Κεφάλαιο 1

Βασικές εισαγωγικές έννοιες

1.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα εισάγουμε ορισμένες βασικές έννοιες απο την θεωρία συνόλων και σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς οι οποίες είναι απαραίτητες για την κατανόηση της πραγματικής ανάλυσης. Ορισμένες απο τις έννοιες αυτές έχουν αρκετό ενδιαφέρον και απο μόνες τους εφόσον βρισκουν σημαντικές εφαρμογές στις πιθανότητες και στην στατιστική.

1.2 Σύνολα και πράξεις συνόλων.

Ένα **σύνολο** A είναι μία συλλογή ομοειδών αντικειμένων ή εννοιών. Αν το αντικείμενο ή η έννοια x συμπεριλαμβάνεται στην σύλλογή A θα λέμε ότι το x ανήκει στο σύνολο A και θα το συμβολίζουμε $x \in A$. Αν όχι θα λέμε ότι το x δεν ανήκει στο σύνολο A και θα το συμβολίζουμε $x \notin A$. Ένα σύνολο το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο ονομάζεται το **κενό σύνολο** και συμβολίζεται $\emptyset$.

Παράδειγμα 1.2.1. *Η συλλογή των αριθμών $2, 4, 6$ αποτελεί ένα σύνολο το οποίο θα συμβολίζουμε $A = \{2, 4, 6\}$. Μπορούμε συνεπώς να γράψουμε $2 \in A$, $4 \in A$, $6 \in A$. Όμως, π.χ. $8 \notin A$.*

Λέμε ότι ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου S, και το συμβολίζουμε $A \subset S$, αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του S αλλά δεν ισχύει το ανάποδο. Δηλαδή,

$$A \subset S \iff \{a \in A \implies a \in S\}$$

Παράδειγμα 1.2.2. *Αν $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ τότε $A \subset S$ αλλά $S \not\subset A$.*

Παράδειγμα 1.2.3. *Αν $S = \{x \mid -1 < x \leq 1\}$ και $A = \{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}\}$ τότε $A \subset S$ αλλά $S \not\subset A$.*

Οι βασικές πράξεις μεταξύ των συνόλων είναι η **ένωση**, η **τομή** και το **συμπλήρωμα**.

▷ Η ένωση δύο συνόλων A και B μας δίνει ένα καινούργιο σύνολο το οποίο συμβολίζουμε με $A \cup B$ και περιέχει τα στοιχεία του A ή του B:

$$c \in A \cup B \iff c \in A \text{ ή } c \in B$$

▷ Η τομή δύο συνόλων A και B μας δίνει ένα καινούργιο σύνολο το οποίο συμβολίζουμε με $A \cap B$ και περιέχει τα **κοινά στοιχεία** των A και B:

$$c \in A \cap B \iff c \in A \text{ και } c \in B$$

▷ Για ένα σύνολο $A \subset S$ μπορούμε να ορίσουμε το **συμπληρωματικό** του σύνολο, το οποίο συμβολίζουμε A^c, και το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία του S τα οποία **δεν** περιέχονται στο S:

$$b \in A^c \iff b \in S \text{ και } b \notin A$$

Μία χρήσιμη ιδιότητα της τομής και της ένωσης είναι η ακόλουθη,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Κάνοντας χρήση της έννοιας του συμπληρωματικού συνόλου μπορούμε να ορίσουμε την διαφορά δύο συνόλων A και B τα οποία είναι και τα δύο υποσύνολα του ίδιου συνόλου S. Η διαφορά του A απο το B συμβολίζεται με $A \setminus B$ και το σύνολο αυτό περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. Συνεπώς

$$c \in A \setminus B \iff c \in A \text{ **αλλά** } c \notin B.$$

Η ένωση και η τομή συνόλων μπορεί να οριστεί και για περισσότερα απο δύο σύνολα. Για τρία σύνολα

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 := (A_1 \cup A_2) \cup A_3,$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 := (A_1 \cap A_2) \cap A_3,$$

και συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο για περισσότερα των τριών. Εν γένει

$$A_1 \cup \cdots A_{n-1} \cup A_n := (A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n,$$
$$A_1 \cap \cdots A_{n-1} \cap A_n := (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n,$$

για οποιοδήποτε n φυσικό αριθμό. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

Προφανώς

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff x \in \text{σε κάποιο απο τα } A_1 \cdots A_n \iff \exists\, i \in \{1, \cdots, n\} \text{ τέτοιο ώστε } x \in A_i,$$
$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff x \in \text{σε κάθε ένα απο τα } A_1 \cdots A_n \iff \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}\ x \in A_i,$$

Οι παραπάνω ορισμοί γενικεύονται και για άπειρα το πλήθος σύνολα ($n = \infty$)

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ για κάποιο } i = 1, 2, \cdots\}$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \cdots\}.$$

Οι ακόλουθοι κανόνες, γνωστοί και ως νόμοι του De Morgan , συνδέουν την ένωση, την τομή και την συμπλήρωση, και είναι πολύ χρήσιμοι,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$
$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c.$$

Στις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να θέσουμε $n = \infty$.

Παράδειγμα 1.2.4. *Ας θεωρήσουμε τα σύνολα*

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 3, 5\}$$

Τότε,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Παράδειγμα 1.2.5. *Έστω* $A_i = \{x \mid -\frac{1}{i^2} < x \leq \frac{1}{i^2}\}$. *Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι*

$$\bigcup_{i=1}^{6} A_i = \{x \mid -1 < x \leq 1\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{6} A_i = \{x \mid -\frac{1}{36} < x \leq \frac{1}{36}\}.$$

Παράδειγμα 1.2.6. *Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.2.2 μπορούμε να δούμε ότι* $A^c = \{1, 3, 5\}$.

Παράδειγμα 1.2.7. *Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.2.3 μπορούμε να δούμε ότι*

$$A^c = \{x \mid -1 < x \leq -\frac{1}{2}, \text{ ή } \frac{1}{2} < x \leq 1\}.$$

Παράδειγμα 1.2.8. *Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.2.5 μπορούμε να δούμε ότι*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \mid -1 < x \leq 1\}, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}.$$

Σχόλιο 1.2.9. *Εφιστούμε την προσοχή στο ότι πολλές φορές ιδιότητες που ισχύουν για κάθε πεπερασμένο* n *δεν ισχύουν απαραίτητα στην περίπτωση όπου* $n = \infty$. *Η παρατήρηση αυτή αποτελεί και βασικό θέμα της ανάλυσης. Χαριτολογώντας θα μπορούσαμε να πούμε οτι ανάλυση είναι η τέχνη του να περνάς απο το πεπερασμένο στο άπειρο.*

Πολλές μαθηματικές εκφράσεις μπορούμε να τις μεταγράψουμε με την γλώσσα των συνόλων και αυτό μας δίνει ένα πολύ καλό εναλλακτικο τρόπο έκφρασης. Για παράδειγμα, η πρόταση $x \in \bigcup_n A_n$ σημαινει οτι υπάρχει κάποιο n τέτοιο ωστε να ισχύει $x \in A_n$. Συνεπώς, αντί να γράψουμε $\exists n$ τέτοιο ωστε $x \in A_n$ μπορούμε ισοδυναμα να γράψουμε $x \in \bigcup_n A_n$. Με τον ίδιο τροπο, η έκφραση $x \in \bigcap_n A_n$ σημαινει οτι για κάθε n ισχύει $x \in A_n$. Συνεπώς, αντί να γράψουμε $\forall n\, x \in A_n$ μπορούμε ισοδυναμα να γράψουμε $x \in \bigcap_n A_n$.

1.3 Ἀκολουθίες συνόλων

Θα εισάγουμε τώρα ορισμένες βασικές έννοιες σχετικά με τις ακολουθίες συνόλων.

Ορισμός 1.3.1. *Μια άπειρη συλλογή απο σύνολα* $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$ *ονομάζεται ακολουθία συνόλων.*

Παράδειγμα 1.3.2. *Η συλλογή συνόλων* $\{A_n\}$, $n = 1, 2, \cdots$ *του παραδείγματος 1.2.5 αποτελεί μια ακολουθία συνόλων.*

Σε πολλές περιπτώσεις έχει νόημα να ρωτήσουμε την ερώτηση,

> Ποιό είναι το σύνολο των κοινών στοιχείων όλων των A_n απο κάποιο n και πάνω·

ή την ερώτηση

> Ποιό είναι το σύνολο των κοινών στοιχείων άπειρων το πλήθος A_n·

Το πρώτο σύνολο το ονομάζουμε το **κάτω όριο** την ακολουθίας συνόλων $\{A_n\}$ ενώ το δεύτερο το ονομάζουμε το **άνω όριο** της ακολουθίας συνόλων $\{A_n\}$.

Ορισμός 1.3.3 (Άνω και κάτω όριο ακολουθίας συνόλων)**.**

1. *Το* **κάτω όριο** *της ακολουθίας συνόλων* $\{A_n\}$ *είναι το σύνολο*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

2. *Το* **άνω όριο** *της ακολουθίας συνόλων* $\{A_i\}$ *είναι το σύνολο*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right).$$

Σχόλιο 1.3.4. *Το άνω και κάτω όριο μιας ακολουθία συνόλων έχει την ακόλουθη ερμηνεία:*

1. *Το κάτω όριο μιας ακολουθίας συνόλων είναι το σύνολο όλων των στοιχείων x, τέτοια ώστε το x να ανήκει σε όλους τους όρους της ακολουθίας A_n απο κάποιο δείκτη n^* και μετά. Με άλλα λόγια, το x ανήκει σε όλα τα μέλη της ακολουθίας $\{A_n\}$ εκτός από ένα πεπερασμένο το πλήθος αριθμό των συνόλων $A_1, A_2, \cdots, A_{n^*-1}$. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε μαθηματικά ως*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \mid \exists n^* \text{ έτσι ώστε } x \in A_{n^*}, A_{n^*+1}, \cdots\}.$$

Για το λόγο αυτό πολλές φορές στις πιθανότητες ερμηνεύουμε το άνω όριο μιας ακολουθίας συνόλων σαν τα γεγονότα τα οποία είναι κοινά σε όλες τις παρατηρήσεις εκτός απο πεπερασμένες το πλήθος απο αυτές.

2. *Το άνω όριο μιας ακολουθίας συνόλων είναι το σύνολο όλων των στοιχείων x τα οποία ανήκουν σε άπειρα το πλήθος απο τα σύνολα αυτά, δηλαδή*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \mid x \in A_n \text{ για άπειρους το πλήθος δείκτες } n\}.$$

Για το λόγο αυτό πολλές φορές στις πιθανότητες ερμηνεύουμε το άνω όριο μιας ακολουθίας συνόλων σαν τα γεγονότα τα οποία συμβαίνουν άπειρα συχνά (infinitely often).

Εν γένει ισχύει ότι

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Ορισμός 1.3.5. *Αν για μια ακολουθία συνόλων $\{A_n\}$ ισχύει $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ τότε λέμε ότι το όριο της ακολουθίας υπάρχει και συμβολίζουμε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Παράδειγμα 1.3.6. *Αν για την ακολουθία συνόλων $\{A_n\}$ ισχύει $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ (αύξουσα ακολουθία) τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παράδειγμα 1.3.7. *Αν για την ακολουθία συνόλων $\{A_n\}$ ισχύει $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ (φθίνουσα ακολουθία) τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παράδειγμα 1.3.8. *Αν $A_n = \{x \mid 1 - \frac{1}{n} < x < 2 + \frac{1}{n}\}$ τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}.$$

Παράδειγμα 1.3.9. *Αν A_n ξένα μεταξύ τους τότε*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \emptyset.$$

1.4 Οι πραγματικοί αριθμοί.

Θεωρούμε μία βασική εξοικείωση με τους πραγματικούς αριθμούς, το σύνολο των οποίων θα ονομάζουμε $\mathbb{R}$.
Στο σύνολο αυτό ορίζονται οι πράξεις της **πρόσθεσης** και του **πολλαπλασιασμού**.
Οι πράξεις αυτες έχουν τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες,

Πρόσθεση	**Πολλαπλασιασμός**
$a + b = b + a$	$a\,b = b\,a$
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a\,(b\,c) = (a\,b)\,c$
$a\,(b + c) = a\,b + a\,c$	

Στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν και δύο ειδικά στοιχεία σχετικά με τις πράξεις αυτές, το 1 και το 0. Το 1 έχει την ιδιότητα του να αφήνει οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}$ **αμετάβλητο** ως προς τον πολλαπλασιασμό,

$$1\,a = a, \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}$$

και το 0 έχει την ιδιότητα του να αφήνει οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{R}$ **αμετάβλητο** ως προς την πρόσθεση με αυτό,

$$0 + a = a, \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}.$$

Επίσης για κάθε στοιχείο $a \in \mathbb{R}$, υπάρχουν δύο στοιχεία, τα οποία θα τα συμβολίζουμε αντίστοιχα με $-a$ και a^{-1} και τα οποία έχουν την ιδιότητα,

$$\begin{aligned} a + (-a) = (-a) + a &= 0 \\ a\,a^{-1} = a^{-1}\,a &= 1 \end{aligned}$$

Όσοι απο εσάς έχουν κάποια στοιχειώδη εξοικείωση με την άλγεβρα, θα αναγνωρίσουν ότι το $\mathbb{R}$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, με αυτές τις ιδιότητες είναι ένα **σώμα** (**field**).

Μπορούμε να βάλουμε ορισμένες ακόμα ιδιότητες στο $\mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, μπορούμε να βρούμε ένα ειδικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, το οποίο ας το συμβολίσουμε με P το οποίο έχει τις εξής ιδιότητες

1. Αν $a \in\mathbb{R}$, τότε μπορεί να συμβεί μόνο ένα απο τα τρια επόμενα: είτε $a \in P$, είτε $a = 0$ είτε $-a \in P$,
2. Αν $a, b \in P$ τότε και $a + b \in P$,
3. Αν $a, b \in P$ τότε και $a\,b \in P$.

Το σύνολο P, περιέχει τα **θετικά στοιχεία** του $\mathbb{R}$. Αν το a είναι θετικό τότε το $-a$ λέμε ότι είναι **αρνητικό**. Πολλές φορές για το σύνολο P θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{R}^+$.

Στην γλώσσα της άλγεβρας, ένα πεδίο το οποίο έχει ένα τέτοιο υποσύνολο P ονομάζεται **διατεταγμένο σώμα, (ordered field)**. Συνεπώς το $\mathbb{R}$ είναι ένα διατεταγμένο σώμα.

Μία άλλη πολύ σημαντική ιδιότητα του $\mathbb{R}$, το οποίο σχετίζεται με την ιδιότητα του το να είναι διατεταγμένο σώμα, είναι ότι σε αυτό μπορούμε να ορίσουμε μία **σχέση διάταξης**, η οποία είναι η γνωστή μας σχέση της ανισότητας $<$.

Ορισμός 1.4.1. *Λέμε ότι $a < b$, για δύο $a, b \in\mathbb{R}$ αν $b - a \in P$. Αυτό θα το συμβολίζουμε με $b - a > 0$.*

Η σχέση της ανισότητας έχει τις εξής ιδιότητες,

1. Για δύο οποιαδήποτε $a, b \in\mathbb{R}$ ισχύει **μόνο ένα** απο τα τρία επόμενα ενδεχόμενα, είτε $a < b$, είτε $a > b$ είτε $a = b$.
2. Αν $a < b$ και $b < c$ τότε και $a < c$.
3. Αν $a < b$ τότε και $a + c < b + c$ για κάθε $c \in\mathbb{R}$.
4. Αν $a < b$ και $c > 0$ τότε $a\,c < b\,c$.

Λόγω των ιδιοτήτων (i) και (ii) λέμε ότι το $\mathbb{R}$ είναι ένα **ολικά διατεταγμένο σώμα (totally ordered field)** με την σχέση διάταξης $<$.

1.5 Άλλα σύνολα.

Άλλα σύνολα τα οποία μας ενδιαφέρουν είναι τα ακόλουθα:

- ▷ Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \cdots\}$.
- ▷ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
- ▷ Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$.

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς $[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ για τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}$,

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ a \leq x \leq b\},$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ a \leq x < b\},$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ a < x \leq b\},$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ a \leq x < b\}.$$

Οι ρητοί και οι άρρητοι αριθμοί έχουν τις εξής πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες σε σχέση με τους πραγματικούς αριθμούς.

Πρόταση 1.5.1 (Ιδιότητες ρητών και αρρήτων)**.**

1. *Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a, b, $(a < b)$, υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός r.*
2. *Μεταξύ δύο ρητών υπάρχει πάντοτε ένας άρρητος.*
3. *Μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a, b, $(a < b)$, υπάρχει κάποιος άρρητος αριθμός t.*

Λέμε λοιπόν ότι οι ρητοί είναι **πυκνοί** στους πραγματικούς αριθμούς, και ότι οι άρρητοι είναι **πυκνοί** στους πραγματικούς αριθμούς. Η πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς είναι πολύ σημαντική ιδιότητα και μας βοηθάει στο να εκφράσουμε ορισμένες προτάσεις σε πιο βολική μορφή.

Παράδειγμα 1.5.2. *Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b. Θα ισχύει $a < b$ αν και μόνο αν υπάρχει ρητός αριθμός r_n τέτοιος ώστε $a < r_n < b$.*

Παράδειγμα 1.5.3. *Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς a και b. Θα ισχύει $a \leq b$ αν και μόνο αν $a < b + \frac{1}{n}$ για καθε n.*

Παράδειγμα 1.5.4. *Κάνοντας χρήση των ρητών αριθμων μπορούμε να έχουμε ορισμένες πολύ χρήσιμες εκφράσεις. Για παράδειγμα*

$$(a,b] = \bigcap_n \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Προσπαθείστε μόνοι σας να δώσετε και άλλα τέτοια παραδειγματα.

1.6 Αριθμήσιμα και μη αριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός 1.6.1. *Δυο σύνολα A και B ονομάζονται* **ισοδύναμα** *(και συμβολίζουμε $A \sim B$) αν υπάρχει 1-1 απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων τους. Αν $A \sim B$ λέμε ότι τα δυο σύνολα εχουν τον ιδιο πληθάριθμο.*

Παράδειγμα 1.6.2. *Το σύνολο $\{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$ είναι ισοδύναμο με το σύνολο $\{1,2,3,4\}$ και ισοδύναμο με το σύνολο $\{\flat, \natural, \sharp, \triangle\}$. Και τα τρια αυτά σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.*

Παράδειγμα 1.6.3. *Το σύνολο των αρτιων εινaι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικων αριθμών. Το σύνολο των περιττών είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικων αριθμών. Το σύνολο των ρητων είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Το σύνολο των ρητών δεν είναι ισοδύναμο με το σύνολο των φυσικών.*

Ορισμός 1.6.4. *Ένα σύνολο A λέμε ότι έχει* **πληθάριθμο** *n αν είναι ισοδύναμο με το $\{1,2,\cdots,n\}$, δηλαδη μπορεί να βρεθεί μία $1-1$ απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου αυτού και του $\{1,2,\cdots,n\}$. Συμβολίζουμε $\mathrm{card}(A)$.*

Παράδειγμα 1.6.5. *Το σύνολο $\{2,4,6,8,10\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{1,2,3,4,5\}$ και έχει πληθάριθμο 5.*

Παράδειγμα 1.6.6. *Το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7 = 0\}$ είναι ισοδύναμο με το $\{1,2\}$ και έχει πληθάριθμο 2.*

Ορισμός 1.6.7. *Ένα σύνολο ονομάζεται* **πεπερασμένο** *αν ο πληθαριθμός του είναι πεπερασμένος αριθμός, ή είναι το κενό σύνολο. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται* **μη πεπερασμένο** *ή* **άπειρο** *σύνολο.*

Παράδειγμα 1.6.8. *Το σύνολο $\{1,2,4,6,8\}$ είναι πεπερασμένο ενώ το σύνολο των ρητών είναι άπειρο.*

Ορισμός 1.6.9. *Ένα σύνολο ονομάζεται* **αριθμήσιμο** *αν μπορεί να βρεθεί μία 1-1 απεικόνιση μεταξύ των στοιχείων του συνόλου αυτού και του* $\mathbb{N}^+$. *Ένα σύνολο για το οποία δεν είναι αυτό δυνατό, ονομάζεται* **μη αριθμήσιμο**.

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- ▷ Το σύνολο των ακεραίων αριθμών, $\mathbb{Z}$ είναι αριθμήσιμο.
- ▷ Το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.
- ▷ Το σύνολο των αρρήτων αριθμών, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **δεν** είναι αριθμήσιμο.
- ▷ Το σύνολο των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$, **δεν** είναι αριθμήσιμο.
- ▷ Τα σύνολα $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$,$[a, b)$, **δεν** είναι αριθμήσιμα.

Παράδειγμα 1.6.10. *Ας δούμε γιατί το σύνολο $[0, 1]$ δεν είναι αριθμήσιμο. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να γραφεί σαν μία ακολουθία από φυσικούς αριθμούς (η οποία μπορεί να μην τελειώνει ποτέ), $x = a_0.a_1a_2\cdots$, όπου $0 \le a_n \le 9$ για κάθε $n \ge 1$. Για να το κάνουμε αυτό παίρνουμε ως a_0 τον μεγαλύτερο φυσικό τέτοιο ωστε $a_0 \le x$, μετά ορίζουμε ως a_1 τον μεγαλύτερο φυσικό αριθμό τέτοιο ώστε $a_0 + \frac{a_1}{10} \le x$, και εν γένει ως a_n τον μεγαλύτερο φυσικό τέτοιο ωστε*

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots \frac{a_n}{10^n} \le x$$

και συνεχίζουμε επ΄ άπειρον. Ο κάθε πραγματικός αριθμός x μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως μια ακολουθια $a_0.a_1a_2\cdots$. Η αναπαράσταση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν το άπειρο άθροισμα $x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Αν ενδιαφερόμαστε για τα στοιχεία του $[0, 1]$ τότε $a_0 = 0$.

Ας υποθέσουμε οτι το $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο και θα δούμε οτι θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Εφόσον το $I = [0, 1]$ είναι αριθμήσιμο μπορούμε να βρούμε μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών αριθμων και των στοιχείων του συνόλου $[0, 1]$. Έστω λοιπόν x_1 το πρώτο στοιχείο του I, x_2 το δεύτερο, x_3 το τρίτο κ.ο.κ. Συνεπώς, $I = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. Κάθε ενα απο αυτά τα στοιχεία έχει μια δεκαδική αναπαράσταση, έστω $x_m = .a_{m1}a_{m2}a_{m3}\cdots$, όπου ο δείκτης m συμβολίζει το ότι η ακολουθία $\{a_{mn}\}$, $n = 1, 2, \cdots$ αντιστοιχεί στην δεκαδική αναπαράσταση του πραγματικού αριθμού x_m. Εφόσον όλοι οι αριθμοί $x_m \in [0, 1]$, το $a_{m0} = 0$ και παραλείπεται. Το σύνολο I μπορεί λοιπόν να αναπαρασταθει σαν ενας πίνακας με άπειρες γραμμές και άπειρες στήλες που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς a_{mn},

$$\begin{array}{cc} x_1 & \to \\ x_2 & \to \\ x_3 & \to \\ \vdots & \vdots \\ x_n & \to \\ \vdots & \vdots \end{array} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την υπόθεση μας, οι γραμμές του παραπάνω πίνακα περιέχουν **όλους** *τους πραγματικούς αριθμούς στο διαστημα $[0, 1]$. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αριθμο $y \in [0, 1]$ με δεκαδική αναπαράσταση $.b_1b_2b_3\cdots$ ο οποίος δεν αντιστοιχεί σε καμία γραμμή του παραπάνω πίνακα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Ας πάρουμε την διαγωνιο του πίνακα αυτού $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots$. Αν $a_{11} = 1$ θέτουμε $b_1 = 2$ αλλιώς $b_1 = 1$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, στο n-οστό βήμα αν $a_{nn} = 1$ θέτουμε $b_n = 2$ αλλιώς $b_n = 1$ κ.ο.κ. Φτιάχνουμε κατ΄ αυτόν τον τρόπο τον πραγματικό αριθμό $.b_1b_2\cdots$. Η ακολουθία $b_1b_2\cdots$ δεν συμπίπτει (εκ κατασκευής) με καμία απο τις γραμμες του παραπάνω πίνακα, αρα φτιάξαμε ένα αριθμό στο διάστημα $[0, 1]$ που δεν συμπίπτει με την απαρίθμηση $I = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$. Συνεπώς οδηγηθήκαμε σε άτοπο, άρα το $[0, 1]$ δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο. Το επιχείρημα αυτό οφείλεται στον Georg Cantor και είναι το περίφημο διαγώνιο επιχείρημα του το οποίο δημοσιευθηκε το 1891.*

Παράδειγμα 1.6.11. *Έχουμε δει ότι ισχύει*

$$(a, b] = \bigcap_n \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

Το σύνολο $(a, b]$ μπορεί να γραφεί σαν αριθμήσιμη τομή των συνόλων $A_n = (a, b + \frac{1}{n})$.

Αν τα A και B είναι πεπερασμενα σύνολα, τότε $A \subset B$ αν και μόνο αν $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(B)$. Αυτό σημαίνει ότι αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο τότε δεν μπορεί να είναι ισοδύναμο με κανένα γνήσιο υποσύνολο του. Αυτό **δεν** ισχύει για τα άπειρα σύνολα, αν ένα σύνολο A είναι άπειρο τότε υπάρχει ένα γνήσιο υποσύνολο του $B \subset A$ τέτοιο ωστε $A \sim B$. Μάλιστα, μπορούμε να αποδείξουμε οτι τα άπειρα υποσύνολα αριθμήσιμων συνόλων είναι και αυτά αριθμήσιμα συνολα.

Τι μπορούμε να πούμε για τον πληθάριθμο απείρων συνόλων;

Ορισμός 1.6.12. *Ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικων αριθμών* $\mathbb{N}^+$ *συμβολίζεται με* $\aleph_0$ *(άλεφ μηδέν).*

Όλα τα αριθμήσιμα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο ο οποίος είναι ο $\aleph_0$.

Παράδειγμα 1.6.13. *Επειδή το σύνολο* $\mathbb{Q}$ *είναι αριθμήσιμο, ισχύει οτι* $\mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$.

Με βάση τα παραπάνω, είναι προφανές οτι $\mathrm{card}(\mathbb{R}) \neq \aleph_0$. Ποιός είναι ο πληθάριθμος των πραγματικων αριθμων;

Ορισμός 1.6.14. *Ο πληθάριθμος του συνόλου των πραγματικων αριθμών συμβολίζεται με* $\mathfrak{c}$ *και ονομάζεται ο πληθάριθμος του συνεχούς.*

Είδαμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δυο ειδη απείρων συνόλων. Το $\mathbb{N}^+$ και το $\mathbb{R}$, και τα δυο αυτά σύνολα είναι ποιοτικα διαφορετικά (έχουν διαφορετικό πληθάριθμο). Το 1878 ο Georg Cantor διατύπωσε την περίφημη υπόθεση του συνεχούς, σύμφωνα με την οποία κάθε άπειρο σύνολο πραγματικών αριθμών, είτε είναι αριθμήσιμο (δηλαδή έχει πληθάριθμο $\aleph_0$) είτε έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το σύνολο $\mathbb{R}$ (δηλαδή $\mathfrak{c}$). Η υπόθεση αυτή απασχόλησε τους μαθηματικούς (και τον ίδιο τον Cantor) για πολλά χρόνια. Μάλιστα ο David Hilbert το 1900 διατύπωσε την απόδειξη ή την κατάριψη της υπόθεσης του συνεχούς σαν το πρώτο απο τα 23 προβλήματα τα οποία θα απασχολούσαν την μαθηματικη επιστήμη κατά τον 20ο αιώνα. Το 1937 ο Kurt Gödel έδειξε οτι η υπόθεση του συνεχούς είναι συμβατη με τα αξιώματα της θεωριας συνόλων του Zermelo ενώ το 1963 ο Paul Cohen έδειξε ότι η άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς είναι επίσης συμβατή με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων. Αυτό μας δείχνει οτι η υπόθεση του συνεχούς ανήκει στην 'γκρίζα' ζώνη των μαθηματικών, είναι μια πρόταση για την οποία δεν μπορούμε να αποφανθούμε με βάση το αξιωματικό μας πλαίσιο σχετικά με το αν είναι ψευδής ή αληθής.

1.7 Η απόλυτη τιμή.

Ορισμός 1.7.1. *Η* **απόλυτη τιμή** *ενός πραγματικού αριθμού* x *συμβολίζεται με* $\mid x \mid$ *και ορίζεται ως*

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$$

Οι ακόλουθες ιδιότητες της απόλυτης τιμής είναι ιδιαίτερα χρήσιμες,

$$\begin{aligned} &\mid x \mid \leq c \Longleftrightarrow -c \leq x \leq c \\ &\mid xy \mid = \mid x \mid \mid y \mid \\ &\mid x \mid - \mid y \mid \leq \mid x - y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid \end{aligned}$$

Αν αναπαραστήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2 με σημεία της πραγματικής ευθείας, τότε η απόλυτη τιμή της διαφοράς $\mid x_1 - x_2 \mid$ παίζει τον ρόλο της **απόστασης** μεταξύ των σημείων αυτών.

Ορισμός 1.7.2. *Έστω* $x \in \mathbb{R}$.

1. *Το θετικό μέρος του* x *ορίζεται ως* $x^+ := \max(x, 0)$.
2. *Το αρνητικό μέρος του* x *ορίζεται ως* $x^- := \max(-x, 0)$.

Για οποιοδήποτε x ισχύει $x = x^+ - x^-$ και $|x| = x^+ + x^-$. Τόσο το x^+ όσο και το x^- είναι θετικοί αριθμοί.

1.8 sup και inf

Οι έννοιες του ελάχιστου άνω φράγματος (sup) και του μέγιστου κάτω φράγματος (inf) είναι θεμελιώδεις στην ανάλυση.

Θα εισάγουμε πρώτα τις έννοιες του άνω και του κάτω φράγματος για υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.8.1 (Άνω και κάτω φράγμα συνόλου)**.** *Έστω $X \subset \mathbb{R}$.*

1. *Το X είναι* **άνω φραγμένο** *αν υπάρχει κάποιο $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \leq C$ για κάθε $x \in X$. Ο πραγματικός αριθμός C ονομάζεται ένα* **άνω φράγμα** *του συνόλου X.*

2. *Το X είναι* **κάτω φραγμένο** *αν υπάρχει κάποιο $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $c \leq x$ για κάθε $x \in X$. Ο πραγματικός αριθμός c ονομάζεται ένα* **κάτω φράγμα** *του συνόλου X.*

Προφανώς τα άνω και κάτω φράγματα για κάποιο σύνολο **δεν** είναι μοναδικά.

Παράδειγμα 1.8.2. *Έστω $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, με $a < b$. Οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός $C \geq b$ είναι ένα άνω φράγμα του X ενώ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός $c \leq a$ είναι ένα κάτω φράγμα του X.*

Θα ορίσουμε τώρα τις έννοιες του ελάχιστου άνω φράγματος και του μέγιστου κάτω φράγματος.

Ορισμός 1.8.3 (sup και inf)**.** *Έστω X ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο ειναι μη κενό.*

1. *Ο πραγματικός αριθμός M είναι ένα* **ελάχιστο άνω φράγμα** *(supremun) για το X, αν το M είναι άνω φράγμα για το X και για κάθε άλλο ανω φράγμα M' του X ισχύει $M \leq M'$. Συμβολίζουμε $M = \sup(X)$. Αν $X = \emptyset$, $\sup(X) := -\infty$ και αν X δεν είναι φραγμένο απο τα ανω $\sup(X) = +\infty$.*

2. *Ο πραγματικός αριθμός m είναι ένα* **μέγιστο κάτω φράγμα** *(infimum) για το X, αν το m είναι κάτω φράγμα για το X και για κάθε άλλο κάτω φράγμα m' του X ισχύει ότι $m' \leq m$. Συμβολίζουμε $m = \inf(X)$. Αν $X = \emptyset$, $\inf(X) := +\infty$ και αν X δεν είναι φραγμένο απο τα κάτω $\inf(X) = -\infty$.*

Από τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να δούμε ότι

1. $M = \sup(X)$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ (το x εξαρτάται απο την επιλογή του ϵ) τέτοιο ώστε $M - \epsilon < x \leq M$. Αυτό μας λέει οτι αν ελαττώσουμε το $\sup(X)$ κατα ϵ (για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, το $\sup(X) - \epsilon$ **δεν** είναι ανω φράγμα του συνόλου X.

2. $m = \inf(X)$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ τέτοιο ώστε $m \leq x < m + \epsilon$. Αυτό μας λέει οτι αν αυξήσουμε το $\inf(X)$ κατα ϵ (για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, το $\inf(X) + \epsilon$ **δεν** είναι κάτω φράγμα του συνόλου X.

Ισχύει πάντοτε οτι $\inf(X) \leq \sup(X)$. Σε αντίθεση με τα άνω και κάτω φράγματα που δεν είναι μοναδικα, το sup και το inf είναι.

Πρόταση 1.8.4. *Το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα για ένα σύνολο X είναι* **μοναδικά***.*

Απόδειξη: Έστω $m_1 = \inf(X)$, $m_2 = \inf(X)$ δύο μέγιστα κάτω φράγματα του X. Θα δείξουμε ότι $m_1 = m_2$.
Απο τον ορισμό, εφοσον m_1 είναι μέγιστο κάτω φράγμα του X θα έχουμε ότι το m_1 είναι κάτω φράγμα για το σύνολο X και οποιοδήποτε άλλο κάτω φράγμα του X θα είναι μικρότερο απο αυτό. Συνεπώς, επειδή το m_2 είναι κάτω φράγμα για το X (επειδή έχουμε δεχθεί ότι είναι μέγιστο κάτω φράγμα) θα πρέπει να ισχύει ότι

$$m_2 \leq m_1.$$

Επίσης απο τον ορισμό, εφόσον το m_2 είναι μέγιστο κάτω φράγμα του X θα έχουμε ότι το m_2 είναι κάτω φράγμα για το σύνολο X και οποιοδήποτε άλλο κάτω φράγμα του X θα είναι μικρότερο απο αυτό. Συνεπώς, επειδή το m_1 είναι κάτω φράγμα για το X (επειδή έχουμε δεχθεί ότι είναι μέγιστο κάτω φράγμα) θα πρέπει να ισχύει ότι

$$m_1 \leq m_2.$$

Οι δύο αυτές ανισότητες μας δείχνουν ότι $m_1 = m_2$, άρα το μέγιστο κάτω φράγμα είναι μοναδικό. Η απόδειξη για το ελάχιστο άνω φράγμα αφήνεται σαν άσκηση. ■

Παράδειγμα 1.8.5. *Ας υποθέσουμε ότι $X = [a, b]$ για $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Τότε $\sup X = b$ και $\inf X = a$.*

Το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου X, δεν είναι απαραίτητο να ανήκουν στο σύνολο X.

Παράδειγμα 1.8.6. *Ας υποθέσουμε ότι $X = (a, b)$ για $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Τότε $\sup X = b$ και $\inf X = a$, τα οποία δεν ανήκουν στο X.*

Συμβολισμός 1.8.7.

1. *Αν το* $A = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ *ειναι ενα αριθμήσιμο σύνολο, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό* $\sup(A) = \sup_n x_n$ *και* $\inf(A) = \inf_n x_n$.

2. *Αν* $A \subset \mathbb{R}$ *και* $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό*

$$\sup_A f = \sup(f(A)) = \sup(\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}) = \sup(\{f(x) \mid x \in A\}),$$
$$\inf_A f = \inf(f(A)) = \inf(\{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\} = \inf(\{f(x) \mid x \in A\})),$$

για το sup *και το* inf *του πεδίου τιμών της συνάρτησης* f.

Παράδειγμα 1.8.8. *Έστω* $X = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^+\right\}$. *Τότε* $\sup(X) = 1$ *και* $\inf(X) = 0$. *Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε* $\sup \frac{1}{n} = 1$ *και* $\inf \frac{1}{n} = 0$.

Παράδειγμα 1.8.9. *Έστω* $A = (0, 1]$ *και* $f : A \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = e^{-x}$. *Έχουμε ότι*

$$\inf_A f = \inf(\{e^{-x} \in \mathbb{R} \mid x \in (0, 1]\}) = e^{-1},$$
$$\sup_A f = \sup(\{e^{-x} \in \mathbb{R} \mid x \in (0, 1]\}) = 1.$$

Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε την διαφορά του μεγίστου στοιχείου ενός συνόλου και του ελαχίστου άνω φράγματος, καθώς και την διαφορά του ελαχίστου στοιχείου ενός συνόλου και του μεγίστου κάτω φράγματος.

Ορισμός 1.8.10. *Έστω* X *ένα υποσύνολο του* $\mathbb{R}$.

1. *Ο πραγματικός αριθμός* M *ονομάζεται το μέγιστο στοιχείο του* X *αν και μόνο αν* $M \in X$ *και* $M = \sup X$.

2. *Ο πραγματικός αριθμος* m *ονομάζεται το ελάχιστο στοιχείο του* X *αν και μόνο αν* $m \in X$ *και* $m = \inf X$.

Ο ορισμός αυτός τονίζει ότι το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα ενός συνόλου δεν είναι απαραίτητα στοιχεία του συνόλου αυτού! Φυσικά αν ένα σύνολο είναι πεπερασμένο τότε το sup ταυτίζεται με το μέγιστο στοιχείο του και το inf ταυτίζεται με το ελάχιστο στοιχείο του.

Η ακόλουθη ιδιότητα του $\mathbb{R}$ είναι πολύ σημαντική για την πραγματική ανάλυση.

Αξίωμα 1.8.11 (Ύπαρξη του ελάχιστου άνω φράγματος). *Ένα άνω φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Η ιδιότητα αυτή των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι θεμελιώδους σημασίας για την πραγματική ανάλυση και επάνω της βασίζονται όλα τα βασικά θεωρήματα της.

Σχόλιο 1.8.12. *Η ιδιότητα αυτή που ισχύει για τα υποσύνολα του* $\mathbb{R}$ *και είναι γνωστή ως η ιδιότητα πληρότητας του Dedekind δεν είναι αυτονόητη για κάθε σύνολο. Για παράδειγμα το σύνολο των ρητών αριθμών* $\mathbb{Q}$ **δεν** *έχει αυτή την ιδιότητα! Πολλές φορές λοιπόν, όταν εργαζομαστε σε γενικότερα σύνολα, χρειάζεται να θέσουμε την παραπάνω πρόταση σαν αξίωμα, το οποίο σχετίζεται με το αξίωμα της επιλογής. Το αξίωμα αυτό λέει με απλά λόγια ότι αν έχουμε μια άπειρη συλλογή απο σύνολα, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο το οποίο θα περιέχει ένα στοιχείο απο κάθε σύνολο της συλλογής αυτής.*

Απο τον ορισμό του sup και του inf μπορούμε να συνάγουμε ορισμένες βασικές τους ιδιότητες.

Πρόταση 1.8.13. *Έστω* $A, B \subset \mathbb{R}$.

1. *Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

2. *Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Με άλλα λόγια, αν θεωρήσουμε την απεικόνιση (συνάρτηση) $A \mapsto \sup(A)$ σαν μια απεικόνιση απο το σύνολο των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ στους πραγματικούς αριθμούς αυτή η απεικόνιση είναι μονότονη (αύξουσα). Με την ίδια λογική, η απεικόνιση $A \mapsto \inf(A)$ είναι φθίνουσα.

Σχόλιο 1.8.14. *Ακόμα και αν* $A \subset B$ *(με αυστηρό εγκλεισμό) εν γένει* $\sup(A) \leq \sup(B)$ *και* $\inf(A) \geq \inf(B)$. *Αυτό συμβαίνει γιατι τα* sup *και* inf *των συνόλων* A *και* B **δεν** *είναι απαραίτητα και στοιχεία των αντίστοιχων συνόλων.*

Παράδειγμα 1.8.15. *Ας θεωρήσουμε το αριθμήσιμο σύνολο* $A = \{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ *και τα υποσύνολα του* $A_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$. *Αν ορίσουμε ως* $M_n = \sup(A_n)$ *και* $m_n = \inf(A_n)$ *μπορούμε να δούμε ότι* $M_n \geq M_{n+1}$ *και* $m_n \leq m_{n+1}$ *για κάθε* n. *Αυτό προκύπτει άμεσα εφόσον* $A_{n+1} \subset A_n$ *για κάθε* n.

Ορισμός 1.8.16. *Έστω* $A, B \subset \mathbb{R}$ *και* $c \in \mathbb{R}$. *Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\begin{aligned} c\,A &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = c\,y,\ \ y \in A\}, \\ A + B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = y + z \ \text{για κάποια}\, y \in A,\ z \in B\}, \\ A - B &= \{x \in \mathbb{R} \mid x = y - z \ \text{για κάποια}\, y \in A,\ z \in B\} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.8.17. *Έστω* $A = (0, 1]$, $B = (2, 4)$. *Μπορούμε να δούμε οτι* $2A = (0, 2]$, $-A = [-1, 0)$, $A + B = (2, 5)$ *και* $A - B = (-4, , -1)$.

Πρόταση 1.8.18. *Αν* $A \subset \mathbb{R}$ *και* $c \in \mathbb{R}$ *ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} \sup(c\,A) = c\,\sup(A),\ \ \inf(c\,A) = c\,\inf(A), \quad c \geq 0, \\ \sup(c\,A) = c\,\inf(A),\ \ \inf(c\,A) = c\,\sup(A), \quad c < 0. \end{aligned}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $c = -1$ παίρνουμε την χρήσιμη ιδιότητα

$$\sup(-A) = -\inf(A),\ \ \inf(-A) = -\sup(A).$$

Παράδειγμα 1.8.19. *Ας θεωρήσουμε το σύνολο* $A = \{\frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ *και το σύνολο* $-A = \{-\frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. *Μπορούμε να δούμε ότι* $\sup(-A) = -\inf(A) = 0$ *και* $\inf(-A) = -\sup(A) = -2$.

Πρόταση 1.8.20. *Αν* $A, B \subset \mathbb{R}$, *μη κενά με την ιδιότητα* $x \leq y$ *για κάθε* $x \in A$ *και κάθε* $y \in B$, *τότε* $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Απο αυτό είναι προφανές και ότι $\inf(A) \leq \sup(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B)$.

Παράδειγμα 1.8.21. *Έστω* $A = (0, 2)$ *και* $B = [2, 6)$. *Ισχύει ότι* $2 = \sup(A) \leq \inf(B)$. *Φυσικά ισχύει και ότι* $\inf(A) \leq \inf(B)$ *και* $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Πρόταση 1.8.22. *Αν* $A, B \subset \mathbb{R}$, *μη κενά, τότε*

$$\begin{aligned} \sup(A + B) &= \sup(A) + \sup(B), \\ \inf(A + B) &= \inf(A) + \inf(B), \\ \sup(A - B) &= \sup(A) - \inf(B), \\ \inf(A - B) &= \inf(A) - \sup(B). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.8.23. *Έστω δυο συναρτήσεις* $f, g : I \to \mathbb{R}$. *Με βάσει την Πρόταση 1.8.22 (και τον Συμβολισμό 1.8.7) ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} \sup_I (f + g) \leq \sup_I f + \sup_I g, \\ \inf_I (f + g) \geq \inf_I f + \inf_I g. \end{aligned}$$

Για να το δούμε αυτό ξεκινάμε με την παρατήρηση οτι εν γένει

$$\{f(x) + g(x) \mid x \in I\} \subseteq \{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}, \tag{1.1}$$

εφόσον το σύνολο $\{f(x) + g(x) \mid x \in I\}$ *αποτελείται απο τις τιμές που παίρνει το άθροισμα* $f(x) + g(x)$ *για το ίδιο* $x \in I$ *ενω εν γένει το* $\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}$ *αποτελείται απο τους πραγματικούς αριθμούς* $f(x) + g(y)$, $x \in I$, $y \in I$ *αλλά δεν ισχύει απαραίτητα οτι* $x = y$ [1]. *Σύμφωνα με τον Συμβολισμό 1.8.7,*

$$\begin{aligned} \sup_I f &= \sup(\{f(x) \mid x \in I\}, \\ \sup_I g &= \sup(\{g(x) \mid x \in I\}, \\ \sup_I (f + g) &= \sup(\{f(x) + g(x) \mid x \in I\}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

[1] Το παράδειγμα $I = (0, 1)$, $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^x$, όπου $\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\} = (1 + e^{-1}, 1 + e)$ και $\{f(x) + g(x) \mid x \in I\} = (2, e^{-1} + e)$ μπορεί να σας βοηθήσει στο να κατανοήσετε την παραπάνω σχέση.

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.8.22,

$$\sup(\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}) = \sup(\{f(x) \mid x \in I\} + \sup(\{g(x) \mid x \in I\} = \sup_I f + \sup_I g.$$

Απο την σχέση (1.1) *και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.8.13 καταλήγουμε στο οτι*

$$\sup(\{f(x) + g(x) \mid x \in I\}) \leq \sup(\{f(x) \mid x \in I\} + \{g(x) \mid x \in I\}),$$

απο την οποία χρησιμοποιώντας την (1.2) *προκύπτει η ανισότητα για τα* sup. *Η ανισότητα για τα* inf *αφήνεται σαν άσκηση.*

1.9 Η αρχή της επαγωγής

Η επαγωγή είναι μία πολύ χρήσιμη αποδεικτική διαδικασία, η οποία μας επιτρέπει να ελέγχουμε την ορθότητα ορισμένων προτάσεων. Χρησιμοποιείται αρκετά σαν εργαλείο στην μαθηματική ανάλυση, οπότε την υπενθυμίζουμε εδώ. Θα παρουσιάσουμε μόνο μία ειδική μορφή της αρχής της επαγωγής, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά συχνά.

Θεώρημα 1.9.1 (Αρχή της επαγωγής). *Έστω μία συλλογή πρότασεων $\{S(n)\}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Αν*

1. *Η πρόταση $S(1)$ είναι αληθής.*
2. *Ισχύει ότι αν για κάποιο n η πρόταση $S(n)$ είναι αληθής τότε και η πρόταση $S(n+1)$ είναι επίσης αληθής,*

τότε η πρόταση $S(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.

Παράδειγμα 1.9.2. *Κάνοντας χρήση της αρχής της επαγωγής δείξτε ότι $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.*

Ας θεωρήσουμε κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Η πρόταση $S(n)$ είναι η πρόταση

$$S(n) = \text{Ισχύει ότι } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι η πρόταση $S(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας την επαγωγή.

Εύκολα βλέπουμε ότι η $S(1)$ είναι αληθής. Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιο n η $S(n)$ είναι αληθής. Τότε θα ισχύει

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Ας ελέγξουμε το κατά πόσον η $S(n+1)$ είναι αληθής δηλαδή το κατά πόσο ισχύει ότι

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}.$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{gathered} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) = \\ \frac{n\,(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}. \end{gathered}$$

Άρα, η $S(n+1)$ είναι επίσης αληθής και απο την αρχή της επαγωγής, η $S(n)$ είναι αληθής για κάθε n.

1.10 Σημαντικότερα σημεία του κεφαλαίου

- Οι βασικές πράξεις των συνόλων, τόσο για πεπερασμένο όσο και για άπειρο αριθμό συνόλων.
- Τα άνω και κάτω όρια ακολουθίων συνόλων και η ερμηνεία τους. Οι έννοιες αυτές θα χρησιμοποιηθούν πολύ στην θεωρία πιθανοτήτων και ειδικά στα οριακά θεωρήματα τα οποία αποτελούν και την βάση της στατιστικής.
- Η έννοια της πυκνότητας των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς.

- Η έννοια της απόλυτης τιμής και η ερμηνεία της ως απόστασης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.
- Οι έννοιες του inf και sup υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και οι πιθανές διαφορές τους απο τις έννοιες του μεγίστου και του ελαχίστου.
- Η κατανόηση και η χρήση της αρχής της επαγωγής.