

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 1.1 Διατεταγμένα σώματα-Αξίωμα πληρότητας

Ένα σύνολο Σ καλείται *διατεταγμένο σώμα* όταν

1. στο σύνολο Σ έχει ορισθεί η πράξη της πρόσθεσης ως προς την οποία το Σ είναι *αβελιανή ομάδα*, δηλαδή

$$x + y \in \Sigma \quad \forall x, y \in \Sigma,$$

$$x + y = y + x \quad \forall x, y \in \Sigma,$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \Sigma,$$

$$\exists \text{ μοναδικό μηδενικό στοιχείο του } \Sigma: x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x \in \Sigma,$$

$$\exists \text{ μοναδικό αντίθετο στοιχείο } x' \in \Sigma: x + x' = x' + x = 0.$$

Το αντίθετο στοιχείο του x στο εξής θα συμβολίζεται με $-x$.

2. στο σύνολο Σ έχει ορισθεί η πράξη του πολ/σμού ως προς την οποία το σύνολο Σ είναι επίσης *αβελιανή ομάδα*, δηλαδή

$$x \cdot y \in \Sigma \quad \forall x, y \in \Sigma$$

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \Sigma,$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \Sigma,$$

$$\exists \text{ μοναδικό μοναδιαίο στοιχείο του } \Sigma: x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in \Sigma,$$

$$\exists \text{ μοναδικό αντίστροφο στοιχείο } x' \in \Sigma: x \cdot x' = x' \cdot x = 1.$$

Το αντίστροφο στοιχείο του x στο εξής θα συμβολίζεται με x^{-1} .

Επιπλέον ο πολ/σμός είναι πράξη επιμεριστική ως προς την πρόσθεση δηλαδή:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \forall x, y, z \in \Sigma.$$

Η πράξη της *αφαίρεσης* ορίζεται ως εξής

$$x - y = x + (-y) \quad \forall x, y \in \Sigma,$$

ενώ η πράξη της *διαίρεσης* ορίζεται ως

$$x/y = x y^{-1} \quad \forall x, y \in \Sigma, y \neq 0.$$

- 3.** υπάρχει μία διάταξη στο σύνολο Σ , δηλαδή θεωρούμε ότι υπάρχει ένα υποσύνολο Θ του συνόλου Σ κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού το οποίο καλείται **σύνολο των θετικών στοιχείων** του Σ έτσι ώστε $\forall x \in \Sigma$ να ισχύει ο νόμος της τριχοτομίας:

$$x \in \Theta \quad \text{ή} \quad -x \in \Theta \quad \text{ή} \quad x = 0.$$

Λέμε τότε

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in \Theta.$$

Από τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι

$$x \in \Theta \Leftrightarrow x > 0.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε τις κάτωθι ιδιότητες της διάταξης

$$\forall x, y \in \Sigma \quad x < y \quad \text{ή} \quad x > y \quad \text{ή} \quad x = y.$$

$$\text{Αν } x < y \text{ και } y < z \Rightarrow x < z.$$

$$\text{Αν } x < y \text{ και } z > 0 \Rightarrow xz < yz.$$

Από τη στιγμή που έχουμε ορίσει σε ένα σώμα Σ μία διάταξη (συμβολικά $<$), μπορούμε πλέον να μιλάμε για υποσύνολα του Σ *άνω και κάτω φραγμένα*.

Πράγματι, έστω Σ είναι ένα διατεταγμένο σώμα. Ένα υποσύνολο A του Σ καλείται

- *άνω φραγμένο* εάν $\exists a \in \Sigma: \quad x \leq a \quad \forall x \in A,$
- *κάτω φραγμένο* εάν $\exists a \in \Sigma: \quad x \geq a \quad \forall x \in A,$
- *φραγμένο* εάν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Αν το στοιχείο $a \in \Sigma$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου A , τότε κάθε στοιχείο $a_1 \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $a_1 > a$ είναι επίσης ένα άνω φράγμα του A , οπότε είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν υπάρχει κάποιο ελάχιστο άνω φράγμα του A .

Ορισμός 1.1.1 Εστω A είναι ένα άνω φραγμένο υποσύνολο του Σ . Θα λέμε ότι το στοιχείο $\underline{a} \in \Sigma$ είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** του συνόλου A εάν

- το a είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου A ,
- αν a_1 είναι ένα άλλο άνω φράγμα του συνόλου A τότε $a \leq a_1$.

Ορισμός 1.1.2 Εστω A είναι ένα κάτω φραγμένο υποσύνολο του Σ . Θα λέμε ότι το $\underline{a} \in \Sigma$ είναι **μέγιστο κάτω φράγμα** του συνόλου A εάν

- το a είναι ένα κάτω φράγμα του συνόλου A ,
- αν a_1 είναι ένα άλλο κάτω φράγμα του A τότε $a \geq a_1$.

Σημείωση 1 Το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα (εάν υπάρχουν), ενός συνόλου A είναι μοναδικά. Πράγματι αν a, a_1 είναι δύο ελάχιστα άνω φράγματα του A τότε $a \leq a_1$ και $a \geq a_1$, οπότε $a = a_1$.

Το ελάχιστο άνω φράγμα συνόλου A (αν υπάρχει) καλείται **supremum (sup)** του συνόλου A , ενώ το μέγιστο κάτω φράγμα συνόλου A (αν υπάρχει), καλείται **infimum (inf)** του συνόλου A .

Σημείωση 2 Το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα μπορεί να ανήκουν ή να μην ανήκουν στο σύνολο A .

Πρόταση 1.1.1 Εστω A είναι ένα υποσύνολο συνόλου Σ και έστω $a \in \Sigma$. Τότε:

$$a = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & a \text{ είναι άνω φράγμα του } A \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: x > a - \varepsilon \end{cases}.$$

Απόδ. “ $\Rightarrow$ ” Εστω $a = \sup A$. Τότε το a είναι άνω φράγμα του A . Εστω $\varepsilon > 0$. Εάν για κάθε $x \in A$ ίσχυε $x \leq a - \varepsilon$ τότε το $a - \varepsilon$ θα ήταν επίσης άνω φράγμα του A , άρα $a \leq a - \varepsilon \Rightarrow \varepsilon \leq 0$ (άτοπο). Άρα:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: x > a - \varepsilon.$$

“ $\Leftarrow$ ” Αντίστροφα έστω ότι ικανοποιούνται οι (i) και (ii). Αν υποθέσουμε ότι $a \neq \sup A$ τότε θα υπάρχει $\beta = \sup A$ και $\beta < a$. Αφού λοιπόν η (ii) ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ θα ισχύει και για $\varepsilon = a - \beta > 0$. Τότε όμως $\exists x \in A: x > \beta$ (άτοπο). $\square$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

Πρόταση 1.1.2 Εστω A είναι ένα υποσύνολο συνόλου Σ και έστω $a \in \Sigma$. Τότε

$$a = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & a \text{ είναι κάτω φράγμα του } A \\ (ii) & \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A: x < a + \varepsilon \end{cases}.$$

Για να διασφαλίσουμε την ύπαρξη των $\sup$ και $\inf$ χρειαζόμαστε το ακόλουθο:

Αξίωμα (Πληρότητας ή συνέχειας): Θα λέμε ότι ένα διατεταγμένο σώμα Σ ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας αν σε οποιαδήποτε τομή L και R του σώματος Σ υπάρχει αριθμός $\xi \in \Sigma$ έτσι ώστε κάθε αριθμός μικρότερος του ξ να ανήκει στο σύνολο L και κάθε αριθμός μεγαλύτερος του ξ να ανήκει στο σύνολο R .

Ενα διατεταγμένο σώμα Σ που ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας καλείται **ολικά ή πλήρως διατεταγμένο σώμα** και σε ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα Σ κάθε μη κενό και φραγμένο υποσύνολο A έχει *infimum* $\alpha \in \Sigma$ και *supremum* $\beta \in \Sigma$.

Η βάση των αριθμών βρίσκεται στην απλή απαρίθμηση δηλαδή στους **φυσικούς αριθμούς**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

όπου ορίζουμε τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Σημείωση 4 Το σύνολο των φυσικών αριθμών ορίζεται συχνά σαν το μικρότερο επαγωγικό σύνολο, δηλαδή σαν το μικρότερο σύνολο που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $1 \in \mathbb{N}$,
- Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Ισχύει μάλιστα

Θεώρημα 1.1.1 (Αρχή της επαγωγής) Εστω $P(n)$ είναι μια μαθηματική πρόταση που εξαρτάται από το φυσικό αριθμό n . Αν η $P(1)$ είναι αληθής και αν για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$P(n) \text{ αληθής} \Rightarrow P(n+1) \text{ αληθής},$$

τότε η πρόταση $P(n)$ είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό n .

Το σύνολο $\mathbb{N}$ έχει αδυναμίες, π.χ. δεν υπάρχει αντίθετος ενός φυσικού αριθμού και έτσι δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε φυσικούς αριθμούς.

Η άρση της αδυναμίας αυτής γίνεται με τον ορισμό του **συνόλου των ακεραίων**:

$$\mathbb{Z} = \{\dots - n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots\},$$

αλλά και αυτό το σύστημα παρουσιάζει αδυναμίες, π.χ. δεν υπάρχει πάντα ο αντίστροφος ενός ακεραίου και άρα δεν μπορούμε να διαιρέσουμε δύο οποιουδήποτε ακέραιους αριθμούς (με το αποτέλεσμα εντός του συνόλου $\mathbb{Z}$).

Ετσι λοιπόν ορίζουμε το σύνολο των **ρητών αριθμών**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

το οποίο είναι πλέον διατεταγμένο σώμα. Μάλιστα είναι το μικρότερο διατεταγμένο σώμα, αφού μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε άλλο διατεταγμένο σώμα περιέχει το σύνολο $\mathbb{Q}$.

Μία ακόμη σημαντική ιδιότητα του συνόλου των ρητών αριθμών (και γενικότερα ενός διατεταγμένου σώματος) είναι ότι **η διάταξή του είναι πυκνή**, δηλαδή

$$\text{εάν } x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}: x < z < y.$$

Πράγματι, αρκεί να ορίσουμε: $z = (x + y)(1 + 1)^{-1} = \frac{x + y}{2}.$

Δυστυχώς και το σύνολο των ρητών αριθμών έχει αδυναμίες, π.χ. αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$\{x \in \mathbb{Q}: x^2 \leq 2\},$$

τότε το σύνολο αυτό **ΔΕΝ** έχει supremum. Πράγματι, ισχύει:

Πρόταση 1.1.3 Δεν υπάρχει ρητός αριθμός a τέτοιος ώστε: $a^2 = 2.$

Απόδ. Εστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $p, q \in \mathbb{N}: \frac{p}{q} = \sqrt{2}$ και οι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους. Επειδή

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

ο p^2 είναι άρτιος, άρα και ο p είναι άρτιος. Εστω $p = 2k$, τότε:

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2,$$

άρα και ο q^2 είναι άρτιος, συνεπώς και ο q είναι άρτιος το οποίο είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι οι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους. $\square$

Υπάρχουν λοιπόν αριθμοί που **δεν** είναι ρητοί. Αυτοί οι αριθμοί στο εξής θα καλούνται **άρρητοι αριθμοί**.

Για να επιλύσουμε την παραπάνω αδυναμία του συνόλου των ρητών αριθμών, πρέπει να δεχθούμε ένα επιπλέον αξίωμα αυτό της πληρότητας, ορίζοντας έτσι ένα νέο σύνολο $\mathbb{R}$, αυτό **των πραγματικών αριθμών**. Δεχόμαστε λοιπόν ότι

Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.

Αποδεικνύεται μάλιστα ότι:

Θεώρημα 1.1.2 *Υπάρχει μόνον ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.*

Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 1.1.4 *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$:*

$$m \leq x < m+1.$$

Ο μοναδικός αυτός ακέραιος καλείται **ακέραιο μέρος** του x και συμβολίζεται ως $[x]$.

Πρόταση 1.1.5 (Αρχιμήδεια ιδιότητα) Αν $\varepsilon > 0$ και $x \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n \in \mathbb{N}$:

$$n \varepsilon > x.$$

Πρόταση 1.1.6 Αν $x, y \in \mathbb{R}$ τότε υπάρχει ρητός αριθμός $p \in \mathbb{Q}$:

$$x < p < y.$$

Η πρόταση αυτή υπονοεί ότι κάθε άρρητος αριθμός προσεγγίζεται από έναν ρητό αριθμό με όσο σφάλμα θέλουμε.

§ 1.2 Πληθάριθμος συνόλων

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A καλείται **πληθάριθμος** του συνόλου A . Δύο σύνολα καλούνται **ισοδύναμα** όταν υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους. Δύο ισοδύναμα σύνολα έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι το μικρότερο σε πλήθος στοιχείων άπειρο σύνολο. Σύνολα ισοδύναμα με το $\mathbb{N}$ καλούνται **αριθμήσιμα** σύνολα. Σύνολα που δεν είναι αριθμήσιμα καλούνται **υπεραριθμήσιμα**.

Αποδεικνύεται ότι τόσο το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, όσο και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμα σύνολα. Όμως το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο (οπότε και οι άρρητοι αριθμοί είναι σύνολο υπεραριθμήσιμο). Γενικά το αξίωμα της πληρότητας κάνει ένα διατεταγμένο σύνολο υπεραριθμήσιμο.

§ 1.3 Τοπολογία του $\mathbb{R}$

Εστω a, b πραγματικοί αριθμοί. Το σύνολο

$$I = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

καλείται **ανοικτό διάστημα** με άκρα τα a και b και συμβολίζεται ως (a, b) . Ομοίως το σύνολο

$$I = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

καλείται **κλειστό διάστημα** με άκρα τα a και b και συμβολίζεται με $[a, b]$. Τα σύνολα

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$I_2 = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

καλούνται **ημιανοικτά διαστήματα** με άκρα τα a και b και συμβολίζονται με $[a, b)$ και $(a, b]$ αντίστοιχα.

Ορισμός 1.3.1 Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Καλούμε **περιοχή** $\pi_\varepsilon(x_0)$ κέντρου x_0 και ακτίνας ε το ανοικτό διάστημα

$$\pi_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Ορισμός 1.3.2 Ένα υποσύνολο A του συνόλου των πραγματικών αριθμών καλείται **ανοικτό σύνολο** αν

$$\exists \varepsilon > 0 : \pi_\varepsilon(x_0) \subset A \quad \forall x_0 \in A.$$

Τα σύνολα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ είναι ανοικτά σύνολα. Η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο, ενώ η ένωση οσονδήποτε ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

Ορισμός 1.3.3 Ένα υποσύνολο A του συνόλου των πραγματικών αριθμών καλείται **κλειστό σύνολο** αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{R} - A$ είναι **ανοικτό σύνολο**.

Ορισμός 1.3.4 Ένα σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ καλείται **σημείο συσσώρευσης** ενός συνόλου A αν

$$\forall \varepsilon > 0, \pi_\varepsilon(x_0) - \{x_0\} \cap A \neq \emptyset.$$

Το σύνολο A' των σημείων συσσώρευσης ενός συνόλου A καλείται **παράγωγο** σύνολο του A . Το σύνολο $A \cup A'$ καλείται **κλειστότητα** του A .

Αποδεικνύονται οι ακόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 1.3.1 A είναι κλειστό $\Leftrightarrow$ το A περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσης του.

Πρόταση 1.3.2 Αν x_0 είναι ένα σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου A τότε σε κάθε περιοχή $\pi_\varepsilon(x_0)$ του x_0 υπάρχουν άπειρα στοιχεία του συνόλου A .

Πρόταση 1.3.3 Κάθε άπειρο και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης.

Πόρισμα 1.3.1 Τα πεπερασμένα σύνολα δεν έχουν σημεία συσσώρευσης.

§ 1.4 Το επεκτεταμένο σύνολο $\overline{\mathbb{R}}$

Ορίζουμε το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\overline{\mathbb{R}}$ ως εξής

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

όπου

- $+\infty + (+\infty) = +\infty$
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty)(+\infty) = +\infty$
- $(+\infty)(-\infty) = -\infty$
- $(-\infty)(-\infty) = +\infty$
- $(-\infty)(+\infty) = -\infty$
- $\alpha \pm \infty = \pm \infty, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\alpha(\pm \infty) = \pm \infty, \alpha > 0$
- $\alpha / (\pm \infty) = 0, \alpha \in \mathbb{R}.$

ΠΡΟΣΟΧΗ !!! Οι κάτωθι πράξεις είναι απροσδιόριστες μορφές, δηλαδή το αποτέλεσμα τους ΔΕΝ είναι εκ των προτέρων μονοσήμαντα ορισμένο:

- $+\infty + (-\infty)$ ή $-\infty + \infty$
- $0(\pm \infty)$
- $(\pm \infty) / (\pm \infty)$
- $0 / 0$
- 1^∞
- $(\pm \infty)^0$
- $0^{\pm \infty}$
- $0^0.$

Χρήσιμες Ταυτότητες-Ανισότητες

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή. Για $a = 1, b \neq 1$, η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$1 - b^n = (1-b)(1+b+b^2+\dots+b^{n-2}+b^{n-1}),$$

ή ισοδύναμα

$$1 + b + b^2 + \dots + b^{n-2} + b^{n-1} = \frac{1-b^n}{1-b} \text{ (άθροισμα } n\text{-όρων γεωμετρικής προόδου).}$$

Διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{όπου } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, n \in \mathbb{N}.$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^2 \right), \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}.$$

Ανισότητα γεωμετρικού-αριθμητικού-αρμονικού μέσου

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad a_i > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Ανισότητα Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1, n \in \mathbb{N}.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε το $\sup$, $\inf$ και το παράγωγο σύνολο A' των κάτωθι υποσυνόλων της πραγματικής ευθείας:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c) < 0\}, \quad a < b < c$$

$$B = \{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \left\{ 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Λύση. (α) Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $A = (-\infty, a) \cup (b, c)$, άρα $\inf A = -\infty$, $\sup A = c$. Το παράγωγο σύνολο A' είναι $A' = (-\infty, a] \cup [b, c]$.

(β) Προφανώς $B = \{0, 2\}$, το οποίο υπολογίζεται επιλέγοντας $n=2k$ (άρτιος) ή $n=2k+1$ (περιττός) αντίστοιχα, άρα: $\inf B = 0$, $\sup B = 2$. Το παράγωγο σύνολο $A' = \emptyset$ διότι τα πεπερασμένα σύνολα δεν έχουν σημεία συσσώρευσης.

(γ) Προφανώς το σύνολο C μπορεί να γραφεί ως εξής

$$C = \begin{cases} 1/n, & n \text{ περιττός} \\ 2 - (1/n), & n \text{ άρτιος} \end{cases},$$

άρα $\inf C = 0$ (επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$) και $\sup C = 2$ (επειδή $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$).

Το παράγωγο σύνολο $A' = \{0, 2\}$, διότι "οσοδήποτε μικρή περιοχή των δύο αυτών σημείων και αν θεωρήσουμε", αυτή πάντοτε θα περιέχει στοιχεία του συνόλου C .
□

2. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \sqrt{2}\}$ ΔΕΝ έχει supremum στο $\mathbb{Q}$.

Λύση. Εστω p είναι ένα στοιχείο του συνόλου, τότε $p^2 < 2$. Θα δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο του συνόλου υπάρχει πάντοτε ένα μεγαλύτερο αυτού που είναι επίσης στοιχείο του συνόλου. Υποθέτουμε λοιπόν ότι h είναι ένας ρητός αριθμός τέτοιος ώστε $0 < h < 1$ και υπολογίζουμε

$$(p+h)^2 = p^2 + 2ph + h^2 = p^2 + (2p+h)h < p^2 + (2p+1)h,$$

οπότε αν ορίσουμε $h = \frac{2-p^2}{2p+1}$ αντικαθιστώντας στο δεξιό μέλος της παραπάνω

σχέσης παίρνουμε $(p+h)^2 < 2$, άρα $(p+h)^2 \in \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$. □

3. Να δείξετε ότι **(α)** $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$,

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\binom{n}{0} = 1$ και $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $n \in \mathbb{N}$.

(β) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Λύση. (α) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!}{(k-1)! k (n-k)!}$$

$$= \frac{(n! k) + (n! (n-k+1))}{(k-1)! k (n-k)!(n-k+1)} = \frac{n! (n+1)}{k! (n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k! (n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

(β) Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της επαγωγής. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για $n = 1$ ισχύει η πρόταση. Υποθέτουμε ότι για $\lambda = n$ ισχύει

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

και θα δείξουμε ότι για $\lambda = n+1$ ισχύει

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &\stackrel{k+1=\lambda}{=} \sum_{\lambda=1}^{n+1} \binom{n}{\lambda-1} a^\lambda b^{n+1-\lambda} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &\stackrel{k=\lambda-r}{=} a^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r-1} a^r b^{n+1-r} + \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} a^r b^{n+1-r} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{r=1}^n \left(\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} \right) a^r b^{n+1-r} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{r=1}^n \binom{n+1}{r} a^r b^{n+1-r} + b^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} a^r b^{n+1-r}. \quad \square \end{aligned}$$

4. Να δείξετε ότι $(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Λύση. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της επαγωγής. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για $n = 1$ ισχύει η πρόταση. Υποθέτουμε ότι για $k = n$ ισχύει

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2,$$

και θα δείξουμε ότι για $k = n+1$ ισχύει

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x + \frac{(n+1)n}{2}x^2.$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) \geq \left(1+nx + \frac{(n-1)n}{2}x^2\right)(1+x) \\
&= 1+(n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \\
&\geq 1+(n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2. \quad \square
\end{aligned}$$

5. Εάν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $\alpha < b + \varepsilon$ ναδειχθεί ότι $\alpha \leq b$.

Λύση. Θα εργασθούμε με την εις άτοπον απαγωγή. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $\alpha > b$, τότε αφού η σχέση $\alpha < b + \varepsilon$ ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ θα ισχύει και για $\varepsilon = \frac{\alpha - b}{2} > 0$. Τότε

$$b + \varepsilon = b + \frac{\alpha - b}{2} = \frac{\alpha + b}{2} < \alpha \quad (\text{άτοπο}),$$

άρα δεν ισχύει η υπόθεσή μας $\alpha > b$, άρα από το νόμο της τριχοτομίας $\alpha \leq b$. $\square$

6. Αν A, B είναι φραγμένα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών ναδειχθεί ότι

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

Λύση. Εφόσον A, B είναι φραγμένα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών έχουν μέγιστο κάτω φράγμα $\inf A, \inf B$. Εστω

$$x \in A+B \Rightarrow x = y+z, \quad y \in A, z \in B$$

$\Rightarrow x = y+z \geq \inf A + \inf B \Rightarrow A+B$ είναι κάτω φραγμένο $\Rightarrow \inf A + \inf B$ είναι ένα κάτω φράγμα του $A+B$. Εφόσον το σύνολο $A+B$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\inf(A+B)$ και εφόσον το $\inf A + \inf B$ είναι ένα κάτω φράγμα του έχουμε

$$\inf(A+B) \geq \inf A + \inf B.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\inf(A+B) \leq \inf A + \inf B$. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής. Υποθέτουμε ότι

$$\inf(A+B) > \inf A + \inf B, \quad (\alpha)$$

τότε $\inf(A+B) - \inf A > \inf B$, άρα υπάρχει $z \in B$:

$$\inf(A+B) - \inf A > z \Rightarrow \inf(A+B) - z > \inf A,$$

οπότε υπάρχει $y \in A$:

$$\inf(A+B) - z > y \Rightarrow \inf(A+B) > y + z \in A+B,$$

άτοπο, διότι $\inf(A+B) \leq x \ \forall x \in A+B$ άρα δεν ισχύει η αρχική μας υπόθεση (α), οπότε αναγκαστικά $\inf(A+B) \leq \inf A + \inf B$. Εφόσον λοιπόν αποδείξαμε ότι $\inf(A+B) \leq \inf A + \inf B$ και ταυτόχρονα $\inf(A+B) \geq \inf A + \inf B$, από το νόμο της τριχοτομίας έχουμε ότι:

$$\inf(A+B) = \inf A + \inf B. \quad \square$$

7. Να αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^2 \right), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Εστω $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$0 \leq \sum_{k=0}^n \|a_k - \lambda b_k\|^2 = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 - 2\lambda \sum_{k=0}^n |a_k b_k| + \lambda^2 \sum_{k=0}^n |b_k|^2.$$

Το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας είναι ένα τριώνυμο του λ μη αρνητικό για κάθε τιμή του λ , άρα πρέπει η διακρίνουσά του να είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός, δηλαδή:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4 \left(\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=0}^n |b_k|^2 \right) \leq 0,$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο. $\square$