h(x) \log g(x)})' = e^{h(x) \log g(x)} (h(x) \log g(x))' \\ &= f(x) [h'(x) \log g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}]. \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος. Λογαριθμίζοντας έχουμε

$$\log f(x) = h(x) \log g(x).$$

Παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = h'(x) \log g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}$$

και άρα

$$f'(x) = f(x) [h'(x) \log g(x) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)}].$$

5. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $x^{\sqrt{x}}$.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\begin{aligned}(x^{\sqrt{x}})' &= [(e^{\log x})^{\sqrt{x}}]' = (e^{\log x})^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \sqrt{x} + \log x \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \right).\end{aligned}$$

6. Ένα σώμα εκσφενδονίζεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα 160 m/sec . Το ύψος $h(t)$ μετά από $t \text{ sec}$ δίνεται από τη σχέση $h(t) = 160t - 16t^2 \text{ m}$. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φθάσει το σώμα καθώς και η ταχύτητά του όταν βρίσκεται σε ύψος 256 m , τόσο στην άνοδό του όσο και στην κάθοδό του.

Λύση. Για να βρούμε σε ποιο ύψος θα φθάσει το σώμα θα πρέπει να βρούμε τη χρονική στιγμή που η ταχύτητά του θα γίνει 0. Η ταχύτητα $v(t)$, δίνεται από τη σχέση

$$v(t) = h'(t) = (160t - 16t^2)' = 160 - 32t \text{ m/sec},$$

η οποία μηδενίζεται όταν $t = 5 \text{ sec}$. Το ύψος σ' αυτή τη χρονική στιγμή είναι $h(5) = 400 \text{ m}$. Για να βρούμε την ταχύτητα όταν είναι σε ύψος 256 m βρίσκουμε πρώτα σε ποιά χρονική στιγμή έχει αυτό το ύψος από

τη σχέση $160t - 16t^2 = 256$, οπότε $t = 2 \text{ sec}$ ή $t = 8 \text{ sec}$ και έχουμε αντίστοιχα $v(2) = 96 \text{ m/sec}$ ή $v(8) = -96 \text{ m/sec}$. Το πρόσημο - σημαίνει ότι το σώμα βρίσκεται στην κάθοδο.

7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \sin(x^4\pi)$ στο σημείο $(1, 0)$.

Λύση. Η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο (x_0, y_0) , δίνεται από τη σχέση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Επειδή $f(x) = \sin(x^4\pi)$ έχουμε

$$f'(x) = \cos(x^4\pi) 4x^3\pi$$

και άρα $f'(1) = \cos(\pi) 4\pi = -4\pi$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y = -4\pi(x - 1).$$

9. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $(3, 13)$ και είναι εφαπτόμενες στη παραβολή $f(x) = 6x - x^2$.

Λύση. Έστω $y - 13 = \lambda(x - 3)$ η εξίσωση μιας τέτοιας ευθείας, όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής. Αν (x_0, y_0) ένα σημείο τομής της παραβολής και της ευθείας θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} y_0 - 13 &= \lambda(x_0 - 3), \\ y_0 &= 6x_0 - x_0^2, \\ \lambda &= f'(x_0). \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα έχουμε

$$x_0 = 1, y_0 = 5, \lambda = 4, \quad \text{ή} \quad x_0 = 5, y_0 = 5, \lambda = -4.$$

Άρα οι ζητούμενες εξισώσεις είναι

$$y = 4x + 1 \quad \text{και} \quad y = 25 - 4x.$$

10. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 1$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y + 8x - 2 = 0$.

Λύση. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y + 8x - 2 = 0$ είναι -8 . Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της $f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ίσος με $f'(x_0) = 4x_0$. Για να είναι οι δύο ευθείες παράλληλες πρέπει $4x_0 = -8$ και άρα $x_0 = -2$. Οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η

$$y - f(-2) = -8(x + 2) \Rightarrow y + 8x + 7 = 0.$$

11. Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + a$ δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες στο $[0, 1]$.

Λύση. Έστω ότι υπάρχουν $r_1, r_2 \in [0, 1]$ με $f(r_1) = f(r_2) = 0$. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + a$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[r_1, r_2]$ και άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ και άρα $3\xi^2 - 3 = 0 \Rightarrow \xi = \pm 1$, άτοπο.

12. Δείξτε με τη βοήθεια του Θεωρήματος της μέσης τιμής ότι

$$\frac{1}{6} < \sqrt{27} - 5 < \frac{1}{5}.$$

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [25, 27] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$. Σ' αυτό το διάστημα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της

μέσης τιμής και έχουμε

$$\frac{\sqrt{27} - \sqrt{25}}{27 - 25} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}, \quad \xi \in (25, 27),$$

δηλαδή

$$\sqrt{27} - 5 = \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi \in (25, 27).$$

Επειδή $\xi \in (25, 27)$ έχουμε $5 < \sqrt{\xi} < 6$ και άρα

$$\frac{1}{6} < \sqrt{27} - 5 < \frac{1}{5}.$$

13. Δείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Λύση. Αν $x = y$ τότε η ανισότητα είναι φανερή. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $x \neq y$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x < y$ (γιατί;). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(t) = \sin t$. Η f είναι συνεχής στο $[x, y]$ και παραγωγίσιμη στο (x, y) .

Οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής και άρα έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi) \Rightarrow \frac{\sin x - \sin y}{x - y} = \cos \xi.$$

Δηλαδή

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| = |\cos \xi| \leq 1,$$

και άρα έχουμε την ζητούμενη ανισότητα.

14. Προσδιορίστε το ελάχιστο της συνάρτησης

$$f(x) = (x - a)^2 + (x - b)^2 + x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση. Παραγωγίζοντας έχουμε

$$f'(x) = 2(x - a) + 2(x - b) + 2x = 2(3x - a - b).$$

Για $x \geq \frac{a+b}{3}$ είναι $f'(x) \geq 0$ και άρα στο διάστημα $[\frac{a+b}{3}, +\infty)$ η συνάρτηση είναι αύξουσα ενώ για $x \leq \frac{a+b}{3}$ είναι $f'(x) \leq 0$ και άρα στο διάστημα

$(-\infty, \frac{a+b}{3}]$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Οπότε στο σημείο $x =$ συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο, ίσο με

$$f\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 - ab).$$

15. Ο όγκος ενός κυλίνδρου ύψους h και ακτίνας βάσης r είναι $V =$ και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του είναι $E = 2\pi rh$. Να βρεθούν τα h και r που ελαχιστοποιούν το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του αν ο όγκος του είναι $16m^3$.

Λύση. Από τη σχέση $V = \pi r^2 h = 16$ έχουμε $h = \frac{16}{\pi r^2}$ και άρα

$$E = E(r) = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{32\pi r}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{32}{r} + 2\pi r^2.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$E'(r) = -\frac{32}{r^2} + 4\pi r.$$

Παρατηρούμε ότι για $0 < r \leq \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ είναι $E'(r) \leq 0$ και άρα στο διάστημα $(0, \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}]$ η συνάρτηση είναι φθίνουσα, ενώ για $r \geq \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$ είναι $E'(r) \geq 0$ και άρα στο διάστημα $[\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}, +\infty)$ η συνάρτηση είναι αύξουσα. Οπότε για

$$r = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ και άρα } h = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$$

το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας γίνεται ελάχιστο.

16. Δείξτε ότι $e^\pi > \pi^e$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x}{x^e}, \quad x > 0.$$

Έχουμε

$$f'(x) = \frac{e^x x^e - e x^{e-1} e^x}{x^{2e}} = \frac{e^x x^{e-1} (x - e)}{x^{2e}}.$$

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(e, +\infty)$ έχουμε $f'(x) > 0$, ενώ $f'(e) = 0$. Από το Θεώρημα 1.6.1 έχουμε ότι

$$e < x < \pi \Rightarrow f(e) \leq f(x) < f(\pi) \Rightarrow 1 < \frac{e^\pi}{\pi^e},$$

δηλαδή η ζητούμενη ανισότητα.

17. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[5]{x} - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x} - 1) = 0.$$

Επειδή

$$\frac{(\sqrt[5]{x} - 1)'}{(\sqrt[3]{x} - 1)'} = \frac{\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} \rightarrow \frac{3}{5}, \quad x \rightarrow 1,$$

έχουμε σύμφωνα με τον κανόνα του L' Hospital ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{3}{5}.$$

18. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιόριστη μορφή 1^∞ . Γράφουμε $x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-x} \log x}$. Στη συνάρτηση $\frac{\log x}{1-x}$, η οποία εμφανίζει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ εφαρμόζουμε το κανόνα του L' Hospital. Έχουμε $\frac{(\log x)'}{(1-x)'} = -\frac{1}{x} \rightarrow -1, \quad x \rightarrow 1$, και άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

19. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^a - x^a \right], \quad a > 0$.

Λύση. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^a - x^a \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1+x^2}{x} \right)^a \left(1 - \frac{x^2}{1+x^2} \right)^a \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{1+x^2}\right)^a}{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^a} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^a\right)'}{\left(\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^a\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^a}{x^2 - 1}$$

$$= \begin{cases} +\infty & a > 2 \\ 2, & a = 2 \\ 0 & 0 < a < 2 \end{cases}.$$

20. Δείξτε ότι αν $p > 1$ τότε $(x+1)^p > x^p + 1$, $x \geq 0$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x+1)^p - x^p - 1$, $x \geq 0$. Τότε:

$$f'(x) = p((x+1)^{p-1} - x^{p-1}) > 0$$

για κάθε $x \geq 0$ (διότι $p > 1$). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και συνεχής στο $[0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x \geq 0$ έχουμε:

$$0 = f(0) < f(x) = (1+x)^p - x^p - 1 \Rightarrow (1+x)^p > x^p + 1.$$

21. Να γίνει η μελέτη και η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Λύση: Έχουμε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συμμετρίες: Δεν υπάρχουν.

Ασύμπτωτες: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, άρα δεν υπάρχουν ασύμπτωτες.

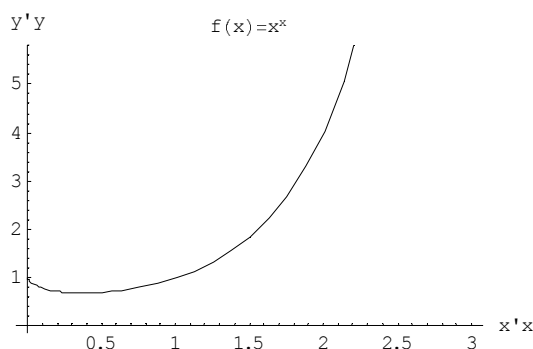
$$\mathbf{1^{\text{η}} \text{ παράγωγος:}} \quad f'(x) = x^x (1 + \ln x) = \begin{cases} < 0 & 0 < x < 1/e \\ = 0, & x = 1/e \\ > 0 & x > 1/e \end{cases}.$$

$$\mathbf{2^{\text{η}} \text{ παράγωγος:}} \quad f''(x) = x^x \left(\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right) > 0.$$

Πίνακας

	$(0, 1/e)$	$(1/e, +\infty)$
$f(x)$	+	+
$f'(x)$	-	+
	f γνησίως φθίνουσα	f γνησίως αύξουσα
$f''(x)$	+	+
	f κυρτή	f κυρτή

Γραφική παράσταση



22. Υπολογίστε τη 2^η παράγωγο της συνάρτησης $y = f(x)$ που δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = a(t) = t^2 + t^3$, $y = b(t) = t^2 - 2t$, $t \in [0, 1]$. Σχεδιάστε την καμπύλη.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $a'(t) = 2t + 3t^2 \geq 0$ για κάθε $t \in [0, 1]$, άρα η $x = a(t)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $t = a^{-1}(x)$ και συνεπώς η καμπύλη σε παραμετρική μορφή ορίζει μία συνάρτηση $y = f(x)$. Εφόσον η $y = f(x)$ μπορεί να γραφεί ως

$$b(t) = f(a(t))$$

παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε

$$b'(t) = f'(a(t))a'(t) \Rightarrow b'(t) = f'(x)a'(t) \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{b'(t)}{a'(t)}}.$$

Επίσης:

$$b''(t) = f''(a(t))a'(t)a'(t) + f'(a(t))a''(t) \Rightarrow b''(t) = f''(x)(a'(t))^2 + f'(x)a''(t)$$

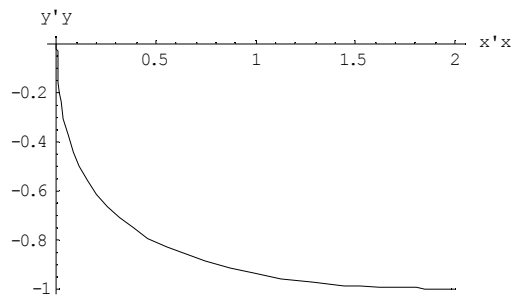
$$\Rightarrow b''(t) = f''(x)(a'(t))^2 + \frac{b'(t)}{a'(t)}a''(t) \Rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{b''(t)a'(t) - b'(t)a''(t)}{(a'(t))^3}}$$

οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$f''(x) = \frac{2(2t + 3t^2) - (2t - 2)(2 + 6t)}{(2t + 3t^2)^3} = \frac{4 + 12t - 6t^2}{t^3(2 + 3t)^3}.$$

Προφανώς όταν $t \in [0,1] \Rightarrow x \in [0,2]$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $[0,2]$. Εφόσον $f'(x) = \frac{2t-2}{2t+3t^2} \leq 0$ για κάθε $t \in (0,1]$ και $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t-2}{2t+3t^2} = -\infty$, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $[0,2)$ και η ευθεία $y = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $x(0) = 0$.

Επίσης $f''(x) = \frac{4-12t-6t^2}{t^3(2+3t)^3}$ και $\lim_{t \rightarrow 0^+} f''(x(t)) = +\infty$ και εφόσον $f''(x) = 0 \Leftrightarrow t = -0.290994$ ή $t = 2.29099$, η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,1]$, άρα αφού $y(0)=0$, $y(1) = -1$, έχουμε:



23. Υπολογίστε την παράγωγο των πεπλεγμένων συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3xy &= 0 \\ x^2 + y^2 &= a^2, \quad a > 0 \end{aligned}$$

Λύση (α) Διαφορίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε:

$$d(x^3 + y^3 - 3xy) = d(0) \Leftrightarrow d(x^3) + d(y^3) + d(-3xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 dx + 3y^2 dy - 3(ydx + xdy) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3\left(y + x \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$

(β) $d(x^2 + y^2) = d(a^2) \Leftrightarrow d(x^2) + d(y^2) = 0 \Leftrightarrow 2xdx + 2ydy = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$.